ÁREA II

Geometría Analítica Bidimensional

4to. Semestre

Preparatoria Núm. 15

Geometría Analítica Bidimensional

4to. Semestre

M A T E M Á T I C A S IV.

Ing. Miguel Angel Garza Tamez.
Ing. José Luis Guerra Torres.
Ing. Pablo Rivera Carrillo.

Í N D I C E.

2696

CONCEPTOS BASICOS DE GEOMETRIA ANALITICA BIDIMENSIONAL.

Con esta unidad damos comienzo al estudio de la geometría analítica bidimensional, o sea, a través de los ejes coordenados rectangulares. Aprenderás a graficar relaciones definidas por una ecuación o desigualdad y estarás en condiciones de aplicar tus conocimientos algebraicos para determinar el rango y dominio de cualquier relación.

Aprende a excelencia la importancia de los conceptos básicos en la comprensión para su correcta aplicación.

Al término de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1.- Definir con tus propias palabras GEOMETRIA ANALITICA BIDIMENSIONAL.

2.- Definir con tus propias palabras los conceptos: relación dominio y recorrido o rango.

3.- Explicar brevemente en qué consiste un sistema coordenado rectangular, definiendo cada una de las partes de que consta.

4.- Construir correctamente la gráfica de un relación definida por una ecuación o desigualdad.

5.- Determinar correctamente el dominio y rango de cualquier relación definida por una expresión algebraica.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1.- Estudia el capítulo I de tu libro de texto de Geometría Analítica. Antes de proceder a resolver tus objetivos, estudia primero el capítulo entero, para que comprendas mejor lo que se pide. También te sugerimos que, conforme vayas avanzando en el estudio de la unidad, hagas todas las anotaciones que creas importantes, así como de las fórmulas que se expongan en el capítulo, ya que las estaremos usando continuamente.

    Para los objetivos 1 y 2, lee todo el capítulo y una vez que las hayas definido, trata de comprender lo mejor que puedas estos conceptos, ya que son la base para resolver los demás objetivos.

    Para el objetivo 3, dibuja en tu cuaderno un sistema coordenado rectangular donde señales todas las partes que creas sean importantes, para que posteriormente las defina s.

    Para los objetivos 4 y 5, analiza primero tus ejemplos, donde se construyen diferentes gráficas de relaciones; sobre todo pon especial atención en la secuencia que se sigue para graficar una desigualdad. Después, es necesario, para el objetivo 5, el que hayas comprendido el significado de los objetivos 1 y 2, ya que en este objetivo los vas a aplicar. Una vez que hayas estudiado los ejemplos, resuelve la autoevaluación.

2.- Si ya crees estar seguro del estudio de esta unidad, resuelve la autoevaluación de la unidad, contestando la autoevaluación del capítulo.

CAPITULO 1.

CONCEPTOS BÁSICOS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA BIDIMENSIONAL.

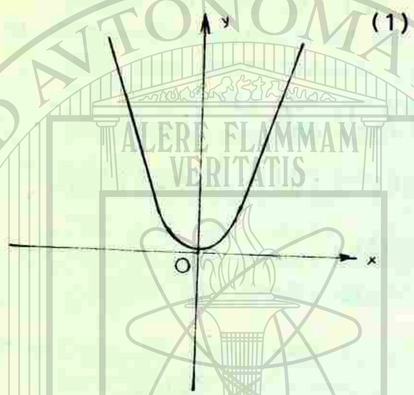
1-1 INTRODUCCIÓN.

Con este capítulo damos comienzo al estudio de la Geometría Analítica Bidimensional. Veremos cómo emplear el término de relación y a determinar el rango y dominio de expresiones que bien pueden ser ecuaciones o desigualdades.

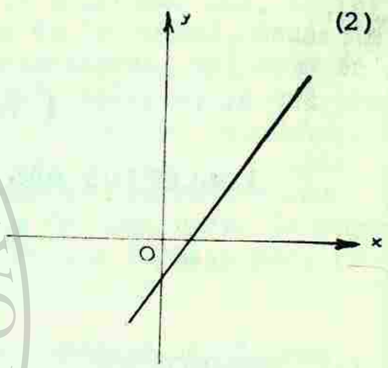
1-2 DEFINICIÓN.

La Geometría Analítica Bidimensional es la representación de pares ordenados de números reales por medio de puntos del plano y estudia esos conjuntos de puntos definidos por medio de expresiones en dos variables.

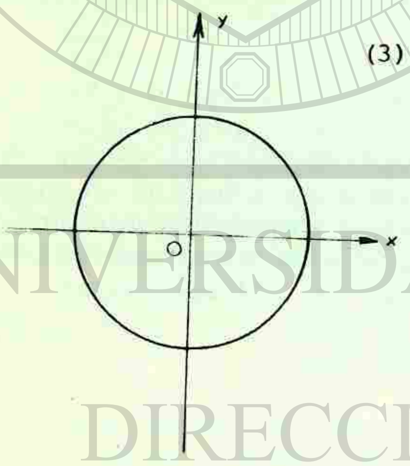
EJEMPLOS.



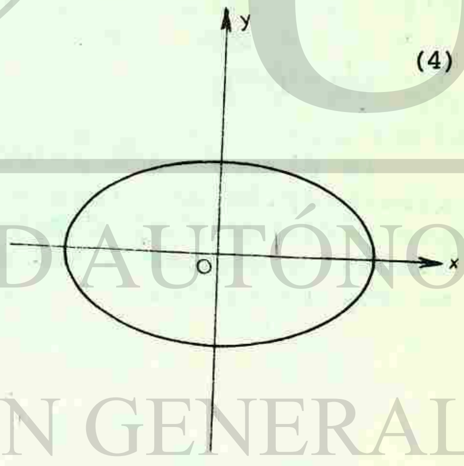
$x^2 = 4py,\ p \quad 0$



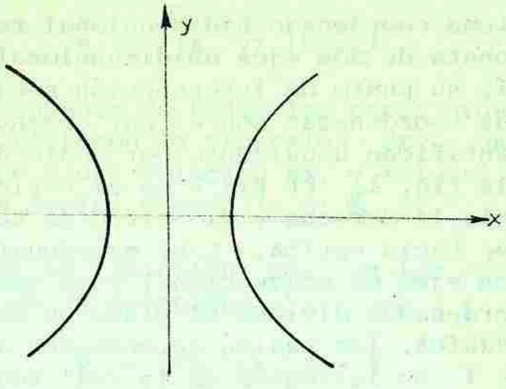
$y = mx + b$



$x^2 + y^2 = r^2$



$\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b^2} = 1$



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Estos son algunos ejemplos de formas obtenidas a través de expresiones en dos variables. Estas expresiones pueden ser ecuaciones o inecuaciones, representadas por "*Sxy*".

Ahora bien, la representación de Sxy la hacemos a tra-- vés de *un sistema coordenado bidimensional* rectangular, donde representamos los pares ordenados (x,y) de números reales por medio de puntos, obteniendo así las diferentes formas de Sxy.

Como ya sabemos, bidimensional significa en dos dimensiones, y quiere decir que el sistema coordenado está formado -- por dos ejes unidimensionales.

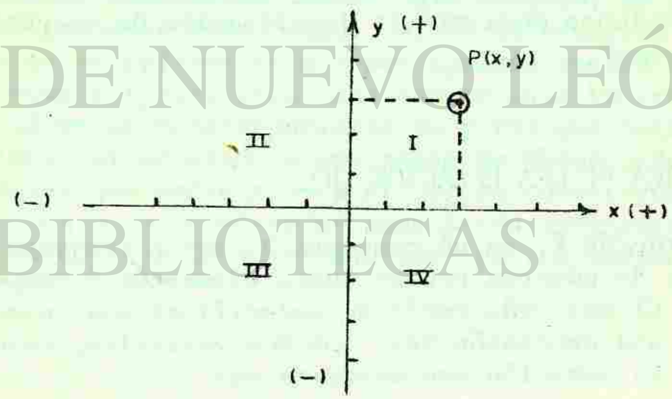


Fig. 1.

Un sistema coordenado bidimensional rectangular como el anterior, consta de dos ejes unidimensionales perpendiculares entre sí; su punto de intersección recibe el nombre de *origen* y sus coordenadas son el par ordenado (0,0). Los ejes se identifican usualmente por medio de letras como se muestra en la fig. 1. *El eje x* es el horizontal, con su eje positivo hacia la derecha y el *eje y* es vertical con su sentido positivo hacia arriba. Cabe mencionar que el sentido positivo de los ejes es convencional y se usa comúnmente así. Los ejes coordenados dividen el plano en cuatro regiones llamadas *cuadrantes*, los cuales se enumeran I, II, III y IV. *El cuadrante I* es la región en la cual todo punto tiene ambas coordenadas positivas. *El cuadrante II* es la región en la cual todo punto tiene abscisa negativa y ordenada positiva. *El cuadrante III* es la región en la cual todo punto tiene ambas coordenadas negativas, y por último *el cuadrante IV* es la región en la cual todo punto tiene abscisa positiva y ordenada negativa.

Por medio de un sistema coordenado bidimensional se puede establecer una correspondencia biunívoca entre los puntos del plano y los elementos del conjunto de pares ordenados de números reales, es decir, a cada punto P de un plano se asocia un par ordenado de números reales (x_1, y_1) y viceversa, a todo par ordenado (x_1, y_1) de números reales se asocia un punto.

Podemos resumir "la Geometría Analítica Bidimensional estudia las gráficas de ciertas expresiones en dos variables analizándolas y facilitando la construcción de gráficas de otras relaciones mediante la localización de un número limitado de puntos".

1-3 LA GRAFICA DE UNA RELACION (R).

Una *relación R*, en un conjunto U, es un conjunto de pares ordenados de números reales cuyos elementos o componentes están en U. El modo más común de especificar una relación es por medio de una expresión Sxy con dos variables, cuyo universo es U. La notación que usaremos es:

$$R = \{(x, y) \mid Sxy\}$$

y nos indica el conjunto de todos los pares ordenados de números reales que satisfacen la expresión Sxy. Un par ordenado (c,d) pertenece a una relación si, y sólo si, la expresión Sab es cierta, es decir, cuando $(c,d) \in R$.

La *gráfica de la expresión* Sxy en las variables x y y es la gráfica de la relación:

$$R = \{(x, y) \mid Sxy\}$$

Ahora bien, en la sección anterior mencionamos que la expresión Sxy puede ser una ecuación o desigualdad. Supóngase que la relación R está definida por una ecuación $E(x,y)= 0$, es decir,

$$R = \{(x,y) \mid E(x,y)= 0\}$$

En este caso *la gráfica de la ecuación* $E(x,y)=0$, es la gráfica de la relación R.

Gráfica de la relación R definida por $E(x,y) = 0$.

Puesto que una relación R puede tener como miembros un sin número de pares ordenados de números reales, no se puede, en general, tabularlos todos. Sin embargo, se puede casi siempre proceder como sigue: a) en la ecuación $E(x,y)=0$ se sustituye sucesivamente a x por números reales escogidos de algún modo y luego, para cada uno de esos números reales se busca el valor correspondiente de y tal que satisfaga a la ecuación; b) se elabora una tabla de pares ordenados de números reales que pertenecen a R; c) se construyen los puntos que tienen como coordenadas esos pares ordenados y d) se obtiene la gráfica de R uniendo esos puntos mediante un trazo contínuo.

EJEMPLO 1.

Construir la gráfica de la relación:

$$R_1 = \{(x,y) \mid y = x^2 - 1\}$$

SOLUCIÓN:

Dando valores a x de -3 a 3 se obtienen los valores de y.

$y_1 = (-3)^2 - 1 = 8$ $\quad y_3 = (-1)^2 - 1 = 0$ $\quad y_5 = (1)^2 - 1 = 0$

$y_2 = (-2)^2 - 1 = 3$ $\quad y_4 = (0)^2 - 1 = -1$ $\quad y_6 = (2)^2 - 1 = 3$

$y_7 = (3)^2 - 1 = 8$

Luego, hacemos una tabla de pares ordenados:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	3	0	-1	0	3	8

Graficando los puntos y uniéndolos se obtiene la gráfica de la relación R definida por la ecuación $y = x^2 - 1$ (fig. 2).

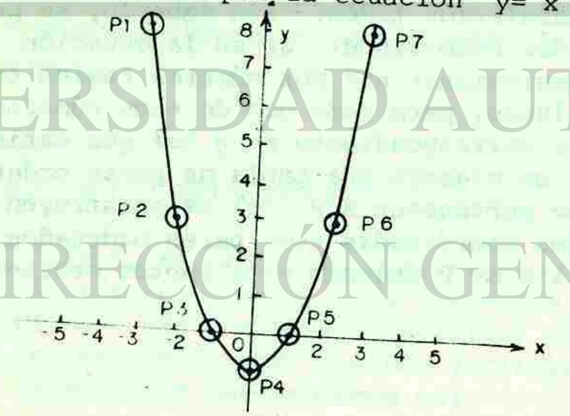


Fig. 2.

EJEMPLO 2.

Construir la gráfica de la relación:

$$R_2 = \{(x,y) \mid y = x + 3\}$$

SOLUCIÓN:

Para construir la gráfica de esta relación definida por la ecuación $y = x+3$, vemos que es una ecuación lineal y su gráfica es una recta, por lo tanto, con tres puntos que encontremos son suficientes.

$y_1 = (-6) + 3 = -3$ $\quad y_2 = (0) + 3 = 3$ $\quad y_3 = (3) + 3 = 6$

o sea que,

	P_1	P_2	P_3
x	-6	0	3
y	-3	3	6

cuya gráfica es:

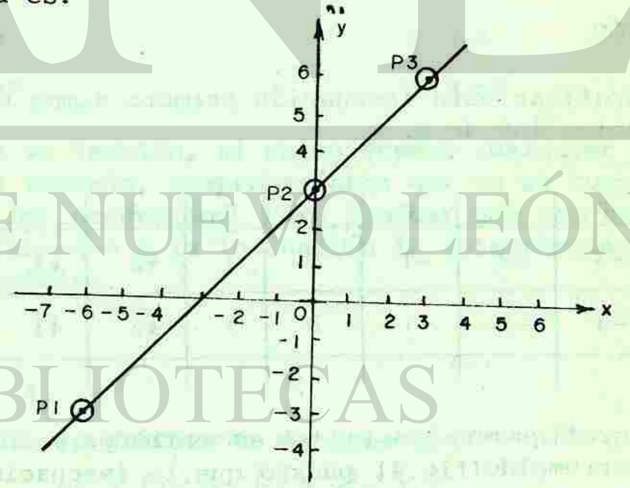


Fig. 3.

Gráfica de la relación R definida por una inecuación o desigualdad.

Para graficar una relación R definida por una inecuación se procede como si fuera una ecuación primero, para darle valores a x y encontrar los respectivos de y, para después hacer una tabla de valores. Después se grafican estos puntos y se procede a unirlos con un trazo contínuo si la inecuación es $\geq$ (mayor o igual) o $\leq$ (menor o igual) y con un trazo interrumpido si es $<$ o $>$ simplemente. Por último se sombrea el área, según sea el sentido de la desigualdad.

Debe tenerse cuidado al sombrear el área, por lo que se recomienda que se escojan puntos al azar con el fin de comprobar a través de la inecuación el área sombreada.

EJEMPLO 3.

Construir la gráfica de la relación:

$$R_3 = \{(x,y) \mid y > x\}$$

SOLUCIÓN:

Para graficar esta inecuación primero damos valores a x y encontraremos los de y.

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
x	-3	-2	-1	0	1	+2	+3	+4
y	-3	-2	-1	0	1	+2	+3	+4

Ahora grafiquemos los puntos encontrados y unámoslos con un trazo interrumpido(fig.4), puesto que,la inecuación nos indica que es $y > x$ pero no igual.

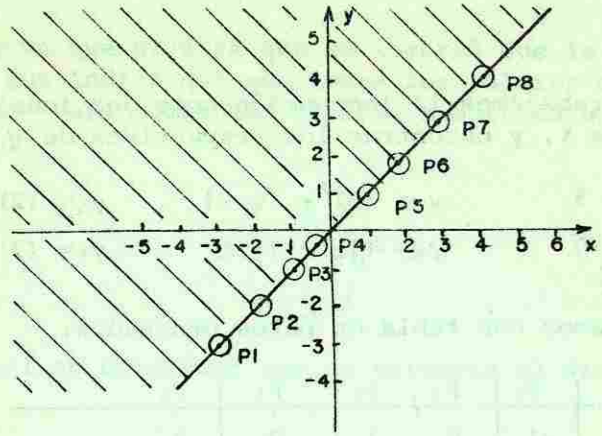


Fig. 4.

Observa que el área que se sombreó fue la de arriba de la recta, puesto que, la inecuación indica todos los valores de y mayores que x, y esto nada más sucede en la parte de arriba (sentido positivo de y) de la recta. Para probar esta desigualdad, escojamos un punto cualquiera que esté dentro del área sombreada.

P_9 (-1,1) $\qquad$ P_{10} (-2,1)

$y > x$ $\qquad$ $y > x$

$1 > -1$ $\qquad$ $1 > -2$

Como se ve también, si escogiéramos cualquier punto sobre la recta trazada, comprobaríamos que no se cumple para estos puntos, la inecuación. Para indicar que los puntos de la recta no pertenecen a la inecuación la interrumpimos como lo muestra la gráfica.

EJEMPLO 4.

Construir la gráfica de la relación:

$$R_4 = \{(x,y) \mid y \geq x^2 - 1\}$$

SOLUCIÓN:

Primero trabajemos la inecuación como una igualdad para darle valores a x, y encontrar los respectivos de y.

$y_1 = (-2)^2 - 1 = 3$ $\quad$ $y_3 = (0)^2 - 1 = -1$ $\quad$ $y_5 = (2)^2 - 1 = 3$

$y_2 = (-1)^2 - 1 = 0$ $\quad$ $y_4 = (1)^2 - 1 = 0$ $\quad$ $y_6 = (3)^2 - 1 = 8$

Ahora hagamos una tabla de pares ordenados:

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
x	-2	-1	0	1	2	3
y	3	0	-1	0	3	8

para después graficar los puntos obtenidos. Luego, unamos dichos puntos con un trazo contínuo (fig. 5), ya que la gráfica de la relación definida por la inecuación $y \geq x^2 - 1$, incluye también los puntos que están sobre la curva.

