$$r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2}$$

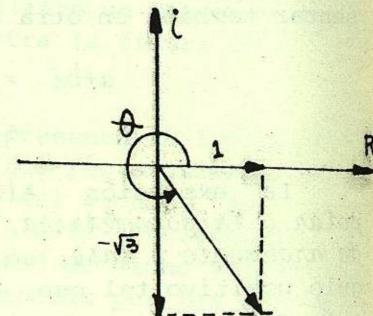
$$r = \sqrt{1+3}$$

$$r = \sqrt{4}$$

$r = 2$ (ya que el radio vector siempre es positivo)

Para calcular θ, primero hagamos la gráfica del número complejo a fin de determinar el cuadrante al que pertenece.

La gráfica muestra que el ángulo pertenece al cuarto cuadrante. Por $\tan\theta = b/a$, tenemos que:



$$\tan\theta = -\sqrt{3}/1$$

$$\tan\theta = -\sqrt{3}$$

$$\theta = \text{arc. } \tan(-\sqrt{3})$$

$$\theta = 360° - 60°$$

$$\theta = 300°$$

Sustituyendo estos valores de "r" y "θ" en $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\text{sen}\,\theta$, se tiene:

$$a = 2\cos 300°$$

$$b = 2\,\text{sen}\,300°$$

después, sustituyendo estos valores en a+bi, se tiene:

$$a + bi = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$$

$$1 - i\sqrt{3} = 2(\cos 300° + i\,\text{sen}\,300°)$$

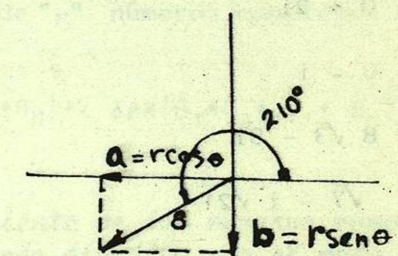
EJEMPLO 2.

Expresar el número complejo $8(\cos 210° + i\,\text{sen}\,210°)$ en forma rectangular.

SOLUCIÓN:

Nótese que este es un número complejo de la forma $r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta)$, donde el módulo es $r=8$ y el argumento es $\theta = 210°$. Graficando vemos que nos queda en el tercer cuadrante.

Ahora, encontremos los valores de las partes real e imaginaria por $a = r\cos\theta$ y $b = r\,\text{sen}\,\theta$.



$$\cos 210° = -\cos 30°$$

$$= -\sqrt{3}/2$$

entonces:

$$a = 8\cos 210°$$

$$a = 8(-\sqrt{3}/2)$$

$$a = -4\sqrt{3}$$

$$\text{Sen } 210° = -\text{sen } 30°$$

$$= -1/2$$

entonces:

$$b = 8\,\text{sen}\,210°$$

$$b = 8(-1/2)$$

$$b = -4$$

Sustituyendo estos valores de "a" y "b" en la forma a+bi, nos queda:

$$r(\cos\theta + i\,\text{sen}\theta) = a + bi$$

$$8(\cos 210° + i\,\text{sen}\,210°) = -4\sqrt{3} - 4i$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Expresar cada uno de los siguientes problemas ya sea en forma polar o rectangular, según sea el caso.

1.- $1 + i$	8.- $-2 + i$
2.- $4 + 0i$	9.- $-7 - 24i$
3.- $2 - 2i\sqrt{3}$	10.- $2 (\cos 30° + i \text{ sen } 30°)$
4.- $0 + 2i$	11.- $\sqrt{2} (\cos 45° + i \text{ sen } 45°)$
5.- $0 - i$	12.- $5 (\cos 150° + i \text{ sen } 150°)$
6.- $8\sqrt{3} - 8i$	13.- $6 (\cos 270° + i \text{ sen } 270°)$
7.- $\sqrt{7} - i\sqrt{21}$	14.- $\text{Cos } 128° + i \text{ sen } 128°$

6-6 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN FORMA POLAR.

En esta sección veremos las demostraciones de la multiplicación y división de números complejos en forma polar.

Multiplicación. El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos y el argumento del producto es la suma de sus argumentos, es decir:

$$r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen}\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen } \theta_2) = r_1 r_2 [\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

Demostración.