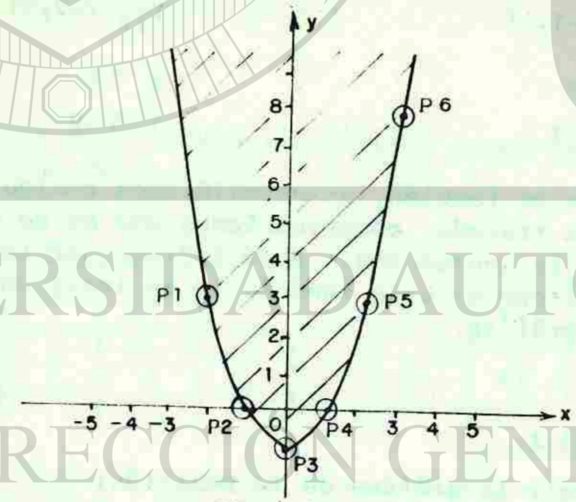


Fig. 5.

Observa que el área que se sombreó fue la de arriba de la curva que indica que son todos los valores mayores o iguales que y. Para comprobar el área sombreada escojamos el punto $(-1,2)$.

$$y \geq x^2 - 1$$
$$2 \geq (-1)^2 - 1$$
$$2 \geq 0$$

Con lo cual se comprueba que es correcta el área sombreada.

1-4 INTERSECCION Y UNION DE EXPRESIONES Sxy.

La *intersección* de los conjuntos A y B se indica por $A \cap B$ y se define como el conjunto cuyos elementos son comunes a ambos. En geometría analítica representaremos la intersección de expresiones, tales como, Sxy y Txy en las variables x e y como:

$$\{(x,y) \mid Sxy \text{ y } Txy\} = \{(x,y) \mid Sxy\} \cap \{(x,y) \mid Txy\}$$

La *unión* de los conjuntos A y B se indica como A U B y se define como el conjunto cuyos elementos pertenecen a A o a B. En geometría analítica representaremos la unión de expresiones, tales como, Sxy y Txy en las variables x e y como:

$$\{(x,y) \mid Sxy \text{ y/o } Txy\} = \{(x,y) \mid Sxy\} \cup \{(x,y) \mid Txy\}$$

EJEMPLO 1.

Construir la gráfica de la relación:

$$R_5 = \{(x,y) \mid y = x \quad y \quad y = -x\}$$

SOLUCIÓN:

La relación R la podemos escribir como:

$$R_5 = \{(x,y) \mid y=x\} \cap \{(x,y) \mid y= -x\}$$

Haciendo una tabla de pares ordenados para cada una de las expresiones y graficando tenemos que (fig. 6):

y = x

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x	-2	-1	0	1	2
y	-2	-1	0	1	2

y = -x

	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}
x	-2	-1	0	1	2
y	2	1	0	-1	-2

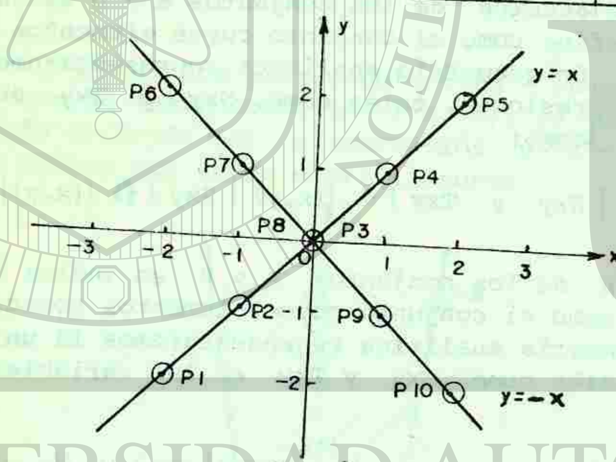


Fig. 6.

Por consiguiente la gráfica R es el punto de intersección de las expresiones y=x e y= -x, o sea el punto (0,0).

EJEMPLO 2.

Construir la gráfica de la relación:

$$R_6 = \{(x,y) \mid y=x \quad y/o \quad y= -x\}$$

SOLUCIÓN:

La relación R la podemos escribir como:

$$R_6 = \{(x,y) \mid y=x\} \cup \{(x,y) \mid y= -x\}$$

que nos indica que la gráfica es la unión de las gráficas $\{(x,y) \mid y=x\}$ y de $\{(x,y) \mid y= -x\}$. La gráfica de la fig. 6 es la misma que ésta con excepción de que la relación está formada por todos los puntos que pertenezcan a las dos expresiones.

Obsérvese que, mientras en el primer ejemplo la gráfica de la relación es un solo punto, en el segundo ejemplo lo son todos los puntos que pertenezcan a las dos líneas. El estudiante debe tener cuidado al escoger qué pares ordenados -- pertenecen a la relación, dependiendo de la unión o intersección.

1-5 DOMINIO Y RECORRIDO.

Hay dos términos muy importantes que intervienen con frecuencia en una relación R y son: *Dominio y Recorrido o Rango.*

El *dominio* de una relación R en un conjunto U es el subconjunto de U cuyos elementos son las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a R.

El *recorrido o rango* de una relación R en un conjunto U es el subconjunto de U cuyos elementos son las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a R.

El dominio D de una relación R, cuyo universo es el conjunto de los números reales, es el mayor subconjunto de números reales que tienen la propiedad de que: $a \in D$ si, y sólo si, existe un número b real, tal que $(a,b) \in R$.

Para especificar estos subconjuntos del dominio y rango haremos uso de a, b, $+\infty$, $-\infty$, que se usarán como: $(a;b)$, $[a;b]$, $[a;b)$, $(a;b]$, $[a;+\infty)$, $(-\infty;a]$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;a)$ y $(-\infty;+\infty)$. Además usaremos los paréntesis ( ) para indicar que los números no alcanzan a pertenecer a la relación R, o bien son exclusivos; los paréntesis [ ] indican que los números son inclusives, o sea que pertenecen también a la relación R.

Lo anterior lo podemos definir como:

$(a;b) = \{x \mid a < x < b\}$

$[a;b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$

$[a;b) = \{x \mid a \leq x < b\}$

$(a;b] = \{x \mid a < x \leq b\}$

$[a;+\infty) = \{x \mid a \leq x\}$

$(-\infty;a] = \{x \mid a \geq x\}$

$(a;+\infty) = \{x \mid a < x\}$

$(-\infty;a) = \{x \mid a > x\}$

$(-\infty;+\infty)$ = conjunto de los números reales (Re).

A través de las notaciones anteriores, cabe observar que el dominio y rango o recorrido, especificado a través de subconjuntos, debe ir primero el número menor (a) y luego, después del punto y coma, el número mayor (b), indicando así que los números reales intermedios entre ellos pertenecen a la relación R.

Así, tenemos que, en los ejemplos de las secciones anteriores:

a) Para R_1: Dominio = $(-\infty;+\infty)$ y Rango = $[-1;+\infty)$.

b) Para R_2: Dominio = $(-\infty;+\infty)$ y Rango = $(-\infty;+\infty)$.

c) Para R_3: Dominio = $(-\infty;+\infty)$ y Rango = $(-\infty;+\infty)$.

d) Para R_4: Dominio = $(-\infty;+\infty)$ y Rango = $[-1;+\infty)$.

e) Para R_5: Dominio = $\{0\}$ y Rango = $\{0\}$

f) Para R_6: Dominio = $(-\infty;+\infty)$ y Rango = $(-\infty;+\infty)$.

AUTOEVALUACION 1.

En un sistema coordenado, construya y marque cada uno de los siguientes puntos indicando a la vez a qué cuadrante pertenecen.

1.- (3,1)

2.- (-4, 2)

3.- (-2, -2)

4.- (9, 0)

5.- (-3, 0)

6.- (0, -3)

7.- (0, 4)

8.- (0,0)

Si el universo es el conjunto de los números reales, construya las gráficas de cada relación y dé su dominio y rango.

9.- $R = \{(x,y) \mid x+y = 6\}$

10.- $R = \{(x,y) \mid y^2 = x\}$

11.- $R = \{(x,y) \mid y = 5\}$

12.- $R = \{(x,y) \mid x = 4 \text{ y } y < 0\}$

13.- $R = \{(x,y) \mid x = 9 \text{ y/o } y = 3\}$

14.- $R = \{(x,y) \mid y = x^2\}$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO I.

1.- Cuadrante I.

2.- Cuadrante II.

3.- Cuadrante III.

4.- Sobre el eje x positivo.

5.- Sobre el eje x negativo.

6.- Sobre el eje y negativo.

7.- Sobre el eje y positivo.

8.- Origen.

9.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$, Recorrido = $(-\infty; +\infty)$.

10.- Dominio = $[0; +\infty)$, Recorrido = $(-\infty; +\infty)$.

11.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$, Recorrido = $\{5\}$.

12.- Dominio = $\{4\}$ Recorrido = $(-\infty; 0)$.

13.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$, Recorrido = $(-\infty; +\infty)$.

14.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$, Recorrido = $[0; +\infty)$.

LA LÍNEA RECTA.

PARTE I.

Un hilo tirante dá una idea intuitiva de la línea recta, la cual suele definirse como aquella que tiene todos sus puntos en una misma dirección. Así, por ejemplo, se comprueba si el borde de una regla es recta, dirigiendo una visual por uno de sus extremos, para ver si todos sus puntos quedan - ocultos detrás del primero. Para trazar líneas rectas se emplea, generalmente, una regla, una escuadra o un cordón bien tirante.

En esta unidad nos concentraremos al estudio de varias fórmulas que nos servirán para aprender a encontrar la distancia entre dos puntos, la pendiente y determinar cuando dos líneas rectas son perpendiculares o paralelas entre sí.

Aprende a excelencia esta unidad, ya que deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Demostrar correctamente la fórmula de la distancia entre dos puntos y la fórmula del punto medio de un segmento de recta.

2.- Aplicar correctamente las fórmulas del objetivo anterior a problemas que las involucren o en demostraciones pedidas.

3.- Explicar y distinguir claramente el significado de los conceptos pendiente e inclinación y paralelismo y perpendicularidad entre dos rectas.

4.- Bajo el objetivo anterior, encontrar la pendiente y/o inclinación de una recta, dados dos puntos cualquiera que pertenezcan a dicha recta.

5.- Aplicar correctamente el concepto de pendiente y los principios de paralelismo y perpendicularidad, para demostrar cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares entre sí.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1.- Estudia la lección 1 del capítulo II de tu texto "Geometría Analítica". Para los primeros dos objetivos intervienen dos conceptos importantes y que debes saber distinguir para poder demostrar las fórmulas. Ten presentes estas fórmulas, ya que las aplicaremos en unidades posteriores.

Una vez que hayas estudiado los ejemplos que vienen en tu texto, resuelve como práctica del objetivo 2, la autoevaluación 1.

Los objetivos 3, 4 y 5 están íntimamente ligados, por lo que te recomendamos trates de comprender bien el objetivo 3, ya que es la base para resolver satisfactoriamente los otros dos objetivos. Ve y analiza los ejemplos que se exponen para que luego trates de resolver la autoevaluación 2.

2.- Si ya lograste contestar satisfactoriamente la unidad, resuelve la autoevaluación de la lección.

CAPITULO 2.

LA LÍNEA RECTA.

LECCIÓN 1.

2-1 INTRODUCCIÓN.

Un hilo tirante dá una idea intuitiva de la línea recta, la cual suele definirse como aquella que tiene todos sus puntos en una misma dirección. Así, por ejemplo, se comprueba si el borde de una regla es recta, dirigiendo una visual por uno de sus extremos para ver si todos sus puntos quedan ocultos detrás del primero. Para trazar líneas rectas se emplea generalmente, una regla, una escuadra, o un cordón bien tirante.

Por ejemplo, los carpinteros y aserradores emplean, para trazar rectas sobre la madera, un cordel bien estirado impregnado de una materia colorante, que se hace vibrar a lo largo de las piezas o troncos que se quieran aserrar. Los jardineros tienden un cordel entre dos estacas para guiarse en los surcos o plantíos que quieran hacer en línea recta. Los albañiles se sirven también de un cordel tendido a lo largo de las paredes que construyen, para mantener su alineación y de la plomada, para asegurarse que dichas paredes suben verticalmente.

En general, la línea recta es el camino más corto entre dos puntos analíticamente hablando, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables, es una recta.

Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos o un punto y su dirección.

El aprendizaje de la Geometría Analítica no es difícil, sólo requiere estudio y trabajo concienzudo. El material elaborado está expuesto en forma clara y sencilla, especialmente para aquellos alumnos que dan sus primeros pasos en el estudio de esta rama de las matemáticas.

Para estar en condiciones de empezar a analizar las ecuaciones lineales en cualquiera de sus formas equivalentes, en esta lección, aprenderás a comprender el significado de conceptos como: distancia entre dos puntos, coordenadas del punto medio, pendiente, inclinación, así como las condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

2-2 LONGITUD DE SEGMENTOS PARALELOS A LOS EJES.

Supongamos que A_1 y A_2 son dos puntos de una recta paralela al "eje x". Entonces podremos escribir sus coordenadas como $A_1(x_1, a)$ y $A_2(x_2, a)$ (fig. 1). Ahora queremos saber la longitud de $A_1 A_2$ y la forma de expresarla. Dibujemos A_1C y A_2D perpendiculares al eje x. Entonces C tiene por coordenadas $(x_1, 0)$ y $D(x_2, 0)$. Además, las longitudes A_1A_2 y CD son iguales por ser lados opuestos de un rectángulo.

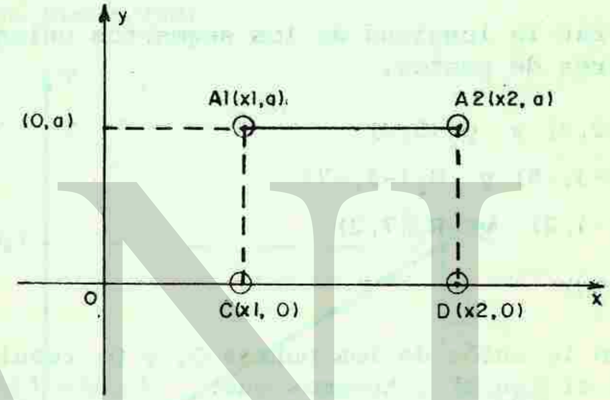


Fig. 1.

De los conceptos anteriores podemos saber que:

$$CD = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

de ahí que:

$$A_1 A_2 = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Esto nos da el siguiente teorema:

> La longitud de un segmento paralelo al eje "x", entre $A_1(x_1, a)$ y $A_2(x_2, a)$ está dada por:
>
> $$A_1 A_2 = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Una demostración semejante sirve para enunciar el siguiente teorema:

La longitud de un segmento paralelo al "eje y" entre $B_1(a, y_1)$ y $B_2(a, y_2)$ está dada por:

$$B_1B_2 = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

EJEMPLO

Encontrar la longitud de los segmentos uniendo los siguientes pares de puntos:

a) $Q_1(2,3)$ y $Q_2(5,3)$

b) $S_1(-3,-5)$ y $S_2(-3,-7)$

c) $R_1(-4,2)$ y $R_2(7,2)$

SOLUCIÓN:

a) Como la unión de los puntos Q_1 y Q_2 resulta un segmento paralelo al "eje X", tenemos que:

$$Q_1Q_2 = |x_2 - x_1| = |5 - 2| = |3| = 3$$

b) Como la unión de los puntos S_1 y S_2 resulta un segmento parelelo al "eje Y", tenemos que:

$$S_1S_2 = |y_2 - y_1| = |-7-(-5)| = |-7+5| = |-2| = 2$$

c) Y como el segmento R_1R_2 es paralelo al "eje X", tenemos que:

$$R_1R_2 = |x_2 - x_1| = |7-(-4)| = |7+4| = |11| = 11$$

2-3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Uno de los conceptos más importantes de la Geometría Analítica es la fórmula que da la longitud de un segmento P_1P_2 o la "distancia" entre los puntos P_1 y P_2 en términos de sus coordenadas. Para obtenerla, consideraremos los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del plano coordenado (fig. 2); construiremos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento P_1P_2, trazando al efecto por P_1 una paralela al "eje X" y por P_2 una paralela al "eje Y"; designemos por R el punto de intersección de ambas y cuyas coordenadas son $R(x_2, y_1)$. Entonces, se tiene que:

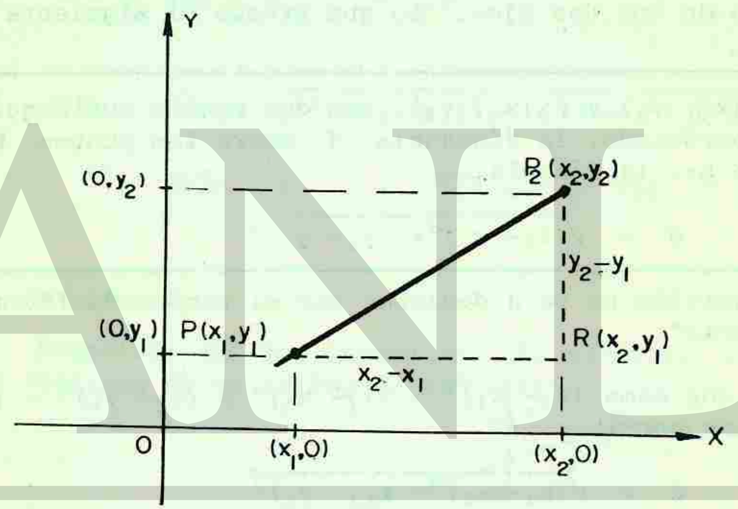


FIG.- 2

La longitud del segmento P_1P_2 puede ser calculado por el teorema de Pitágoras (en un triángulo rectángulo cualquiera, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos); a partir de este teorema,

$$(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (RP_2)^2$$

de donde:

$$P_1R = |x_2 - x_1| \qquad y \qquad RP_2 = |y_2 - y_1|$$

y consecuentemente,

$$(P_1P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

y como;

$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 \quad y \quad |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$$

de aquí que:

$$(P_1P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Observamos que es verdad, aunque la recta $P_1 P_2$ sea paralela a uno de los dos ejes. Lo que prueba el siguiente teorema:

> "Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano coordenado, la distancia $\underline{d}$ entre los puntos P_1 y P_2 está dada por la fórmula:
>
> $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta ecuación se va a designar con el nombre de "fórmula de la distancia".

Nótese que como $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, se puede escribir:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

o sea que, en el empleo de la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre dos puntos, cualquiera de ellos puede ser designado como (x_1, y_1) y el otro como (x_2, y_2).

EJEMPLO 1.

Encuentre la distancia entre las siguientes parejas de puntos:

a) (4,-3) y (-2, 5)
b) (-2,3) y (5, 1)
c) (6,-1) y (-4,-3)

SOLUCIÓN:

Usando la fórmula de la distancia se encuentra que:

a) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + [5-(-3)]^2}$

$d = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$

b) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[5-(-2)]^2 + (1-3)^2} =$

$= \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

c) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-6)^2 + [-3-(-1)]^2} =$

$= \sqrt{100 + 4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

EJEMPLO 2.

Demostrar que los puntos A(3,8), B(-11,3), C(-8,-2) son los vértices de un triángulo isósceles.

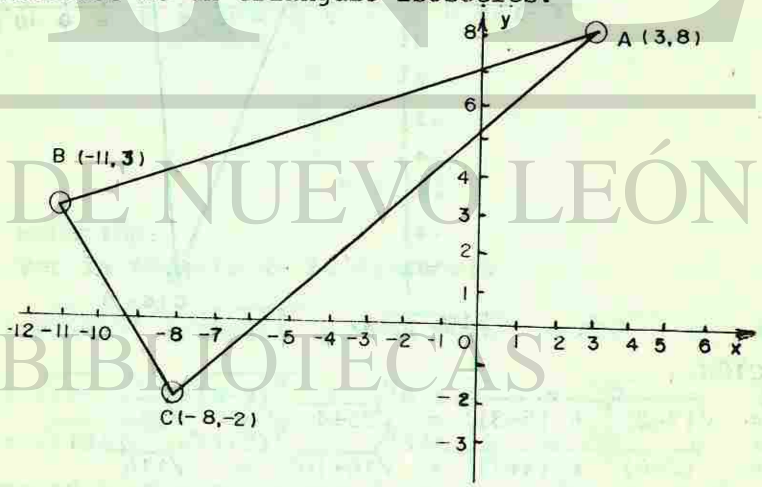


Fig. 3.

SOLUCIÓN:

Por la fórmula de la distancia:

$$AB = \sqrt{(3+11)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{196+25} = \sqrt{221}$$

$$AC = \sqrt{(3+8)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{121+100} = \sqrt{221}$$

$$BC = \sqrt{(-11+8)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

Como se encontró que AB = AC, el triángulo dado es isósceles.

EJEMPLO 3.

Demostrar que los puntos A(7,5), B(2,3), C(6,-7) son los vértices de un triángulo rectángulo.

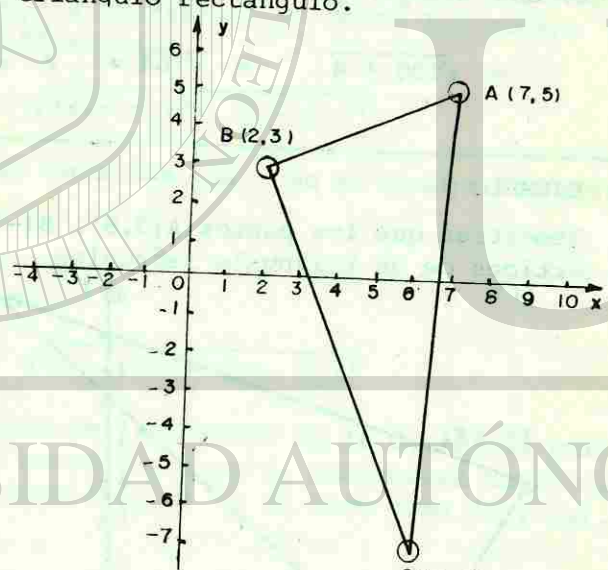


Fig. 4.

SOLUCIÓN:

$$AB = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$BC = \sqrt{(2-6)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116}$$

$$AC = \sqrt{(7-6)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{1+144} = \sqrt{145}$$

Si para el triángulo con vértices en A, B y C se cumple que $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$, entonces ABC es un triángulo rectángulo en B; y como

$$(AB)^2 + (BC)^2 = 29 + 116 = 145 = (AC)^2$$

en consecuencia, el triángulo ABC del presente ejemplo es rectángulo en B.

EJEMPLO 4.

Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales: A(-3,-2), B(5,2) y C(9,4).

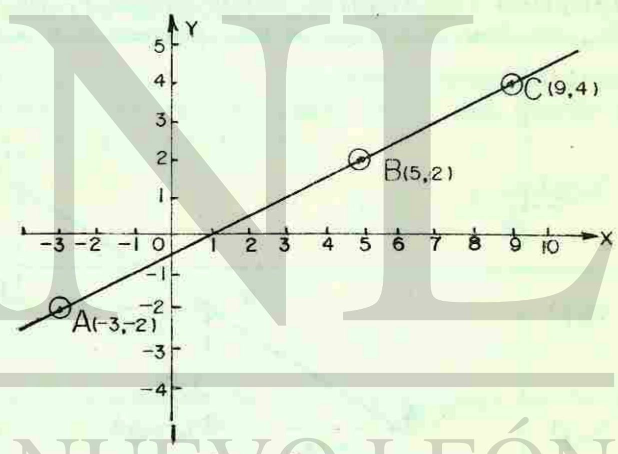


Fig. 5.

SOLUCIÓN:

Por la fórmula de la distancia:

$$AB = \sqrt{(5+3)^2} + \sqrt{(2+2)^2} = \sqrt{64+16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(9-5)^2} + \sqrt{(4-2)^2} = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{((9+3)^2} + \sqrt{(4+2)^2} = \sqrt{144+36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

y como AB + BC = AC, o sea $4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ los puntos anteriores son colineales.

2-4 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

Frecuentemente se desea encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une dos puntos de coordenadas dadas.

Consideremos los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ como los extremos del segmento P_1P_2 y $P(x,y)$ su punto medio; se ve que para estos puntos se cumple la igualdad $P_1P = PP_2$. Por cada uno de estos tres puntos trazaremos paralelas a los ejes coordenados como se muestra en la figura 6, de modo de formar triángulos rectángulos congruentes P QP y PRP (ver figura 6), en los que $P_1Q = PR$ porque $P_1P = PP_2$.

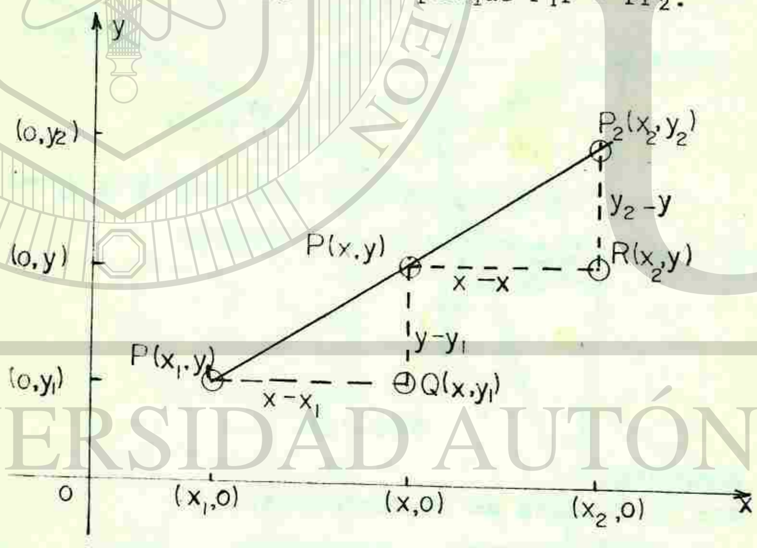


Fig. 6.

Ahora, $P_1Q = x - x_1$ y $PR = x_2 - x$, de donde:

$$x - x_1 = x_2 - x$$

reordenando $\quad 2x = x_1 + x_2$

y despejando $\quad x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

Análogamente, $QP = RP_2$ y

$$y - y_1 = y_2 - y$$

reordenando $\quad 2y = y_1 + y_2$

despejando $\quad y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

con lo que se demuestra el siguiente teorema:

> "Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano coordenado, las coordenadas (x,y) del punto medio del segmento P_1P_2 están dadas por:
>
> $x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ y $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

EJEMPLO 1.

Encuentre las coordenadas de los puntos medios de las siguientes parejas de puntos:

a) $A_1(3,7)$ y $A_2(5,-5)$

b) $R_1(6,-5)$ y $R_2(-3,2)$

SOLUCIÓN:

a) Sea $A(x,y)$ el punto medio del segmento A_1A_2. Por el teorema anterior, las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $A_1(3,7)$ y $A_2(5,-5)$ son:

$$x = \frac{3 + 5}{2} = 4, \qquad y = \frac{7 - 5}{2} = 1$$

o sea que A es el punto (4,1).

b) En forma semejante se encuentra que R (el punto medio del segmento R_1R_2) tiene como coordenadas.

$$x = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y = \frac{-5+2}{2} = \frac{-3}{2}$$

o sea que R es el punto (3/2, -3/2).

EJEMPLO 2.

Un segmento de recta tiene por extremo el punto $P_1(1,-2)$ y como punto medio a P (4,3). Encuentre las coordenadas del otro extremo.

SOLUCIÓN:

Si el punto $P_2(x_2, y_2)$ es el otro extremo; sustituyendo $x_1 = 1$ y $x = 4$ en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, se obtiene:

$$4 = \frac{1 + x_2}{2}, \text{ o sea } \quad 8 = 1 + x_2$$

de donde $x_2 = 7$.

Análogamente, sustituyendo $y_1 = -2$, $y=3$ en $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, resulta:

$$3 = \frac{-2 + y_2}{2}, \text{ o sea } \quad 6 = -2 + y_2$$

de donde $y_2 = 8$.

Por lo tanto las coordenadas del otro extremo son $P_2(7,8)$.

Muchos teoremas de la Geometría Plana Elemental pueden demostrarse "analíticamente", empleando las ideas y los procedimientos de la Geometría Analítica. El siguiente ejemplo aclara el concepto.

EJEMPLO 3.

Demostrar, analíticamente, que las diagonales del paralelogramo cuyos vértices son los puntos: A(-2,-3), B(5,-4), C(4,1), D(-3,2), cortan por mitad.

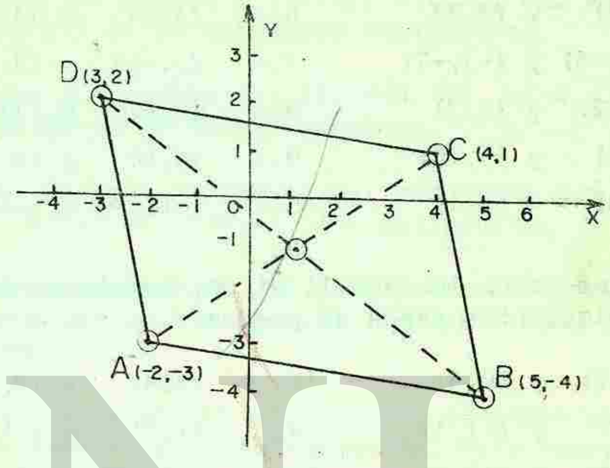


Fig. 7.

SOLUCIÓN:

Para usar los métodos de Geometría Analítica, se debe colocar el paralelogramo dado en el plano coordenado. (Fig. 7).

Por el teorema anterior, se encuentra que las coordenadas del punto medio del segmento AC son: (1, -1) y que las coordenadas del punto medio del segmento BD son (1, -1); lo que prueba que los puntos medios de AC y BD coinciden y el teorema enunciado ha sido demostrado.

Al demostrar teoremas geométricos por métodos analíticos, debemos de tener cuidado al colocar la figura en un sistema coordenado, de no suponer más de lo que ha sido dado. En particular, debe evitarse cuidadosamente al dibujar la figura, suponer que la conclusión es cierta.

AUTOEVALUACION 1.

En los problemas del 1 al 10, encontrar la longitud de los segmentos uniendo los pares de puntos siguientes:

1.- (2,3) y (5,3)
2.- (-3,-5) y (-3,-7)
3.- (-4,2) y (7,2)
4.- (5,5) y (5,-6)
5.- (0,0) y (0,3)
6.- (4,7) y (4,-10)
7.- (3,-5) y (7, -5)
8.- (6,6) y (13,6)
9.- (4,0) y (0,0)
10.- (-6,-9) y (-6,-11)

En los problemas del 11 al 20, encontrar la distancia entre los siguientes pares de puntos.

11.- (-6,0) y (0,8)
12.- (4,1) y (-1,1)
13.- (6,-2) y (-3,7)
14.- (5,8) y (-3,2)
15.- (2,-3) y (3,3)
16.- (3,4) y (9,11)
17.- (1,3) y (-5,5)
18.- (3,-2) y (4,1)
19.- (0,3) y (-4,1)
20.- (2,-6) y (2,-2)

En los problemas del 21 al 30, encontrar las coordenadas del punto medio entre los siguientes pares de puntos.

21.- (2,3) y (6,1)
22.- (7,7) y (5,9)
23.- (6,-2) y (3,5)
24.- (4,4) y (2,0)
25.- (-3,2) y (7,-6)
26.- (4,-2) y (1,3)
27.- (3,-1) y (1,-2)
28.- (9,3) y (8,6)
29.- (-2,-4) y (2,6)
30.- (0,2) y (4,-8)

31.- Demostrar, aplicando la fórmula de distancia, que el triángulo A(2,-2), B(2,8), C(-2,0) es rectángulo.

32.- Demostrar aplicando la fórmula de distancia, que los puntos A(0,1), B(1,0), C(-1,-4), D(-2,-3) son los vértices de un paralelogramo.

33.- Demostrar, aplicando la fórmula de la distancia, que los puntos A(2,4), B(5,1), C(6,5) son los vértices de un triángulo isósceles.

34.- Demostrar que los puntos A(-2,-2), B(2,2), C(2 $\sqrt{3}$,-2 $\sqrt{3}$) son los vértices de un triángulo equilátero.

35.- Demostrar que los puntos A(4,4), B(4,-2), C(-4,-2) son los vértices de un triángulo escaleno.

36.- Aplicando la fórmula de distancia, demostrar que los puntos A(1,3), B(-2,-3), C(3,7) son colineales.

37.- Encontrar las coordenadas del centro de una circunferencia que tiene los puntos A(-4,6) y B(2,0) como extremos de un diámetro.

38.- El extremo de un segmento es (-3,6) y su punto medio es (-1,2). Encuentre las coordenadas del otro extremo.

39.- El extremo de un segmento es (5,-1) y su punto medio es (5/2, -5/2). Encuentre las coordenadas del otro extremo.

40.- Demostrar que los puntos A(4,6), B(2,-2), C(-11,-1) y D(-13,-9) son los vértices de un paralelogramo y que las diagonales cortan por mitad.

2-5 INCLINACION Y PENDIENTE DE UNA RECTA.

A partir de una recta L, que no sea paralela al "eje Y" y que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, (fig. 8). consideremos las siguientes definiciones:

"La inclinación θ de una recta L, es el menor de los ángulos que dicha recta forma con el semieje positivo de las X y se mide, desde la parte positiva del "eje X" a la recta L, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, entre los límites $0° \leq \theta < 180°$".

La inclinación de una recta paralela al "eje X" es 0° y la inclinación de una recta paralela al "eje Y" es de 90°.

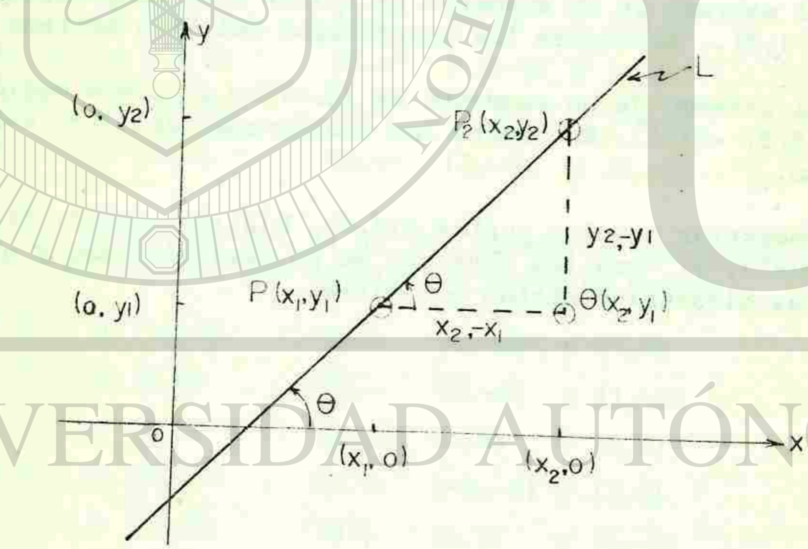


Fig. 8.

"La pendiente m de una recta es la tangente del ángulo de inclinación". En estas condiciones,

$$m = \tan\theta$$

(siendo "θ" el ángulo de inclinación y "m" la pendiente).

La pendiente de una recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$m = \tan\theta = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

cualesquiera que sean los cuadrantes en los que estén situados los puntos P_1 y P_2.

La pendiente de una recta paralela al "eje X" (o sea, cuando, $y_2 - y_1 = 0$) es cero. La pendiente de una recta paralela al "eje Y" (o sea, cuando $x_2 - x_1 = 0$) no está definida. Y puesto que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

así que para el cálculo de la pendiente no importa la denominación de los puntos.

EJEMPLO 1.

Hallar la pendiente "m" y el ángulo de inclinación θ de las rectas que unen los pares de puntos siguientes:

$x_2 y_2$ $x_1 y_1$

a) (3,4), (4,1)
b) (-8,-4), (5,9)
c) (10,-3), (14,-7)
d) (-11,4), (-11,10)
e) (8,6), (14,6)

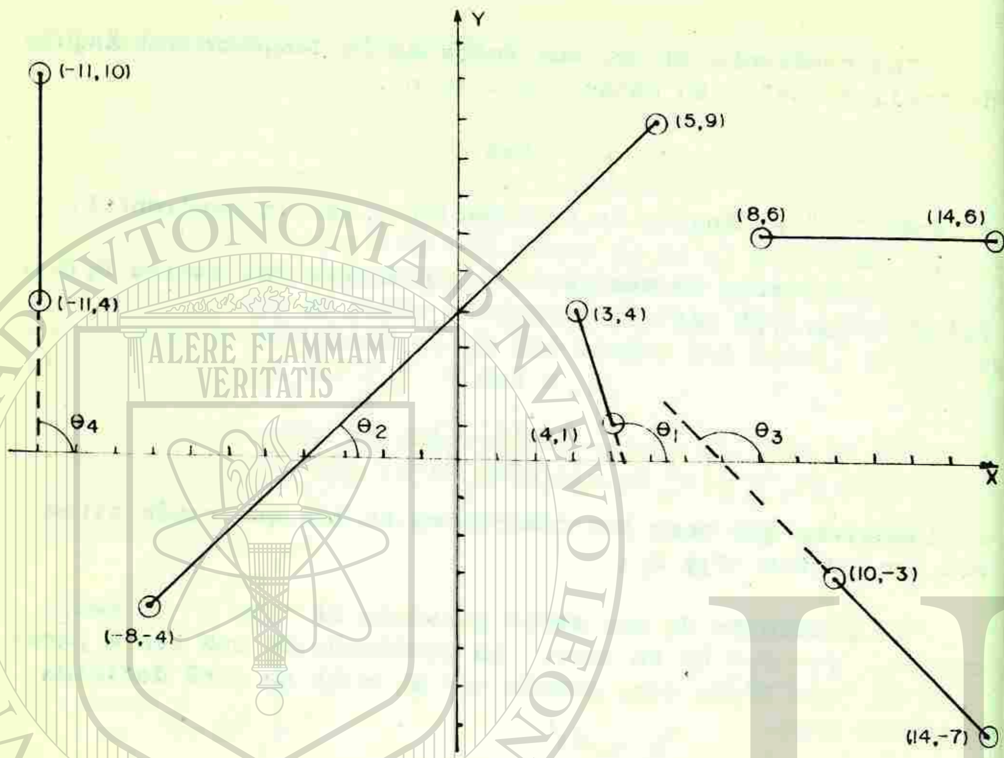


Fig. 9.