Sean los números complejos (a+bi) y (c+di) de tal manera que:

$$a+bi = r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen } \theta_1)$$
$$c+di = r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen } \theta_2)$$

efectuando la multiplicación de los números complejos, tendremos:

$$(a+bi)(c+di) = r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen}\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen}\theta_2)$$
$$= r_1 \cdot r_2 [(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \text{sen}\theta_1 \text{sen } \theta_2) + i (\cos \theta_1 \text{ sen}\theta_2 + \text{sen}\theta_1 \cos\theta_2)]$$
$$= r_1 \cdot r_2 [\text{Cos } (\theta_1 + \theta_2) + i \text{ sen } (\theta_1 + \theta_2)]$$

Del mismo modo, el producto de "n" números complejos está dado por:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \ldots r_n \cdot [\text{Cos}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n) + i \text{ sen}(\theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_n)]$$

División. El módulo del cociente de dos números complejos es igual al módulo del dividendo dividido por el módulo del divisor, y el argumento del cociente es igual al argumento del dividendo menos el argumento del divisor, es decir:

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen}\theta_2)} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \text{ sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

Demostración.

Partimos de considerar que:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen}\theta_2)}$$

si multiplicamos el dividendo y el divisor por el conjugado del divisor, que es $(\cos\theta_2 - i \text{ sen}\theta_2)$, nos queda:

$$\frac{r_1(\cos\theta_1 + i \text{ sen}\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i \text{ sen}\theta_2)} \bullet \frac{(\cos \theta_2 - i \text{ sen}\theta_2)}{(\cos \theta_2 - i \text{ sen}\theta_2)} =$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1\cos\theta_2 - i\cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - i^2\operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2 - i^2\operatorname{sen}^2\theta_2)}$$

reordenando y sustituyendo el valor de i^2 por -1, nos queda:

$$\frac{r_1\ (\cos\theta_1\cos\theta_2 + \operatorname{sen}\theta_1\operatorname{sen}\theta_2) + i(\operatorname{sen}\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\operatorname{sen}\theta_2)}{r_2(\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2)}$$

pero, por identidades, nos queda:

$$\frac{r_1\ \cos(\theta_1 - \theta_2)\ + i\ \operatorname{sen}\ (\theta_1 - \theta_2)}{r_2\ (1)}$$

$$\frac{r_1}{r_2} \cdot \left[\cos\ (\theta_1 - \theta_2) + i\ \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)\right]$$

Si aplicamos estos principios, la multiplicación y división de números complejos expresados en forma polar puede efectuarse a simple vista.

AUTOEVALUACIÓN 3.

Realiza las siguientes operaciones en forma polar.

1.- $2(\cos 120° + i \operatorname{sen} 120°)\ .\ 3(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

2.- $\dfrac{4}{3\sqrt{3} - 3i}$

3.- $3i(1 - i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$

4.- $(3 - 3i)(4 - 4i)$

5.- $\dfrac{21\ (\cos 33° + i \operatorname{sen} 33°)}{3\ (\cos 93° + i \operatorname{sen} 93°)}$

6.- $\dfrac{6\ (\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)}{3\ (\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)}$

7.- $(4/3i)$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO VI.

1.- Un número de la forma $a + bi$ se denomina:

1) Número real. 2) Número complejo.
3) Número ficticio. 4) Número imaginario.

Desarrolla las operaciones indicadas, dando el resultado en la forma $a + bi$.

2.- $(4 + \sqrt{-1}) - (6 + \sqrt{-2})$

1) $\sqrt{3} - 3i$ 2) $3 + i\sqrt{3}$
3) $3 - i\sqrt{3}$ 4) $-2 + (1 - \sqrt{2})i$

3.- $(5 + \sqrt{-12}) + (2 + \sqrt{-27})$

1) $7 + 5i\sqrt{3}$ 2) $3 - i\sqrt{3}$
3) $7 + i\sqrt{3}$ 4) $7 - i\sqrt{3}$

4.- $\dfrac{4 + 6i}{2}$

1) $\dfrac{8 + 6i}{4}$ 2) $2 + 3i$

3) $\dfrac{4 + 12i}{4}$ 4) $8 + 12i$

5.- $(5 + 4i)(-4i + 5)$

1) $-40 + 41i$ 2) $40 + 41i$
3) 41 4) $41 - 40i$

Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

6.- $3 + 4i$

1) $(\cos 53°10' + i \operatorname{sen} 53°10')$
2) $5(\cos 36°50' + i \operatorname{sen} 36°50')$
3) $5(\cos 53°7'48" + i \operatorname{sen} 53°7'48")$
4) $(\cos 36°50' + i \operatorname{sen} 36°50')$

7.- $2\sqrt{3} - 2i$

1) $4(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$
2) $4(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$
3) $2(\cos 315° + i \operatorname{sen} 315°)$
4) $\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°$

8.- Expresa en forma rectangular el siguiente número complejo: $8(\cos 60° + i \operatorname{sen} 60°)$

1) $2 + 2i\sqrt{3}$ 2) $1 + i\sqrt{3}$
3) $4 + 4i\sqrt{3}$ 4) $5 - \sqrt{3}i$

Efectúa las siguientes operaciones dando el resultado en la forma polar.