SOLUCIÓN:

a) Usando la ecuación $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\Theta$, se encuentra que "m" está dada por:

$$m_1 = \frac{1 - 4}{4 - 3}$$

$$= \frac{-3}{1}$$

$$= -3$$

o sea, que $\tan\Theta_1 = -3$, siendo $0° \leq \Theta < 180°$ y, en este caso Θ mayor de 90° (ya que la tangente es negativa). Para hayar Θ se escribe:

$$\tan(180° - \Theta) = -\tan\Theta = 3$$

y en las tablas trigonométricas se observa que el ángulo agudo cuya tangente es 3 es 72° (tomando al entero más próximo) y por consiguiente:

$$180° - \Theta_1 = 72°$$

donde $\Theta_1 = 180° - 72°$

por lo tanto, $\Theta_1 = 108°$

y así,

b) $m_2 = \frac{9 + 4}{5 + 8} = 1$ y $\Theta_2 = 45°$

c) $m_3 = \frac{-7 + 3}{14 - 10} = -1$ y $\Theta_3 = 135°$

d) $m_4 = \frac{10 - 4}{-11 + 11} = \frac{6}{0} = \infty$ y $\Theta_4 = 90°$

e) $m_5 = \frac{6 - 6}{14 - 8} = \frac{0}{6} = 0$ y $\Theta_5 = 0°$

EJEMPLO 2.

Demostrar, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos A(-3,4), B(3,2) y C(6,1) son colineales.

SOLUCIÓN:

Pendiente de AB $= \frac{2 - 4}{3 + 3} = -\frac{1}{3}$

Pendiente de AC $= \frac{1 - 4}{6 + 3} = -\frac{1}{3}$

Como la pendiente de AB es la misma que la de AC, los tres puntos están situados sobre la misma recta.

2-6 RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.

Consideremos los siguientes teoremas:

> "Si dos rectas L_1 y L_2 tienen la misma pendiente, entonces son paralelas."
>
> $$L_1 \parallel L_2 \longleftrightarrow m_1 = m_2$$

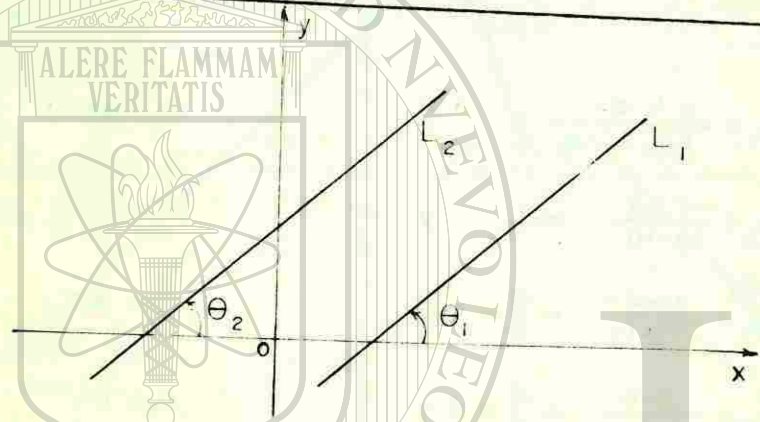


Fig. 10.

La demostración es inmediata, puesto que si dos rectas tienen la misma pendiente, tienen la misma inclinación y por lo tanto, son paralelas. O sea que, si $m_1 = m_2$ se concluye que $\tan\Theta_1 = \tan\Theta_2$, lo que implica que $\Theta_1 = \Theta_2$; en virtud de que la inclinación de una recta está restringida a $0° \leq \Theta < 180°$ y porque existe un sólo ángulo que satisface esta desigualdad Entonces, como $\Theta_1 = \Theta_2$, $L_1 \parallel L_2$.

> "Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario."
>
> $$L_1 \perp L_2 \longleftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$
>
> o bien,
>
> $$L_1 \perp L_2 \longleftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

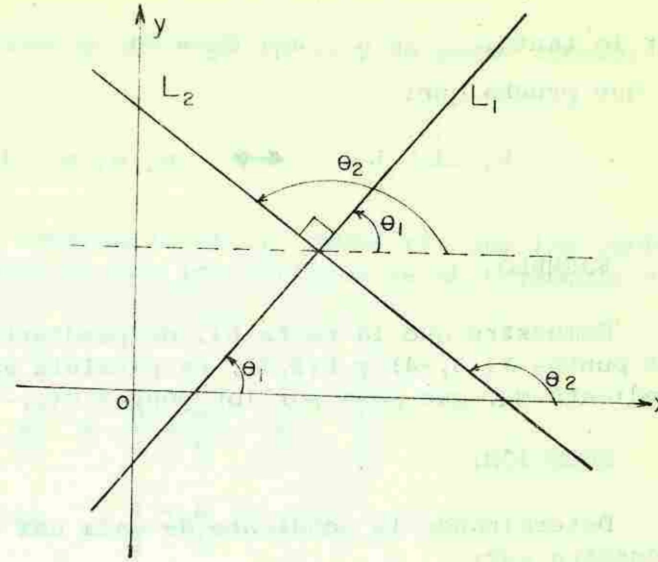


Fig. 11.

Para demostrar el teorema anterior, supongamos que L_1 y L_2 son perpendiculares entre sí y que sus inclinaciones respectivas son Θ_1 y Θ_2 (figura 11). Por el punto de intersección de L_1 y L_2 trazamos una interrumpida L, paralela al "eje X"; entonces Θ_1 y Θ_2 son los ángulos acotados en la figura 11 con:

$$\Theta_2 - \Theta_1 = 90°$$

o bien,
$$\Theta_2 = \Theta_1 + 90°$$

y consecuentemente $\tan\Theta_2 = \tan(\Theta_1 + 90°)$

como $\tan(\Theta_1 + 90°) = -\cot\Theta_1$

resulta $\tan\Theta_2 = -\cot\Theta_1$

$$= -\frac{1}{\tan\Theta_1}$$

o sea,
$$m_2 = -\frac{1}{m_1}$$

por lo tanto, $m_1 \; m_2 = -1$

lo que prueba que:

$$L_1 \perp L_2 \quad \longleftrightarrow \quad m_1 \, m_2 = -1$$

EJEMPLO 1.

Demuestre que la recta L_1, de pendiente m_1, que pasa por los puntos A(-3,-4) y B(2,7), es paralela a la recta L_2, de pendiente m_2, que pasa por los puntos C(1,-9) y D(6,2).

SOLUCIÓN:

Determinando la pendiente de cada una de las rectas, se encuentra que:

$$\text{Pendiente de AB} = m_1 = \frac{7+4}{2+3} = \frac{11}{5}$$

$$\text{Pendiente de CD} = m_2 = \frac{2+9}{6-1} = \frac{11}{5}$$

y como $m_1 = m_2$, $L_1 \parallel L_2$.

EJEMPLO 2.

Demuestre que la recta L_1, de pendiente m_1, que pasa por los puntos A(-2,-4) y B(1,3), es perpendicular a la recta L_2, de pendiente m_2, que pasa por los puntos C(3,2) y D(-4,5).

SOLUCIÓN:

Determinando la pendiente de cada una de las rectas, se encuentra que:

$$\text{Pendiente de AB} = m_1 = \frac{3+4}{1+2} = \frac{7}{3}$$

$$\text{Pendiente de CD} = m_2 = \frac{5-2}{-4-3} = -\frac{3}{7}$$

y como estas pendientes son recíprocas y de signo contrario, $L_1 \perp L_2$.

EJEMPLO 3.

Aplicando el teorema anterior, demostrar que los puntos A(8,6), B(4,8) y C(2,4) son los vértices de un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN:

$$\text{Pendiente de AB} = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pendiente de BC} = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

y como la pendiente de AB es el recíproco con signo contrario de la pendiente de BC, estos dos lados del triángulo son perpendiculares.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Hallar la pendiente de las rectas que unen los pares de puntos siguiente:

1.- (3,4), (1,-2)

2.- (-5,3), (2,-3)

3.- (6,0), (6, $\sqrt{3}$)

4.- (1,3), (7,1)

5.- (2,4), (-2,4)

6.- (3,-2), (3,5)

7.- (2,4), (3,5)

8.- (1,-3), (2,6)

9.- (-3,-3), (-4,2)

10.- (-3,4), (5,4)

Hallar la inclinación de las rectas que unen los pares de puntos siguientes:

11.- (-4,-3), (-5,-2)

16.- (2, $\sqrt{3}$), (1,0)

12.- (3,2), (5,6)

13.- (-2,5), (-1,3)

14.- (2,-5), (-3,-1)

15.- (4,6), (1,3)

17.- (2,3), (1,4)

18.- (3,-2), (3,5)

19.- ($\sqrt{3}$,2), (0,1)

20.- (2,4), (-2,4)

Aplicando el concepto de pendiente, averiguar cuáles de los puntos siguientes son colineales.

21.- (2,3), (-4,7) y (5,8)

22.- (4,1), (5,-2) y (6,-5)

23.- (-1,-4), (2,5) y (7, -2)

24.- (0,5), (5,0) y (6,-1)

25.- (-2,1), (3,2) y (6,3)

26.- Determine que la recta L_1 de pendiente m_1 que pasa por los puntos A(1,6) y B(-1,2) es paralela o perpendicular a la recta L_2, de pendiente m_2, que pasa por los puntos C(-7,0) y D(1,-4).

27.- Determine que la recta L_1, de pendiente m_2, que pasa por los puntos A(3,0) y B(0,2) es paralela o perpendicular a la recta L_2, de pendiente m_2, que pasa por los puntos C(6,0) y D(0,4).

Aplicando el concepto de pendiente, demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un triángulo rectángulo.

28.- (6,5), (1,3) y (5, -7)

29.- (3,2), (5,-4) y (1,-2)

30.- (2,4), (4,8) y (6,2)

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- 3

2.- 2

3.- 11

4.- 11

5.- 3

6.- 17

7.- 4

8.- 7

9.- 4

10.- 2

11.- 10

12.- 5

13.- 9 $\sqrt{2}$

14.- 10

15.- $\sqrt{37}$

16.- $\sqrt{85}$

17.- 2 $\sqrt{10}$

18.- $\sqrt{10}$

19.- 2 $\sqrt{5}$

20.- 4

21.- (4,2)

22.- (6,8)

23.- (9/2, 3/2)

24.- (3,2)

25.- (2,-2)

26.- (5/2, 1/2)

27.- (2, -3/2)

28.- (17/2, 9/2)

29.- (0,1)

30.- (2, -3)

31.- $(AB)^2= (BC)^2+ (AC)^2$

32.- AB =CD=$\sqrt{2}$; BC=DA= 2 $\sqrt{5}$

33.- AC = BC = $\sqrt{17}$

34.- AB = BC = AC = 4 $\sqrt{2}$

35.- AB $\neq$ BC $\neq$ AC

36.- AB + AC = BC

37.- (-1,3)

38.- (1, -2)

39.- (0,-4)

40.- AB=CD= $\sqrt{68}$; AC=BD= $\sqrt{274}$ y sus diagonales cortan por (-9/2,-3/2)

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.-	3	16.-	60°
2.-	-6/7	17.-	135°
3.-	∞	18.-	90°
4.-	- 1/3	19.-	30°
5.-	0	20.-	0°
6.-	∞	21.-	No
7.-	1	22.-	Si
8.-	9	23.-	Nó
9.-	-5	24.-	Si
10.-	0	25.-	No
11.-	135°	26.-	Perpendiculares
12.-	63°	27.-	Paralelas.
13.-	117°		
14.-	141°		
15.-	45°		

4o. SEMESTRE. AREA II. UNIDAD X.

LA LINEA RECTA.

PARTE II.

En la unidad anterior hacíamos referencia a la línea recta acerca de varios ejemplos. En realidad, la línea recta tiene gran importancia en todos los medios. Así, por ejemplo, los carpinteros y aserraderos emplean, para trazar rectas sobre la madera, un cordel bien estirado impregnado de una materia colorante que se hace vibrar a lo largo de las piezas o troncos que se quieren aserrar. Los jardineros tienden un cordel entre dos estacas para guiarse en los surcos o plantíos que quieren hacer en línea recta. Los albañiles se sirven también de un cordel tendido a lo largo de las paredes que construyen, para asegurarse que dichas paredes suben verticalmente.

En general, la línea recta es el camino más corto entre dos puntos y, analíticamente hablando, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables, es una recta.

En esta unidad aprenderás a representar gráficamente cualquier línea recta y estarás en condición de representar su ecuación en cualquiera de sus formas equivalentes.

OBJETIVOS:

1.- Construir correctamente la gráfica de una recta, dados un punto y la pendiente.

2.- Determinar la ecuación de la línea recta, dados un punto y la pendiente.

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.-	3	16.-	60°
2.-	-6/7	17.-	135°
3.-	∞	18.-	90°
4.-	- 1/3	19.-	30°
5.-	0	20.-	0°
6.-	∞	21.-	No
7.-	1	22.-	Si
8.-	9	23.-	Nó
9.-	-5	24.-	Si
10.-	0	25.-	No
11.-	135°	26.-	Perpendiculares
12.-	63°	27.-	Paralelas.
13.-	117°		
14.-	141°		
15.-	45°		

LA LINEA RECTA.

PARTE II.

En la unidad anterior hacíamos referencia a la línea recta acerca de varios ejemplos. En realidad, la línea recta tiene gran importancia en todos los medios. Así, por ejemplo, los carpinteros y aserraderos emplean, para trazar rectas sobre la madera, un cordel bien estirado impregnado de una materia colorante que se hace vibrar a lo largo de las piezas o troncos que se quieren aserrar. Los jardineros tienden un cordel entre dos estacas para guiarse en los surcos o plantíos que quieren hacer en línea recta. Los albañiles se sirven también de un cordel tendido a lo largo de las paredes que construyen, para asegurarse que dichas paredes suben verticalmente.

En general, la línea recta es el camino más corto entre dos puntos y, analíticamente hablando, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables, es una recta.

En esta unidad aprenderás a representar gráficamente cualquier línea recta y estarás en condición de representar su ecuación en cualquiera de sus formas equivalentes.

OBJETIVOS:

1.- Construir correctamente la gráfica de una recta, dados un punto y la pendiente.

2.- Determinar la ecuación de la línea recta, dados un punto y la pendiente.

3.- Expresar bajo el objetivo 2, la ecuación de la línea recta en cualquiera de las formas conocidas.

4.- Determinar, dadas un par de ecuaciones de líneas recta cuándo son paralelas, coincidentes o superpuestas y co tantes, sin necesidad de graficar.

5.- Encontrar correctamente la distancia de un punto a una recta, dados el punto y la ecuación.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1.- Para resolver la unidad, estudia la lección 2, del capi tulo II. Es importante, para resolver la unidad, que hayas aprendido a excelencia la unidad anterior, ya que contínuamente vamos a usar el concepto de pendiente y la fórmula de la distancia entre dos puntos; por lo que te sugerimos vuelvas a repasar, en caso de que exista alguna duda, la unidad anterior, pregúntandole a tu ase sor la duda que tengas.

Para el objetivo 1, te recomendamos resuelvas la auto-evaluación 1 en papel cuadriculado o en hojas de papel milimétrico.

Para los objetivos 2, 3 y 4 lee y estudia los ejemplos que se exponen en el libro antes de contestar la auto-evaluación 2. En el objetivo 3 recuerda que las formas pueden ser: a) punto-pendiente, b) común, c) intersec-ción con los ejes o forma simétrica y d) en forma gene-ral.

Para el objetivo 5 resuelve la autoevaluación 3, fiján-dote detenidamente en los ejemplos, para que, observes cuándo el punto queda abajo o arriba de la recta sin ne cesidad de graficar.

2.- Como autoevaluación de la unidad, resuelve la autoeva-luación de la lección, volviendo a estudiar aquellos

objetivos en que hayas salido mal al resolver los pro-blemas.

LA LÍNEA RECTA.
(CONTINUACIÓN).

LECCIÓN 2.

2-7 INTRODUCCIÓN.

Fue Renato Descartes (1596-1650) quien, al publicar en 1637 su obra "La Geometrie", puso los cimientos de la Geometría Analítica. Es por ello por lo que a veces, en memoria de su fundador, se le denomina geometría "cartesiana"; en resumidas cuentas, es el estudio de la geometría mediante un sistema de coordenadas que lleva asociada un álgebra.

Existen dos problemas fundamentales en la Geometría Analítica:

1º Dada una ecuación en "x" e "y", dibujar su gráfica o representarla geométricamente como un conjunto de puntos en el plano.

2º Dado un conjunto de puntos en el plano, relacionados -por ciertas condiciones geométricas, encontrar una ecuación cuya representación gráfica corresponda enteramente a aquellos puntos.

Este segundo problema es conocido geométricamente con el nombre de "problema de los lugares geométricos". Un lugar geométrico es en geometría lo análogo a una relación en álgebra y lo definiremos de la siguiente forma:

"Un lugar geométrico es un subconjunto del conjunto de los puntos del plano".

Un lugar geométrico está definido por condiciones geométricas, expresadas generalmente mediante palabras. Si P representa un punto arbitrario del plano, los siguientes ejemplos nos definen diversos lugares geométricos.

a) { P/P está a una distancia r constante del punto C }; el lugar es una circunferencia del radio r y centro C.

b) { P/PA = PB, siendo A y B puntos fijos }; es el lugar de la mediatriz del segmento AB.

El problema que se nos plantea cuando definen un lugar geométrico es encontrar una ecuación cuya representación gráfica corresponda con lo definido. A esta ecuación se le denomina "ecuación del lugar". Una vez encontrada dicha ecuación, estudiaremos sus propiedades algebráicas y deduciremos de ellas las propiedades del lugar.

Hemos estudiado los conceptos de distancia entre dos puntos, coordenadas del punto medio y pendiente de una recta, cuando han sido definidas mediante coordenadas relativa a un

sistema rectangular de ejes. Vamos a considerar a continuación algunos problemas que guardan cierta relación con lo dicho anteriormente.

2-8 LA LÍNEA RECTA.

Una línea recta, analíticamente, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico, cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta.

Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos, en un punto y su dirección (pendiente o inclinación), etc.

EJEMPLO

Construya la gráfica de la recta que pasa por el punto $P_1(2,1)$: a) con pendiente $2/3$; b) con pendiente $-2/3$.

SOLUCIÓN:

a) La ecuación:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

establece que la pendiente de una recta no vertical es igual a la diferencia de ordenadas entre dos puntos de la recta, dividida por la diferencia de sus abscisas tomadas en el mismo orden; por consiguiente, se puede ir del punto dado $P_1(2,1)$ a un segundo punto P_2 de la recta, avanzando 3 unidades hacia la derecha de P_1 y 2 hacia arriba, localizándose así un segundo punto P_2 (5,3) que también pertenece a la recta fig. 12.

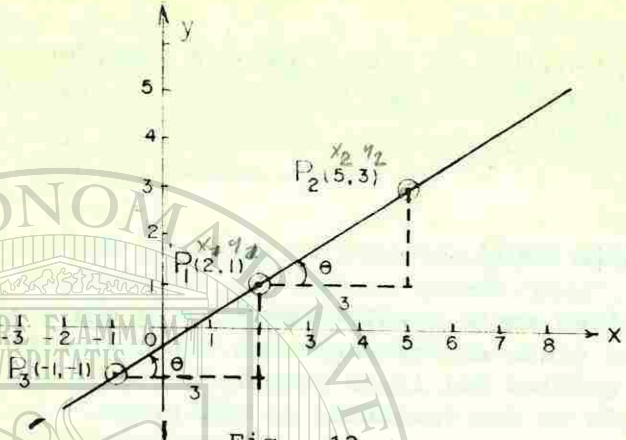


Fig. 12.

La gráfica pedida es la recta que pasa por P_1 y P_2 puesto que pasa por $P_1(2,1)$ y tiene la pendiente deseada, lo que es fácil comprobar por qué:

$$m = \frac{3 - 1}{5 - 2} = \frac{2}{3}$$

b) Localice un segundo punto P_2 de la recta que va a pasar por $P_1(2,1)$, avanzando 3 unidades a la derecha de este punto y 2 unidades hacia abajo, el punto localizado es el $P_2(5,-1)$, fig. 13.

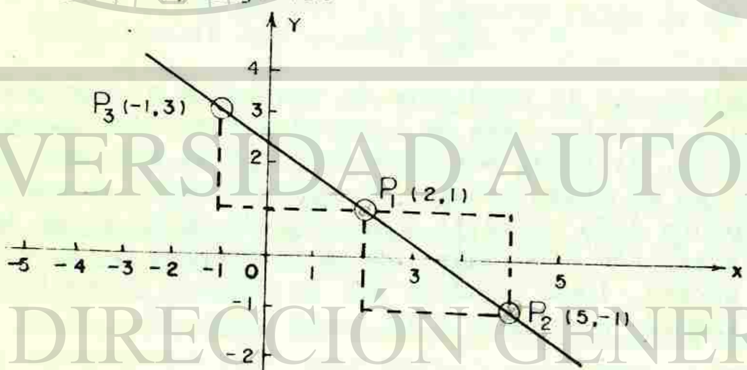


Fig. 13.

Note que se llega igualmente a P_2 bajando primeramente 2 unidades a partir de P_1 y después yendo 3 unidades hacia la derecha. Como comprobación, se calcula la pendiente de la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2:

$$m = \frac{-1 - 1}{5 - 2} = \frac{-2}{3}$$

AUTOEVALUACION 1.

En cada uno de los siguientes problemas construya la recta que pasa por el punto dado y que tiene la pendiente que se especifica.

1.- $(-1, 2)$, $m = 1/5$

2.- $(4, 0)$, $m = -3$

3.- $(-3,-2)$, $m = 4/5$

4.- $(2,4)$, $m = -1$

5.- $(-2,3)$, $m = 0$

6.- $(0,5)$, $m = 2$

7.- $(1,-3)$, $m = -1$

8.- $(3,4)$, $m = 2/3$

9.- $(0,4)$, $m = -1/2$

10.- $(3,-4)$, $m = -3/2$

2-9 FORMAS DE LA ECUACION DE LA RECTA.

Si una recta L es paralela al "eje Y" (fig. 14), todos los puntos de L tienen la misma abscisa; si esta abscisa es "a", entonces el punto $P(x,y)$ pertenece a L si,

$$x = a$$

o sea, que L es la gráfica de la relación:

$$\{(x, y) \mid x = a\}$$

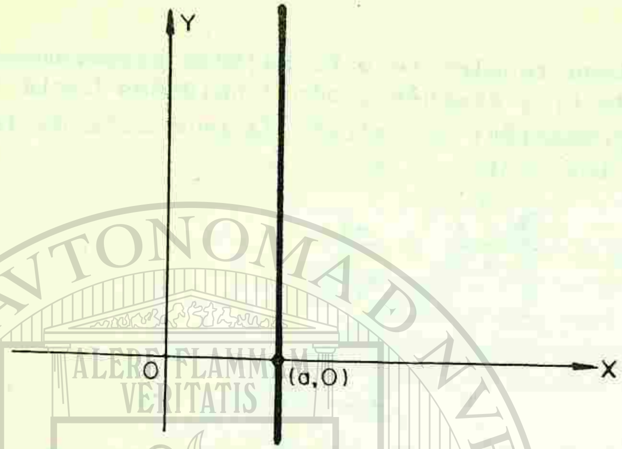


FIG.- 14

Si una recta L no vertical que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$ con pendiente "m" (fig. 15), y que el punto P (x,y) sea otro

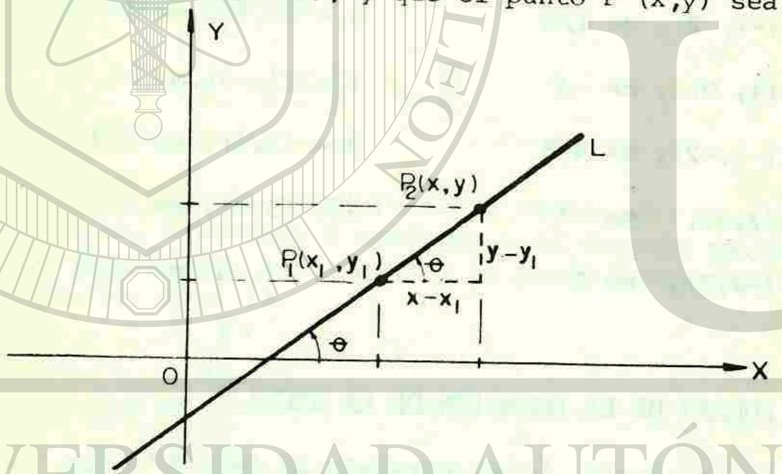


FIG.- 15

punto cualquiera de la recta diferente de P_1; entonce P (x,y) pertenece a L si la pendiente del segmento PP_1 es "m", o sea:

P(x,y) pertenece a L $\longleftrightarrow$ la pendiente PP_1 es "m"

o también:

P(x,y) pertenece a L $\longleftrightarrow \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Como L no es vertical, $x \neq x_1$, por lo que para todo P(x,y) diferente de $P_1(x_1, y_1)$, la ecuación

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

se puede escribir como sigue:

P (x,y) pertenece a L $\longleftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

y se puede observar ahora que la afirmación anterior, sigue siendo válida cuando se suprime la restricción de que P debe ser diferente de P_1; así, esta ecuación nos dice que la recta L que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente "m", es la gráfica de la relación:

$$\{(x,y) \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$$

o sea que L es la gráfica de la ecuación:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

A esta forma de la ecuación de una recta que pasa por un punto con una pendiente determinada se le llama "forma de punto y pendiente" de la ecuación de la recta.

Y si una recta L es paralela al "eje X", (m=0), fig. 16, todo punto de L tiene la misma ordenada; si esta ordenada es "b", entonces el punto P (x,y) pertenece a L si, y = b

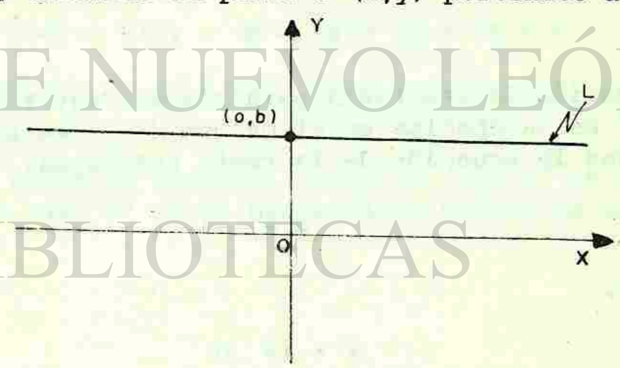


Fig. 16.

o sea que L es la gráfica de la relación:

$$\{(x, y) \mid y = b\}$$

EJEMPLO 1.

Encuentre la ecuación de la recta que satisface las condiciones dadas:

a) Paralela al "eje X" (horizontal) que intersecta al "eje Y" en el punto (0,3).

b) Paralela al "eje Y" (vertical) que intersecta al "eje X" en elpunto (-1, 0)

c) Que pasa por el punto $P_1(-4,3)$ y tenga de pendiente 1/2

d) Que pasa por los puntos $P_1(4,6)$ y $P_2(-1,3)$.

SOLUCIÓN:

a) La ecuación de una recta paralela al "eje X" es y=b; donde "b" es la ordenada en el origen (en este caso, b=3), entonces, la ecuación pedida es:

$$y = 3$$

o bien,

$$y - 3 = 0$$

b) La ecuación de una recta paralela al "eje Y" es x=a; donde "a" es la abscisa en el origen (en este caso, a=-1), entonces la ecuación de la recta pedida es:

$$x = -1$$

o bien,

$$x + 1 = 0$$

c) Con $x_1 = -4$, $y_1 = 3$, $m = 1/2$ y aplicando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se obtiene que:

$$y - 3 = 1/2\,[x - (-4)]$$

es decir, $$y - 3 = 1/2\,(x + 4)$$

multiplicando toda la ecuación por 2,

$$2y - 6 = x + 4$$

o bien, $$x - 2y + 10 = 0$$

d) Usando la ecuación $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se encuentra que la pendiente es 3/5.

Aplicando ahora $y - y_1 = m(x - x_1)$, con $m = 3/5$, $x_1 = 4$ y $y_1 = 6$, se tiene:

$$y - 6 = 3/5\,(x-4)$$

multiplicando la ecuación por 5,

$$5y - 30 = 3(x - 4)$$

es decir, $$5y - 30 = 3x - 12$$

o bien, $$3x - 5y + 18 = 0$$

Se puede comprobar esta respuesta mostrando que las coordenadas de $P_1(4,6)$ y $P_2(-1,3)$, satisfacen la ecuación obtenida:

$$3(4) - 5(6) + 18 = 12 - 30 + 18 = 0$$

y $$3(-1) - 5(3) + 18 = -3 - 15 + 18 = 0$$

Toda recta no vertical corta al "eje Y" en el punto B(0,b), en que "b" es la ordenada al origen de la recta (fig. 17).

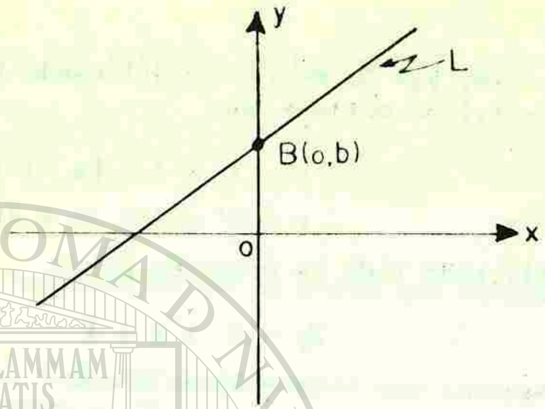


Fig. 17.

Aplicando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se encuentra que la ecuación de la recta L que pasa por B(o,b) con pendiente "m" es:

$$y - b = m(x - 0)$$

es decir,

$$y - b = mx$$

o bien,

$$\underline{y = mx + b}$$

que es la <u>"forma común"</u> de la ecuación de la recta.

EJEMPLO 2.

Encontrar la ecuación de la recta, cuya ordenada en el origen es 2 y cuya pendiente es -3.

SOLUCIÓN:

Con b= 2, m= -3 y aplicando la ecuación y= mx + b, se obtiene que la ecuación pedida es:

$$y = -3x + 2$$

o bien,

$$3x + y - 2 = 0$$

Supóngase ahora que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ son, respectivamente, la abscisa y la ordenada en el origen de una recta L (Fig. 18)

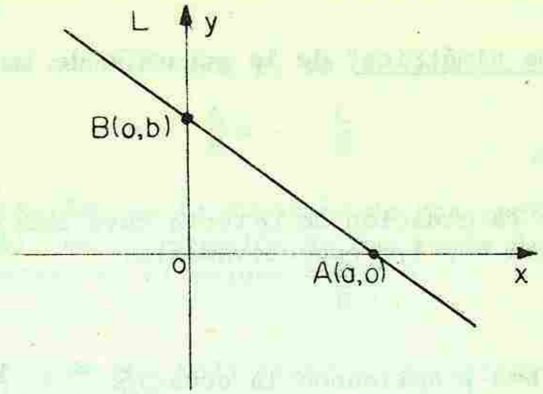


Fig. 18.

O sea que L pasa por los puntos A(a,0) y B(0,b). Usando

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

para encontrar la pendiente de la recta que pasa por estos puntos, se tiene que:

$$m = \frac{b - 0}{0 - a}$$

$$= -\frac{b}{a}$$

si m = - b/a y la ordenada en el origen es "b", entonces, aplicando la ecuación de la recta en "forma común", y= mx+b, obtenemos:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

multiplicando la ecuación por "a":

$$ay = -bx + ab$$

es decir,

$$bx + ay = ab$$

y finalmente, dividiendo la ecuación por "ab", nos queda:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

que es la "forma simétrica" de la ecuación de la recta.

EJEMPLO 3.

Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 4 y 3, respectivamente.

SOLUCIÓN:

Con a=4, b=3 y aplicando la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ se obtiene que la ecuación pedida es:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

Ya se ha visto que la ecuación $y= mx + b$, que es una ecuación de primer grado en "x" y "y", tiene como gráfica una recta no vertical; consecuentemente, se demuestra que la ecuación en "forma general" de primer grado en dos variables es:

$$Ax + By + C = 0$$

en donde A, B y C son números reales arbitrarios, con la sola condición de que A y B no sean simultáneamente nulos. Entonces podemos enunciar el siguiente teorema:

> "La gráfica de toda ecuación de primer grado en dos variables de la forma
>
> $$Ax + By + C = 0$$
>
> o sea la gráfica de la relación:
>
> $$\{(x, y) \mid Ax + By + C = 0\}$$
>
> es una recta".

Demostración. Si $B \neq 0$, la ecuación $Ax + By + C = 0$ se puede escribir como:

$$By = -Ax - C$$

dividiendo esta ecuación por B, se obtiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

que por comparación con la ecuación de una recta en forma común ($y= mx + b$), es la ecuación de una recta de pendiente $-\frac{A}{B}$ y de ordenada en el origen $-\frac{C}{B}$.

Se ve entonces que toda ecuación de primer grado en dos variables es la ecuación de una recta; para construir su gráfica es suficiente, en virtud de que dos puntos determinan una recta, encontrar dos pares ordenados de números reales que satisfagan la ecuación, construir las gráficas de esas parejas y hacer pasar una recta por los dos puntos así obtenidos. Como precaución, es aconsejable construir la gráfica de un tercer par ordenado que también satisfaga la ecuación y comprobar que los tres puntos están en línea recta.

Como resumen, establecemos las siguientes formas de la ecuación de una recta:

a) Punto-pendiente. La ecuación de la recta que pasa por punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente es "m" es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

b) Común. La ecuación de la recta de pendiente "m" y corta al "eje Y" en el punto (0,b) siendo "b" la ordenada en el origen, es:

$$y = mx + b$$

c) Simétrica. La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados "x" y "y" en los puntos (a, 0), siendo "a" la abscisa en el origen, y (0,b), siendo "b" la ordenada en el origen, respectivamente, es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

d) <u>General.</u> Una ecuación lineal o de primer grado en las variables "x" y "y" es de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

en donde A, B y C son constantes arbitrarias. La pendiente de la recta escrita en esta forma es:

$$m = -\frac{A}{B}$$

y su ordenada en el origen es:

$$b = -\frac{C}{B}.$$

EJEMPLO 4.

a) Construya la gráfica de la recta cuya ecuación es $3x - 4y + 12 = 0$.

b) Escriba la ecuación de la recta en la forma común y a partir de ésta determine su pendiente y su ordenada en el origen.

c) Dé el dominio y el recorrido (o alcance) de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 3x - 4y + 12 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

a) Para construir su gráfica es suficiente encontrar dos pares ordenados que satisfagan la ecuación, en este caso conviene usar las coordenadas en el origen de la recta: en donde la abscisa en el origen se encuentra haciendo en la ecuación la y=0, entonces:

$$3x - 4y + 12 = 0$$

sustituyendo, $\quad 3x - 4(0) + 12 = 0$

o bien, $\quad 3x = -12$

y despejando, $\quad x = -12/3$

$$x = -4$$

o sea, el punto en que la recta corta al "eje X" es P (-4, 0); y la ordenada en el origen se encuentra haciendo en la ecuación la x = 0, entonces en forma semejante se obtiene y = 3 como ordenada en el origen, o sea el -- punto en que corta la recta al "eje Y" es $P_2(0,3)$. Para encontrar un tercer punto hacemos, por ejemplo, x=4, lo que implica que la y=6 para satisfacer la ecuación; a continuación se grafican los puntos $P_1(-4,0)$ y $P_2(0,3)$, se traza la recta L definida por ellos y se observa que $P_3(4,6)$ pertenece a la recta (fig. 19).