9.- $(3 + 4i)(3 - 4i)$

1) $25(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$
2) $5(\cos 360° + i \operatorname{sen} 360°)$
3) $18(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$
4) $25(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

10.- $\dfrac{4(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)}{2(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)}$

1) $2(\cos -90° - i \operatorname{sen} 90°)$
2) $2(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$
3) $2(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$
4) $\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO VI.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- $7 + 2i$

2.- $2i$

3.- $i\sqrt{11}$

4.- 2

5.- $8 + i$

6.- $-1 + 4i$

7.- $-24 - 28i$

8.- 11

9.- $8 + i$

10.- $2 - 5i$

11.- $17/25 + (6/25)i$

12.- $3 - 4i$

13.- $(6+4\sqrt{5}) + (3\sqrt{5}$ - [illegible]

14.- $8 + (3\sqrt{3})i$

15.- $13i$

16.- $-8 + 6i$

17.- $5/2 + (1/2)i$

18.- $-6 + 4i$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $\sqrt{2}\,(\cos 45° + i \operatorname{sen} 45°)$

2.- $4\,(\cos 0° + i \operatorname{sen} 0°)$

3.- $4\,(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

4.- $2\,(\cos 90° + i \operatorname{sen} 90°)$

5.- $(\cos 270° + i \operatorname{sen} 2/0°)$

6.- $16\,(\cos 330° + i \operatorname{sen} 330°)$

7.- $2\sqrt{7}\,(\cos 300° + i \operatorname{sen} 300°)$

8.- $\sqrt{5}\,(\cos 153°26'6'' + i \operatorname{sen} 153°26'6'')$

9.- $25\,(\cos 253°44'23'' + i \operatorname{sen} 253°44'23'')$

10.- $\sqrt{3} + i$

11.- $1 + i$

12.- $-\dfrac{5\sqrt{3}}{2} + \dfrac{5}{2}i$

13.- $-6i$

14.- -0.6157 + 0.7880 i

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- 6 (cos 180° + i sen 180°)

2.- 2/3 (cos 30° + i sen 30°)

3.- 12 (cos 60° + i sen 60°)

4.- 24 (cos 270° + i sen 270°)

5.- 7 (cos 300° + i sen 300°)

6.- 2 (cos 135° + i sen 135°)

7.- 4/3 (cos 90° + i sen 90°)

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO VI.

1.- 2

2.- 4

3.- 1

4.- 2

5.- 3

6.- 3

7.- 2

8.- 3

9.- 1

10.- 2.

A P É N D I C E.

RESUMEN DE FÓRMULAS TRIGONOMÉTRICAS.

Fórmulas para un ángulo.

$$\text{sen } A = \frac{1}{\csc A} \qquad \csc A = \frac{1}{\text{sen } A}$$

$$\cos A = \frac{1}{\sec A} \qquad \sec A = \frac{1}{\cos A}$$

$$\tan A = \frac{1}{\cot A} \qquad \cot A = \frac{1}{\tan A}$$

$$\frac{\text{sen } A}{\cos A} = \tan A \qquad \frac{\cos A}{\text{sen } A} = \cot A$$

$$\text{sen}(90°-A) = \cos A \qquad \text{sen}(90°+A) = \cos A$$

$$\cos(90°-A) = \text{sen } A \qquad \cos(90°+A) = -\text{sen } A$$

$$\tan(90°-A) = \cot A \qquad \tan(90°+A) = -\cot A$$

$$\text{sen}(180°-A) = \text{sen}A \qquad \text{sen}(180°+A) = -\text{sen } A$$

$$\cos(180°-A) = -\cos A \qquad \cos(180°+A) = -\cos A$$

$$\tan(180°-A) = -\tan A \qquad \tan(180°+A) = \tan A$$

$$\text{sen}(270°-A) = -\cos A \qquad \text{sen}(-A) = -\text{sen } A$$

$$\cos(270°-A) = -\text{sen} A \qquad \cos(-A) = \cos A$$

$$\tan(270°-A) = \cot A \qquad \tan(-A) = -\tan A$$

$$\text{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$$

$$\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$$

$$\csc^2 A = 1 + \cot^2 A$$