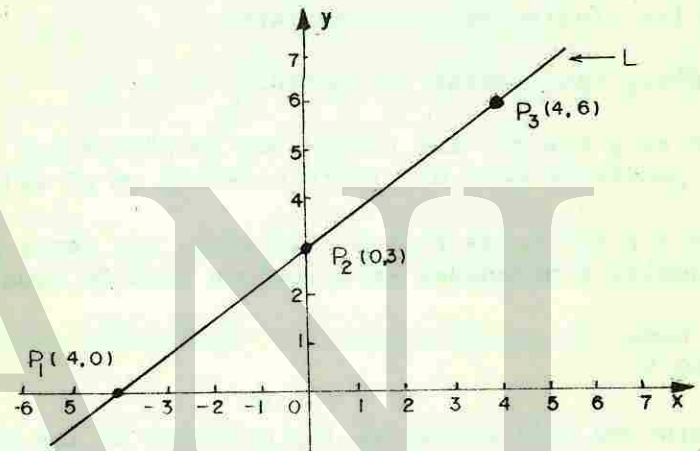


Fig. 19.

b) Para escribir la ecuación en la forma común, (y=mx+b), tenemos que despejar "y" de la ecuación dada, o sea, si

$$3x - 4y + 12 = 0$$

entonces, $\quad y = 3/4\ x + 3$

en donde su pendiente m = 3/4 y su ordenada en el origen es b= 3; esta última ya había sido encontrada en el inciso a).

c) Para la relación R especificada se ve que:
Dominio de R= $(-\infty; +\infty)$, recorrido de R = $(-\infty; +\infty)$.

Sabemos que dos rectas en un plano, o bien se cortan en un punto, o son paralelas o están superpuestas. Supongamos que están dadas por las ecuaciones lineales:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad y \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

con $B_1 \neq 0$ y $B_2 \neq 0$; las gráficas de estas ecuaciones se cortan, o son paralelas o coinciden. Podemos determinar cuál es el caso escribiendo las ecuaciones dadas en la forma común:

$$y = m_1x + b_1, \qquad y = m_2x + b_2$$

y haciendo las siguientes observaciones:

a) Si $m_1 \neq m_2$, las rectas se cortan.

b) Si $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$, las rectas son paralelas por tener igual pendiente pero diferente ordenada en el origen.

c) Si $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$ las rectas coinciden, por tener pendientes iguales y ordenadas en el origen también iguales.

EJEMPLO 5.

Determine en cada inciso si las gráficas de las diferentes pares de ecuaciones, se cortan; en caso afirmativo, determine las coordenadas de su punto de intersección.

a) $2x - y = -4$ $3x + y = 9$	b) $4x+3y = 12$ $8x+6y = 18$	c) $2x+3y = 6$ $4x+6y = 12$

SOLUCIÓN:

a) Escribiendo las ecuaciones dadas en la forma común, se obtiene:

$$y = 2x + 4$$
$$y = -3x + 9$$

En este caso $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$, o sea que $m_1 \neq m_2$ y las líneas se cortan; las coordenadas del punto de intersección se obtienen resolviendo como simultáneas por cualquier método de eliminación las ecuaciones.

$$2x - y = -4$$
$$3x + y = 9$$

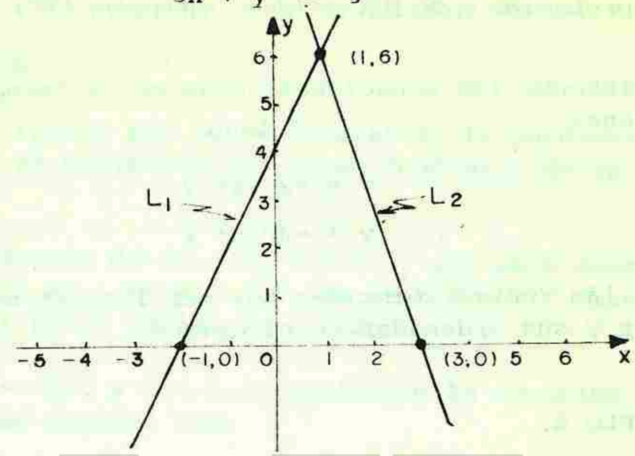


Fig. 20.

Por ejemplo, resolviendo por suma y resta, se tiene:

$$\begin{array}{r} 2x - y = -4 \\ 3x + y = 9 \\ \hline 5x \quad = 5 \end{array}$$

finalmente, $x = 1$

Sustituyendo este valor de "x" en cualquiera de las ecuaciones se encuentra que y=6. Entonces la solución es el par ordenado (1,6), del cual se puede observar que satisface ambas ecuaciones.

b) Escribiendo las ecuaciones dadas en la forma común, se obtiene:

$$y = -4/3x + 4$$
$$y = -4/3x + 3$$

En este caso $m_1 = -4/3$, $m_2 = -4/3$, $b_1 = 4$ y $b_2 = 3$; por consiguiente las rectas son paralelas. (Se deja al estudiante la comprobación gráfica de este inciso).

c) Escribiendo las ecuaciones dadas en la forma común, se obtiene:

$$y = -2/3x + 2$$
$$y = -2/3x + 2$$

Aquí las rectas coinciden por ser iguales entre sí sus pendientes y sus ordenadas en el origen.

EJEMPLO 6.

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-3) y es paralela a la recta que une los puntos (4,1) y (-2,2).

SOLUCIÓN:

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente. Entonces, la pendiente de la ecuación de la recta pedida es igual a la pendiente de la recta que pasa por (4,1) y (-2,2) o sea, la pendiente de la recta que une los puntos (4,1) y (-2,2) es

$$m = \frac{2-1}{-2-4} = -\frac{1}{6}$$

Por lo tanto, con $m = -1/6$ y $P_1(2,-3)$, aplicando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene:

$$y + 3 = -1/6(x-2)$$

simplificando, $x + 6y + 16 = 0$

que es la ecuación de la recta pedida.

EJEMPLO 7.

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

SOLUCIÓN:

Si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

La pendiente de $2x - 3y + 6 = 0$, que está escrita en la forma general $Ax + By + C = 0$, es $-A/B = 2/3$, luego la pendiente de la recta pedida es $-3/2$.

Con $m = -3/2$ y $P_1(-2,3)$ aplicando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene que:

$$y - 3 = -3/2\,(x+2)$$

simplificando, $3x + 2y = 0$

que es la ecuación de la recta pedida.

AUTOEVALUACION 2.

En cada uno de los problemas del 1 al 10 construya la gráfica de la relación que se da.

1.- $\{(x,y) \mid y - 4 = 0\}$ 6.- $\{(x,y) \mid 2x - 3y - 6 = 0\}$

2.- $\{(x,y) \mid x + 3 = 0\}$ 7.- $\{(x,y) \mid 3x + 2y + 6 = 0\}$

3.- $\{(x,y) \mid y = 2x\}$ 8.- $\{(x,y) \mid 2x + y - 5 = 0\}$

4.- $\{(x,y) \mid 2x + 7 = 0\}$ 9.- $\{(x,y) \mid x - 2y - 5 = 0\}$

5.- $\{(x,y) \mid x/5 - y/4 = 1\}$ 10.- $\{(x,y) \mid x/3 + y/2 = 1\}$

En cada uno de los problemas del 11 al 30 encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto dado con la pendiente que se indica, o por los dos puntos dados.

11.- $(-2, 1)$; $m = 3$	21.- $(2,1)$; $(-1,2)$
12.- $(0,0)$; $m = 5$	22.- $(0,0)$; $(-3,2)$
13.- $(-1, 2)$; $m = 3/4$	23.- $(2,-3)$; $(4,2)$
14.- $(3,-2)$; $m = 2/3$	24.- $(-4,1)$; $(3,-5)$
15.- $(-4,5)$; $m = -2$	25.- $(7,0)$; $(0,4)$
16.- $(0,2)$; $m = 3$	26.- $(0,0)$; $(5,-3)$
17.- $(0,-3)$; $m = -2$	27.- $(5,-3)$; $(5,2)$
18.- $(0,4)$; $m = 1/3$	28.- $(-5,2)$; $(3,2)$
19.- $(0,-1)$; $m = 0$	29.- $(-1,3)$; $(7,4)$
20.- $(0,3)$; $m = -4/3$	30.- $(-3,4)$; $(1,-2)$

En cada uno de los problemas del 31 al 38 encuentre las coordenadas en el origen y la pendiente de cada recta.

31.- $3x+4y-12 = 0$	35.- $4x- y = 0$
32.- $3x-2y+6 = 0$	36.- $7x + 3y + 21 = 0$
33.- $2x - y -4 = 0$	37.- $5x + 2y + 10 = 0$
34.- $3x + y + 3 = 0$	38.- $x + 3y - 6 = 0$

En cada uno de los problemas del 39 al 44 determina si las gráficas de las ecuaciones dadas se cortan; en caso afirmativo, encuentre las coordenadas del punto de intersección.

39.- $x + 2y = 8$
$x - 3y = -7$

40.- $6x - 3y = 2$
$2x - y = -1$

41.- $2x - 3y = 6$
$x + y = -2$

42.- $2x - y = -5$
$4x + 3y = -5$

43.- $x + 5y = 16$
$3x - 2y = -3$

44.- $2x + y = 10$
$x - y = -1$

45.- Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2)$ y es paralela a la recta $3x - 2y + 6 = 0$

46.- Encuentra la ecuación de la recta de abscisa en el origen $-3/7$ y que es perpendicular a la recta $3x + 4y - 10= 0$.

47.- Encuentra la ecuación de la perpendicular a la recta $2x+ 7y - 3 = 0$ en su punto de intersección con $3x - 2y+8=0$.

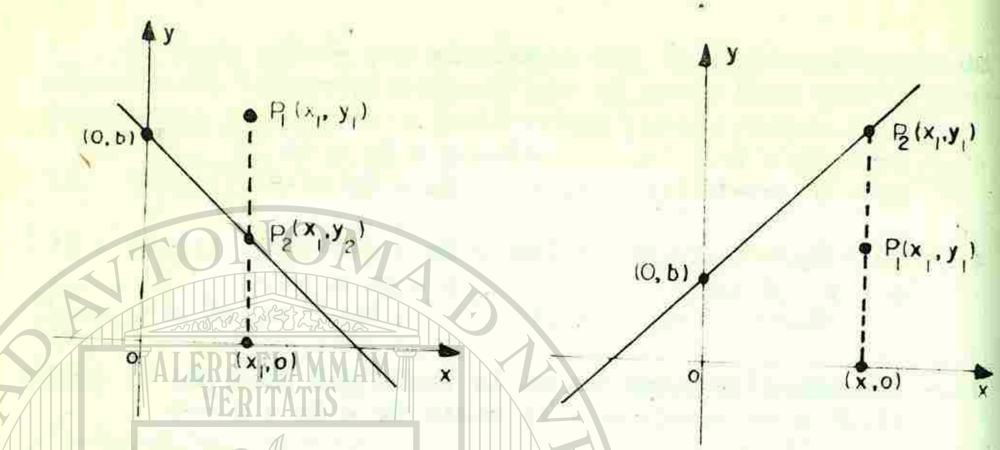
48.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-3,-5)$ y $(4,7)$; y diga si el punto $(1,1)$ pertenece a dicha recta.

49.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 1 = 0$ y $x+2y-4=0$ y que es perpendicular a $3x - y - 4 = 0$.

50.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 2 = 0$ y $5x+6y-4=0$ y que es paralela a $4x + y + 7 = 0$

2-10 DESIGUALDADES LINEALES EN DOS VARIABLES.

En la sección anterior se vió que toda recta no vertical es la gráfica de una ecuación de la forma $y= mx + b$, en la que "m" es la pendiente de la recta L y "b" su ordenada en el origen. Considere ahora dos puntos de igual abscisa P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_1, y_2), este último sobre la recta L; con ayuda de la fig. 21 (a) se ve que P_1 está arriba de L $\rightarrow y_1>y_2$,



(a)

(b)

Fig. 21.

o, como $y_2 = mx_1 + b$,

P_1 está arriba de L $\longleftrightarrow$ $y_1 > mx_1 + b$

Análogamente, de la fig. 21 (b) se ve que:

P_1 está debajo de L $\longleftrightarrow$ $y_1 < y_2$,

o sea;

P_1 está debajo de L $\longleftrightarrow$ $y_1 < mx_1 + b$

Ahora bien, como de la definición de gráfica de una ecuación P está sobre L $\longleftrightarrow$ $y = mx + b$, de donde ha quedado demostrado el siguiente teorema:

"El punto $P_1(x_1, y_1)$ está arriba de la gráfica de $y=mx+b$, si,

$$y_1 > mx_1 + b$$

y está debajo de ella, si,

$$y_1 < mx_1 + b."$$

Como consecuencia del teorema anterior, se ve que toda recta L no vertical, que es la gráfica de,

$$R_1 = \{(x,y) \mid y = mx + b\}$$

divide el plano coordenado en dos partes, que son las gráficas de las relaciones:

$R_2 = \{(x,y) \mid y > mx + b\}$ y $R_3 = \{(x,y) \mid y < mx + b\}$.

La gráfica de R_2 está formada por todos los puntos que quedan "arriba" de L y la de R_3 por el conjunto de puntos situados "debajo" de L; cada una de las gráficas de R_2 y R_3, se designa con el nombre de "semiplano".

Si L es una línea vertical que es la gráfica de $\{(x,y) \mid x = a\}$, entonces el semiplano de la " derecha " es la gráfica $\{(x,y) \mid x > a\}$ y el semiplano de la "izquierda" es la gráfica de $\{(x,y) \mid x < a\}$.

EJEMPLO 1.

Determina si cada uno de los puntos siguientes:

a) $P_1(-2,5)$

b) $P_1(6,-2)$

c) $P_1(7,0)$

está sobre, por arriba o por debajo de la recta $3x+7y-21=0$.

SOLUCIÓN;

Despejando la "y" de la ecuación dada se encuentra la forma común,

$$y = -3/7\ x + 3$$

de la cual podemos demostrar que:

a) El punto $P_1(-2,5)$ está por arriba de la recta dada, ya que cumple con la desigualdad $y_1 > mx_1 + b$, o sea,

$$5 > (-3/7)(-2) + 3$$
$$5 > 6/7 + 3$$
$$5 > 27/7.$$

b) El punto $P_1(6,-2)$ está por debajo de la recta dada, ya que hace que la desigualdad $y_1 < mx_1 + b$, sea verdad, o sea:

$$-2 < (-3/7)\ (6) + 3$$
$$-2 < -18/7 + 3$$
$$-2 < 3/7$$

c) El punto $P_1(7,0)$ está sobre la recta dada, ya que cumple con la ecuación $y_1 = mx_1 + b$, o sea:

$$0 = (-3/7)(7) + 3$$
$$0 = -3 + 3$$
$$0 = 0$$

EJEMPLO 2.

Construya la gráfica de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 3x + 2y > 6\}$$

y dé su dominio y su recorrido.

SOLUCIÓN:

De las propiedades de las desigualdades se ve que

$$3x + 2y > 6$$

es equivalente a:

$$y > -3/2\ x + 3$$

de modo que:

$$R = \{(x,y) \mid 3x + 2y > 6\} = \{(x,y) \mid y > -3/2\ x + 3\}$$

Del teorema antes visto se deduce que el punto $P_1(x_1,y_1)$ pertenece a la relación $R=\{(x,y) \mid y > -3/2\ x + 3\}$, si el punto $P_1(x_1,y_1)$ queda arriba de la gráfica $y = -3/2\ x + 3$; en consecuencia, la gráfica de R está formada por el conjunto de puntos del plano coordenado que están situados arriba de

la gráfica de la ecuación $y = -3/2\ x + 3$. Dicha gráfica es la parte sombreada de la fig. 22. El dominio R es $(-\infty;+\infty)$ y su recorrido es también $(-\infty;\ +\infty)$.

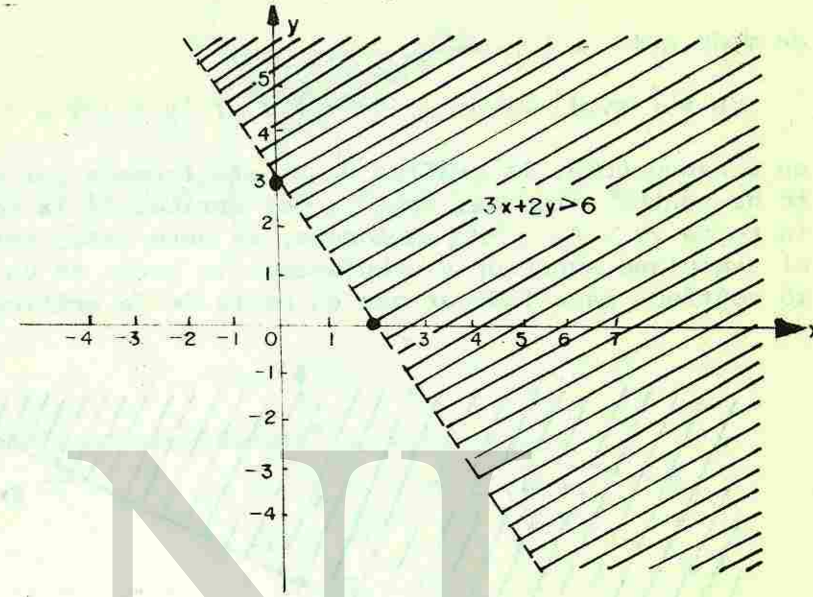


Fig. 22.

NOTA:

La gráfica de una desigualdad lineal es el semiplano sombreado que puede o no contener a la recta. Una "recta a trazos" no forma parte del semiplano; una "recta contínua" se incluye en el semiplano, véase fig. 23.

EJEMPLO 3.

Construya la gráfica de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 2x - 4y \leq -8\}$$

SOLUCIÓN:

De las propiedades de las desigualdades se ve que:

$$2x - 4y \leq -8$$

es equivalente a:

$$y \geq 1/2\ x + 2$$

de modo que:

$$R = \{(x,y) \mid 2x-4y \leq -8\} = \{(x,y) \mid y \geq 1/2\ x + 2\}$$

en consecuencia, la gráfica de R está formada por el conjunto de puntos situados, sobre y por arriba, de la ecuación de la recta $2x - 4y = -8$. Entonces, en este caso, sombrearemos el semiplano superior y dibujaremos la recta de un solo trazo contínuo para indicar que es parte de la gráfica (fig. 23).

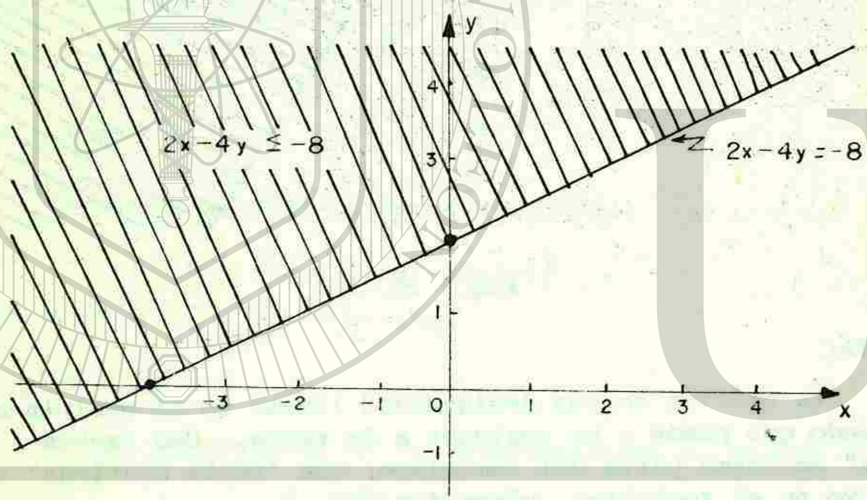


Fig. 23.

EJEMPLO 4.

Construya la gráfica de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 2x + y > 3 \quad y \quad x-2y < -1\}$$

y dé su dominio y su recorrido.

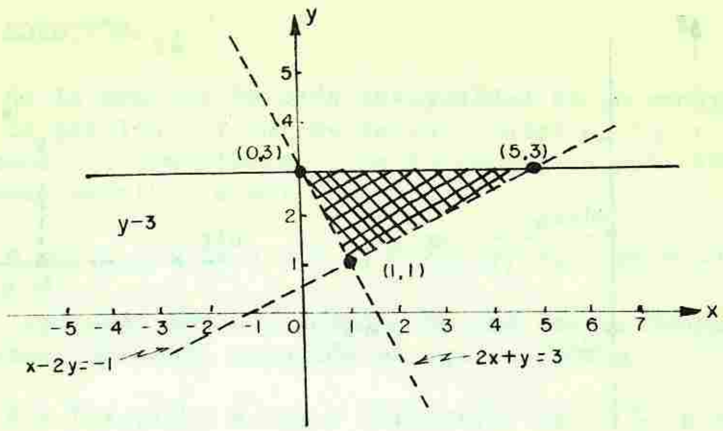


Fig. 25.

Tratando como simultáneas las ecuaciones:

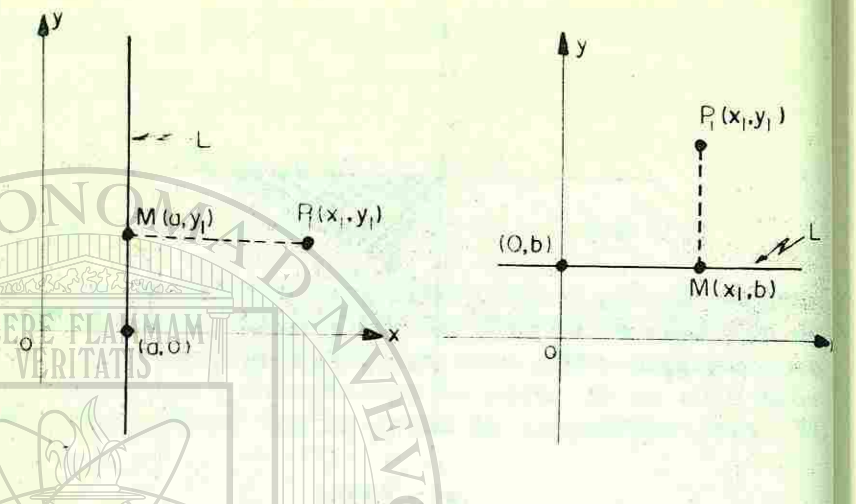
$$2x + y = 3$$
$$x - 2y = -1$$
$$y = 3,$$

se encuentra que los puntos de intersección de sus gráficas son (1,1), (0,3) y (5,3).

De los resultados anteriores se obtiene que: el dominio de R = (0;5); y el recorrido de R = (1;3).

2-11 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Una recta L puede ser vertical, horizontal (fig. 26), u oblicua respecto a los ejes coordenados. Sea "d" la distancia PM del punto $P(x_1,y_1)$ a la recta L, siendo M el punto de intersección de L con la perpendicular a ella que pasa por P. Si L, es vertical, es la gráfica de $\{(x,y) \mid x=a\}$, entonces, como se puede ver en la fig. 26 (a): $d = |x_1 - a|$.



(a) (b)

Fig. 26.

Si L, es horizontal, es la gráfica de $\{(x,y) | y = b\}$, entonces:

$$d = |y_1 - b|$$

como se puede ver en la figura 26 (b).

Si L no es paralela a ningún eje coordenado, para hallar la distancia "d" del punto $P(x_1, y_1)$ a dicha recta, se aplica el siguiente teorema, cuya demostración se pide en el problema 22 de la autoevaluación de esta sección:

> "La distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta no vertical L, de ecuación $Ax + By + C = 0$, está dada por:
>
> $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
>
> que es la fórmula que da la distancia de un punto a una recta".

SOLUCIÓN:

Si la gráfica de cada desigualdad es un semiplano, entonces, la gráfica del par de desigualdades es la intersección de estos dos semiplanos. Por lo tanto, la relación anterior se puede escribir como:

$$R = \{(x,y) | 2x + y > 3\} \cap \{(x,y) | x - 2y < -1\}$$

Siguiendo las propiedades de las desigualdades se puede demostrar que esta relación es equivalente a:

$$R = \{(x,y) | y > -2x + 3\} \cap \{(x,y) | y > \frac{1}{2} x + 1/2\}$$

Dibujaremos primero las dos rectas. encontramos que la gráfica de $y > -2x + 3$ determina el semiplano de la derecha de la ecuación $2x + y = 3$ y que la gráfica de $y > 1/2\ x + 1/2$ determina el semiplano de la izquierda de la ecuación $x-2y=-1$. La región común a las dos se sombrea como en la fig. 24.

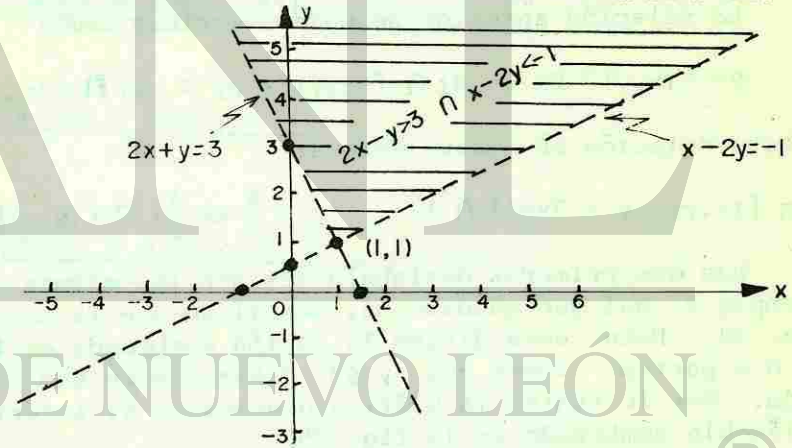


Fig. 24.

Tratando como simultáneas las ecuaciones:

$$2x + y = 3$$

$$x - 2y = -1$$

se encuentra que el punto de intersección de sus gráficas es

(1,1).

De los resultados que se acaban de obtener se ve que el dominio de $R = (-\infty; +\infty)$; el recorrido de $R = (1; +\infty)$.

Este ejemplo es típico para dos desigualdades. Pero podemos considerar tres o más desigualdades simultáneas. Las ideas y el procedimiento son los mismos.

EJEMPLO 5.

Construya la gráfica de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 2x + y > 3 \text{ y } x - 2y < -1 \text{ y } y \leq 3\}$$

y dé su dominio y su recorrido.

SOLUCIÓN:

La relación anterior se puede escribir como:

$$R = \{(x,y) \mid 2x+y > 3\} \cap \{(x,y) \mid x-2y < -1\} \cap \{(x,y) \mid y \leq 3\}$$

y esta relación es equivalente a:

$$R = \{(x,y) \mid y > -2x+3\} \cap \{(x,y) \mid y > \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\} \cap \{(x,y) \mid y \leq 3\}$$

Las dos primeras desigualdades son las mismas que en el ejemplo 2; así que añadiremos, sencillamente la tercera a la fig. 24. Esta recta divide la región sombreada de la fig. 24 en dos partes. Vemos que $y \leq 3$ determina su semiplano más bajo. Por lo tanto, la gráfica deseada es el interior del triángulo sombreado en la fig. 25.

EJEMPLO .

Encuentra la distancia de los siguientes puntos a la recta de ecuación: $4x + 3y - 11 = 0$:

a) P(6,4) b) P(−6,−5)
c) P(−2,3) d) P(3,−2)

SOLUCIÓN:

Por el teorema anterior, la distancia "d" del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta del enunciado, está dada por:

$$d = \frac{|4x_1 + 3y_1 - 11|}{5}$$

aplicando la ecuación anterior se obtienen los siguientes resultados:

a) $d = \dfrac{|4(6) + 3(4) - 11|}{5} = 5$

b) $d = \dfrac{|4(-6) + 3(-5) - 11|}{5} = 10$

c) $d = \dfrac{|4(-2) + 3(3) - 11|}{5} = 2$

d) $d = \dfrac{|4(3) + 3(-2) - 11|}{5} = 1$

AUTOEVALUACION 3.

En cada uno de los problemas del 1 al 4, determina si cada uno de los puntos dados está sobre, por arriba o por de bajo de la recta correspondiente.

1.- $2x + 3y - 6 = 0$; $(4,1)$, $(-1,1)$, $(2,3)$

2.- $3x + 4y + 8 = 0$; $(0,0)$, $(-5,-1)$, $(2,3)$

3.- $5x - 12y - 26 = 0$; $(-5,1)$, $(0,- 13/6)$, $(10,0)$

4.- $3x - 2y + 6 = 0$; $(2,2)$, $(2,6)$, $(-2,5)$

Construya la gráfica de cada una de las siguiente relaciones y dé el dominio y el recorrido de cada una de ellas.

5.- $R = \{(x,y) \mid 2x + 5y > 10\}$

6.- $R = \{(x,y) \mid x + y \leq -1\}$

7.- $R = \{(x,y) \mid 3x - 4y > -12\}$

8.- $R = \{(x,y) \mid 2x - 7y \leq 14\}$

9.- $R = \{(x,y) \mid x + 2y \leq 4\}$

10.- $R = \{(x,y) \mid 4x + 3y > 12 \text{ y } 4x - 5y > -20\}$

11.- $R = \{(x,y) \mid 4x + 3y > 12 \text{ y } 4x-5y > -20 \text{ y } 4x-y \leq 12\}$

12.- $R = \{(x,y) \mid 4x + 3y > 12 \text{ y } 4x-5y > -20 \text{ y } 4x-y > 12\}$

En cada uno de los problemas del 13 al 18 encuentra la distancia del punto dado a la recta correspondiente.

13.- $x + 4 = 0$; $(3,2)$

14.- $2y + 7 = 0$; $(2,-3)$

15.- $3x + 4y + 5 = 0$; $(-2,4)$

16.- $4x + 3y - 8 = 0$; $(1,-2)$

17.- $6x - 8y - 3 = 0$; $(0,-5)$

18.- $5x + 12y - 5 = 0$; $(2,5)$

19.- Encuentra la distancia del punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones $x - 2y + 1 = 0$ y $x-y-1= 0$ a la gráfica de $5x + 12y - 13 = 0$.

20.- Encuentra la distancia entre el par de rectas paralelas cuyas ecuaciones son: $x+2y-5=0$ y $x+2y+10=0$.

21.- Encuentra la longitud del radio de una circunferencia de centro $(-1,4)$ y que es tangente a la gráfica de $3x+4y-24=0$.

22.- Demuestre el siguiente teorema:

"La distancia "d" del punto $P(x_1,y_2)$ a la recta no vertical L, de ecuación $Ax+ By + C = 0$, está dada por:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sugestión: Si L es una recta no vertical de ecuación $y= mx+b$, encuentra las coordenadas del punto M de intersección de L con la perpendicular a ella que pasa por P; después usa la fórmula de la distancia entre dos puntos para establecer que:

$$d^2 = \frac{(y_1 - mx_1 - b)^2}{m^2 + 1}$$

y a partir de este resultado hacer ver que, si la ecuación de L es $Ax + By + C = 0$, entonces:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 2.

AUTOEVALUACIÓN 2.

11.- $3x - y + 7 = 0$

12.- $5x-y = 0$

13.- $3x-4y+11 = 0$

14.- $2x-3y-12 = 0$

15.- $2x+y+3 = 0$

16.- $3x-y+2=0$

17.- $2x+y+3 = 0$

18.- $x-3y+12 = 0$

19.- $y + 1 = 0$

20.- $4x+3y-9 = 0$

21.- $x+3y-5 = 0$

22.- $2x+3y= 0$

23.- $5x-2y-16 = 0$

24.- $6x+7y+17 = 0$

25.- $4x +7y-28 = 0$

26.- $3x+5y = 0$

27.- $x - 5 = 0$

28.- $y - 2 = 0$

29.- $x - 8y + 25 = 0$

30.- $3x + 2y + 1 = 0$

31.- (4,0), (0,3), m= -3/4

32.- (-2,0), (0,3), m= 3/2

33.- (2,0), (0,-4), m= 2

34.- (-1,0), (0,-3), m= -3

35.- (0,0), m= 4

36.- (-3,0), (0,-7), m= -7/3

37.- (-2,0), (0,-5), m= -5/2

38.- (6,0), (0,2), m= - 1/3

39.- (2,3)

40.- Son paralelas.

41.- (0,-2)

42.- (2,1)

43.- (1,3)

44.- (3,4)

45.- $3x-2y + 1 = 0$

46.- $28x-21y + 12 = 0$

47.- $7x - 2y + 16 = 0$

48.- $12x - 7y + 1 = 0$; No.

49.- $x + 3y - 5 = 0$

50.- $12x + 3y - 2 = 0$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Arriba de la recta, debajo de ella, arriba de ella.

2.- Arriba de la recta, debajo de ella,arriba de ella.

3.- Arriba de la recta, sobre ella, debajo de ella.

4.- Debajo de la recta. sobre ella, debajo de ella.

5.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty ; +\infty)$

6.- Dominio = $(-\infty ; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty ; +\infty)$

7.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty; +\infty)$

8.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty; +\infty)$

9.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty ; +\infty)$

10.- Dominio = $(0 ; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty ; +\infty)$

11.- Dominio = $(0; 5]$; Recorrido = $(0; 8]$

12.- Dominio = $(3; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty; +\infty)$

13.- $d = 7$

14.- $d = 1/2$

15.- $d = 3$

16.- $d = 2$

17.- $d = 37/10$

18.- $d = 5$

19.- $d = 2$

20.- $d = 3\sqrt{5}$

21.- $r = 11/5$

LA CIRCUNFERENCIA.

En esta unidad veremos el estudio de una fomra de sección cónica llamada LA CIRCUNFERENCIA. Una circunferencia, analíticamente, es una ecuación de segundo grado con dos variables y queda completamente determinada si se conocen su centro y su radio.

En esta unidad aprenderás a comprender por qué a la circunferencia se le llama cónica y estarás en condición de representar e interpretar la ecuación de la circunferencia y a valorar la importancia de sus aplicaciones.

Aprende a excelencia la unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente el significado de circunferencia.

2.- Demostrar la ecuación de la circunferencia en sus dos formas conocidas.

3.- Determinar correctamente la ecuación de la circunferencia, dados cualquiera de las condiciones siguientes:

a) El centro y el radio.
b) El centro y un punto que pertenezca a ella.
c) Las coordenadas del diámetro.

4.- Determinar correctamente la ecuación de la circunferencia, dadas 3 coordenadas de ella, dando su lugar geométrico.

5.- Expresar el lugar geométrico de cualquier ecuación que pertenezca a la forma general de una circunferencia.

6.- Construir correctamente la gráfica de una relación, definida por cualquiera de las expresiones siguientes:

$$S_1 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$
$$S_2 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 < r^2\}$$
$$S_3 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 \leq r^2\}$$
$$S_4 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 > r^2\}$$
$$S_5 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 \geq r^2\}$$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo III de tu libro "Geometría Analítica". A manera de recomendación, te sugerimos, conforme vayas avanzando en el estudio de la unidad, anotes todas las cuestiones que creas importantes y, sobre todo, las fórmulas que se expongan dentro de la unidad.

Para el objetivo 2, es necesario que comprendas el significado de circunferencia, para que luego apliques la fórmula de la distancia entre dos puntos para demostrar la ecuación de la misma.

Para el objetivo 3, basta con conocer dos condiciones para determinar su ecuación. Para ello, analiza primero los ejemplos que vienen en tu libro y luego, en base a ellos trates de resolver la autoevaluación 1. Igualmente para el objetivo 4, te sugerimos analices los ejemplos, puesto que, en este objetivo se necesita del dominio de cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales en 3 incógnitas. Así mismo, en caso de no recordar cómo se resuelve un sistema como estos, estudia la regla de Cramer, que viene en el libro del 2do. Semestre, o bien el método algebraico de sustitución.

Para el objetivo 5, resuelve la autoevaluación 2. Para ello, es indispensable que domines bien el método de completar el cuadrado (visto en el 3er.semestre), ya que lo usaremos para este objetivo. Las 3 condiciones a que da lugar la representación del lugar geométrico de la ecuación en forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

pueden ser:

a) *La ecuación de una circunferencia.* Su lugar geométrico queda descrito por las coordenadas del centro y su radio.

b) *Un solo punto.* Su lugar geométrico queda descrito por las coordenadas de dicho punto.

c) *Conjunto vacío.* No hay lugar geométrico posible para esa ecuación.

Para el objetivo 6, estudia los ejemplos que se incluyen en tu texto y luego procede a resolver la autoevaluación 3.

2.- Una vez que hayas resuelto todos tus objetivos, aplica tus conocimientos resolviendo la autoevaluación del capítulo, estudiando de nuevo aquellos problemas que hayas resuelto mal.

CAPITULO 3.

LA CIRCUNFERENCIA.

3-1 INTRODUCCIÓN.

Una manera de generalizar la ecuación que representa la línea recta $Ax + by + c = 0$, es añadir a la misma todos los términos cuadráticos posibles (términos de segundo grado en "x" e "y"). Obtenemos así la ecuación generalizada:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Como se ve, es una ecuación general de 2o. grado en cada una de las variables (siempre que A, B y C no sean nulos).

Vamos a considerar algunos casos especiales de esta ecuación, ya que el caso general es bastante complicado; al conjunto total de puntos cuyas coordenadas (x,y) satisfacen la ecuación anterior se le denomina "sección cónica". Esta denominación proviene de que puede obtenerse mediante la intersección de un plano con un cono de revolución de dos mantos:

Si el plano es perpendicular al eje del cono, (o sea, paralelo a la base), la intersección es una circunferencia - (fig. 1) o un punto, según que corte a un manto o pase por el vértice.

Si el plano es paralelo a una generatriz del cono y corta a todas las demás, la intersección es una parábola (fig.2).

Fig. 1.

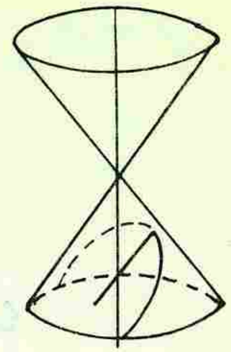


Fig. 2

Fig. 3.

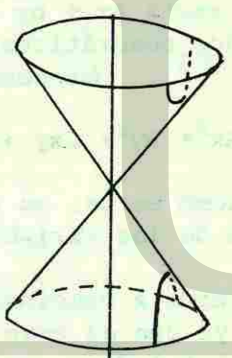


Fig. 4.

Si el plano no es perpendicular al eje, pero corta a toda generatriz, la intersección es una elipse (fig. 3).

Si el plano corta los dos mantos del cono y no pasa por el vértice, la intersección es una hipérbola (fig. 4).

No vamos a demostrar los postulados anteriores porque sería necesario utilizar Geometría en el Espacio, pero en la forma descrita fue como los antiguos griegos obtuvieron la

circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola; muchas de las propiedades de estas curvas fueron establecidas por ellos con métodos de la Geometría en el Espacio.

Consideraremos que en las ecuaciones de las secciones cónicas no existirá término en "xy"; debido a que en el estudio que haremos de la parábola, la elipse y la hipérbola, los ejes de las mismas coincidirán con, o serán paralelas a los ejes coordenados.

Nuestro estudio de las secciones cónicas en este capítulo y en los posteriores, está condensado en el siguiente teorema:

"Si la gráfica de $Ax^2+ By^2+Dx+Ey+ F=0$ consiste cuando menos en un punto, entonces es, bien una sección cónica o dos rectas paralelas.

a) Si $A = B = 0$, la gráfica es una recta.

b) Si $A = B \neq 0$, la gráfica es una circunferencia, un punto o una circunferencia imaginaria.

c) Si alguno de los coeficientes A y B es cero, la gráfica es una parábola, dos rectas paralelas, una sola recta o una parábola imaginaria.

d) Si $A \cdot B > 0$, la gráfica es una elipse, un punto, o una elipse imaginaria.

e) Si $A \cdot C < 0$, la gráfica es una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

3-2 LA CIRCUNFERENCIA.

La circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo en el plano llamado "centro"; la distancia de éste a cualquier punto de la circunferencia se llama "radio".

Una circunferencia, analíticamente, es una ecuación de segundo grado con dos variables y queda completamente deter nada si se conocen su centro y su radio.

Consideremos que el punto fijo C(h,k) sea el centro de una circunferencia de radio "r", en que "r" representa un n mero real positivo y al punto P (x, y) que estará a "r" uni des de C.

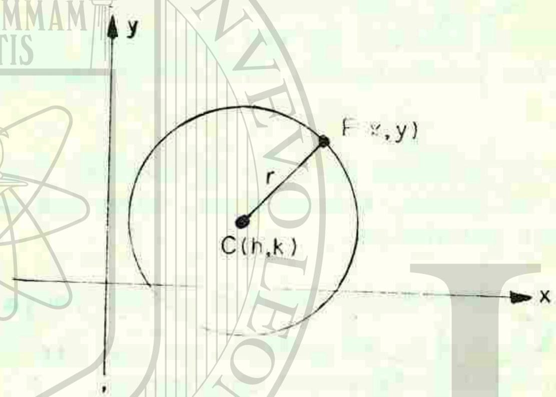


Fig. 5.

El punto P(x,y) pertenecerá a la circunferencia si su distancia a C(h,k) es igual a "r"; en otras palabras, la cir cunferencia de centro C(h,k) y radio "r" es la gráfica de la ecuación:

$$|PC| = r$$

o sea, por la fórmula de distancia entre dos puntos del capí tulo anterior, se encuentra que:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

o también, elevando los dos miembros al cuadrado, obtenemos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

lo que demuestra el siguiente teorema:

"La circunferencia de centro C(h,k) y radio "r" es la gráfica de la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

que recibe el nombre de "forma reducida" de la ecuación de la circunferencia. Si el centro C está en el origen, entonces h= 0 y k=0 y la ecuación anterior se escribe:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EJEMPLO 1.

Encontrar la ecuación de una circunferencia que satisfaga con las condiciones dadas:

a) Con centro en C(2,3) y radio 4.
b) Con centro en C(-1,5) y radio 2.
c) Con centro en C(0,0) y radio $\sqrt{3}$.
d) Con centro en C(0,4) y radio 1.
e) Con centro en C(3,-2) y que pase por el punto A(6,2).

SOLUCIÓN:

a) Como la ecuación de una circunferencia en la forma reducida es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; cuyo centro es el punto C(h,k) y su radio es de "r" unidades; vamos a sustituir en esta ecuación los valores conocidos, que son h=2, k=3 y r=4 y se obtiene:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

que es la ecuación buscada.

b) Sustituyendo los valores conocidos de h= -1, k=5 y r=2 en la ecuación en la forma reducida, nos queda:

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 4$$

c) Igualmente, sustituyendo $h = 0$, $k= 0$, y $r = \sqrt{3}$ en la misma ecuación, se tiene:

$$x^2 + y^2 = 3$$

d) Asimismo, ahora, $h= 0$, $k = 4$ y $r = 1$, tenemos:

$$x^2 + (y-4)^2 = 1$$

e) Como el radio "r" es la distancia entre C(3,-2) y cualquier otro punto de la circunferencia dada, usaremos la fórmula de distancia entre dos puntos para encontrar r;

$$r = |CA|$$
$$= \sqrt{(6-3)^2 + (2+2)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16}$$
$$= 5$$

Luego, sustituyendo los valores de $h=3$, $k= -2$ y $r =5$ en la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ se tiene:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$$

que es la ecuación buscada.

Desarrollando la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, (elevando al cuadrado los binomios "x-h" y "y-k"), se obtiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

reordenado, llegamos a:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Esto es un caso particular de la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A= B \neq 0$, (lo cual constituye una condición necesaria para que la ecuación de la sección 3-1 sea una circunferencia), en que $A = B = 1$, $D= -2h$, $E= -2k$ y $F= h^2 + k^2 - r^2$.

Queda así demostrado el siguiente teorema:

"Cualquier circunferencia es la gráfica de una ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

llamada "forma general" de la ecuación de la circunferencia.

EJEMPLO 2.

Encuentra la ecuación de una circunferencia en forma reducida y forma general que tiene los puntos A(-3,2) y B(5,2) como extremos de un diámetro. Construya la gráfica correspondiente y dé su dominio y su recorrido.

SOLUCIÓN:

Designando por C(h,k) el centro de la circunferencia cuya ecuación se busca y por "r" su radio; y como el centro C(h,k) es el punto medio del segmento que une (-3,2) con (5,2) usando la fórmula de las coordenadas del punto medio, se obtiene:

$$h = \frac{-3+5}{2} = 1 \qquad y \qquad k = \frac{2+2}{2} = 2$$

y como "r" es la distancia entre C(1,2) y cualquiera de los extremos del diámetro dado, usando la fórmula de distancia entre dos puntos para encontrar r:

$$r = |CB|$$
$$= \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 0}$$
$$= 4$$

Sustituyendo los valores h=1, k=2 y r=4 en la ecuación reducida $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, se obtiene:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

que es la ecuación buscada.

Para construir la gráfica de la circunferencia de este ejemplo, trace el centro (1,2) y luego, con una abertura de compás de r = 4 y haciendo centro en C, trace la circunferencia deseada. La gráfica se muestra en la fig. 6.

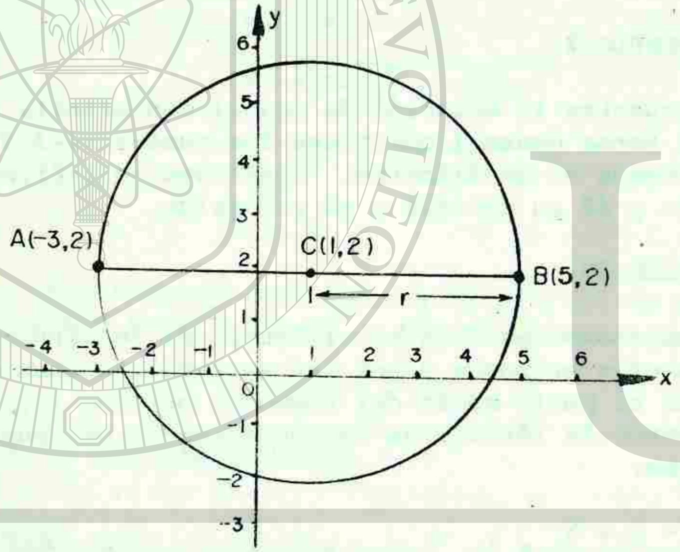


Fig. 6.

Siendo su dominio y su recorrido:

Dominio = $[-3; 5]$

Recorrido = $[-2; 6]$

Y para representar la ecuación de esta circunferencia en la forma general, basta desarrollarla de la siguiente manera:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 16$$

pasando todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación, simplificando y reordenando los términos para darle forma como el de la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

que es la misma ecuación buscada, pero en forma general.

O también, para obtener la ecuación de una circunferencia en la forma general a partir de la forma reducida, se puede proceder como sigue: la ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la ecuación en la forma general de una circunferencia, en donde, $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$. Entonces, sustituyendo los valores conocidos de h, k y r se obtiene que D= -2, E= -4 y F= -11; y sustituyendo, ahora, D, E y F por sus respectivos valores en la ecuación en la forma general, obtenemos la misma ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

Si una gráfica G contiene un punto P sobre el eje X, la abscisa de P es una abscisa en el origen de G; es decir, un número "a" es una abscisa en el origen de una gráfica G si $P(a,0) \in G$. Análogamente, una ordenada en el origen de una gráfica G es un número "b" tal que $P(0,b) \in G$. Como y=0 es la ecuación del eje X, las abscisas en el origen de una gráfica pueden obtenerse haciendo y=0 en la ecuación de la gráfica y resolviendo respecto a "x" la ecuación resultante. Análogamente, las ordenadas en el origen de una gráfica pueden obtenerse haciendo x=0 en la ecuación de la gráfica y resolviendo con respecto a "y" la ecuación resultante. Una gráfica dada puede tener varias abscisas en el origen (o una, o ninguna) y también varias ordenadas en el origen, o una, o ninguna.

Por ejemplo, la circunferencia con centro en el origen y radio 5, de ecuación $x^2 + y^2 = 25$, tiene dos abscisas en el origen que son 5 y -5 y dos ordenadas en el origen, que también valen 5 y -5 (ver fig. 7).

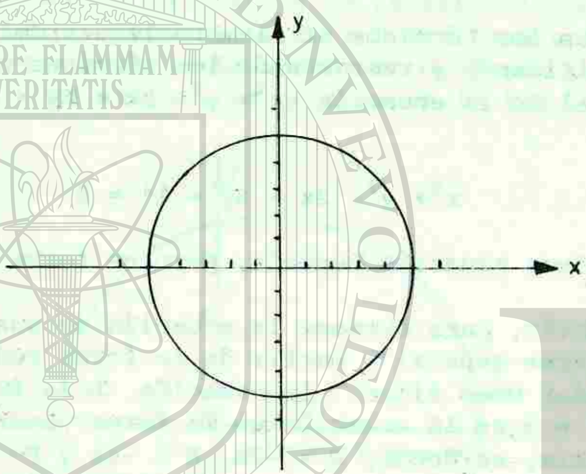


Fig. 7.

Para hallar las abscisas en el origen de la circunferencia del ejemplo 2 haremos y=0 en la ecuación $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$, para obtener:

$$(x-1)^2 + 4 = 16$$

por lo tanto, $$x-1 = \pm\sqrt{12}$$

o sea que las abscisas en el origen de esta circunferencia son $1 + \sqrt{12}$ y $1 - \sqrt{12}$. Para encontrar sus ordenadas en el origen haremos ahora, x=0 en la misma ecuación; resultando:

$$1 + (y-2)^2 = 16$$

por lo tanto, $$y-2 = \pm\sqrt{15}$$

o sea que las ordenadas en el origen de esta circunferencia son $2 + \sqrt{15}$ y $2 - \sqrt{15}$.

EJEMPLO 3.

Encuentra la ecuación en forma general de una circunferencia que pasa por los puntos A(2,3), B(-2,-1) y C(-6,3); determina su centro y su radio; y dé asimismo las coordenadas en el origen de la gráfica correspondiente.

SOLUCIÓN:

Dado que todos los puntos que pertenecen a la curva satisfacen su ecuación, sustituiremos los tres puntos dados en la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

para formar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (D, E y F) y después resolver.

(Consideraremos que el alumno está capacitado en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas).

Procediendo así, tenemos: Para el punto A(2, 3):

$$(+2)^2 + (+3)^2 + D(+2) + E(+3) + F = 0$$

o sea,

$$4 + 9 + 2D + 3E + F = 0$$

o bien,

$$2D + 3E + F = -13$$

Para el punto B(-2,-1)

$$(-2)^2 + (-1)^2 + D(-2) + E(-1) + F = 0$$

o sea,

$$4 + 1 - 2D - E + F = 0$$

o bien,

$$-2D - E + F = -5$$

Para el punto C(-6,3):

$$(-6)^2 + (3)^2 + D(-6) + E(3) + F = 0$$

o sea,

$$36 + 9 - 6D + 3E + F = 0$$

o bien,

$$-6D + 3E + F = -45$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$2D + 3E + F = -13$$
$$-2D - E + F = -5$$
$$-6D + 3E + F = -45$$

Resolviendo algebráicamente este sistema de ecuaciones tenemos que: D= 4, E= -6 y F = -3,

Sustituyendo los valores de D, E y F en la ecuación en la forma general de la circunferencia, se obtiene:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$
$$x^2 + y^2 + (4)x + (-6)y + (-3) = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

que es la ecuación de la circunferencia buscada

Para localizar las coordenadas del centro y la longitud del radio de esta circunferencia, se procederá así: si $D=-2h$, $E= -2k$ y $F= h^2 + k^2 - r^2$; entonces $h= -D/2$, $k= -E/2$ y $r^2 = h^2 + k^2 - F$; o sea:

$h = -4/2$ $\qquad$ $k= -(-6)/2$ $\qquad$ $r^2 = (-2)^2 + (3)^2 - (-3)$

$h = -2$ $\qquad$ $k= 3$ $\qquad$ $r^2 = 4 + 9 + 3 = 16$

$r = 4$

por lo tanto, el lugar geométrico que representa la ecuación de la circunferencia, queda determinado por C(-2,3) y r= 4. Entonces la ecuación en la forma reducida de la circunferencia es:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Para encontrar las abscisas en el origen, le damos a la "y" el valor de cero en la ecuación anterior y tenemos que: si y = 0:

$$(x + 2)^2 + (-3)^2 = 16$$
$$(x + 2)^2 + 9 = 16$$
$$(x + 2)^2 = 7$$
$$x + 2 = \pm \sqrt{7}$$
$$x = -2 \pm \sqrt{7}$$

luego de donde, las abscisas en el origen son:

$-2 + \sqrt{7}$ $\qquad$ y $\qquad$ $-2 - \sqrt{7}$

Para encontrar las ordenadas en el origen, le damos a la "x" el valor de cero en la misma ecuación y tenemos que: si x = 0:

$$(2)^2 + (y-3)^2 = 16$$
$$4 + (y-3)^2 = 16$$
$$(y-3)^2 = 12$$
$$y-3 = \pm \sqrt{12}$$
$$y = 3 \pm \sqrt{12}$$

en donde, las ordenadas en el origen son:

$3 + \sqrt{12}$ $\qquad$ y $\qquad$ $3 - \sqrt{12}$

Surge ahora la siguiente pregunta: ¿La gráfica de una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, es siempre una circunferencia?

Para resolver esta pregunta, debemos de convertir la ecuación de la forma general de la circunferencia a la forma reducida.

Para lograr la reducción de la ecuación utilizaremos el método de completar al cuadrado, de la siguiente forma:

Primeramente pasaremos al miembro derecho de la ecuación, el término constante F:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey = - F$$

después, reordenaremos los términos de tal manera que agrupemos las variables en "x" e "y":

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

sumamos a ambos miembros de la ecuación una misma cantidad tal que, podamos formar trinomios cuadrados perfectos. Para ello, las cantidades buscadas son los cuadrados de la mitad de los coeficientes en "x" e "y", (o sea, completar los cuadrados en las variables "x" e "y") resulta:

$$\left[x^2 + Dx + (D/2)^2\right] + \left[y^2 + Ey + (E/2)^2\right] = (D/2)^2 + (E/2)^2 - F$$

factorizando el lado izquierdo de la ecuación, expresándolo como la suma de dos binomios al cuadrado y efectuando las operaciones indicadas en el miembro derecho de dicha ecuación, tenemos:

$$(x + D/2)^2 + (y + E/2)^2 = D^2/4 + E^2/4 - F$$

o sea,

$$(x + D/2)^2 + (y + E/2)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Si en esta ecuación la expresión $1/4(D^2 + E^2 - 4F) > 0$ (o sea, es positiva), entonces la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, es de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, y su gráfica es una circunferencia que tiene por radio un número real positivo "r" en que:

$$r^2 = 1/4\ (D^2 + E^2 - 4F)$$

Ahora, si la expresión $1/4\ (D^2 + E^2 - 4F) = 0$, entonces la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, tiene por gráfica un punto solamente, cuyas coordenadas son $(-D/2, -E/2)$.

Y si la expresión $1/4\ (D^2 + E^2 - 4F) < 0$, (O sea, es negativa), entonces la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, no tiene gráfica dentro del conjunto de elementos de todos los pares ordenados posibles de números reales, por lo tanto, se dice que su gráfica es una "circunferencia imaginaria" (o el conjunto vacío).

Queda así demostrado el siguiente teorema:

"Para determinar la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

escriba la ecuación en la forma reducida equivalente

$$(x + D/2)^2 + (y + E/2)^2 = t$$

en que $t = 1/4\ (D^2 + E^2 - 4F)$. Entonces:

a) Si $t > 0$, la gráfica es una circunferencia de centro $(-D/2, -E/2)$ y radio $\sqrt{t}$.

b) Si $t = 0$, la gráfica es un solo punto $(-D/2, -E/2)$.

c) Si $t < 0$, la gráfica es una circunferencia imaginaria (o conjunto vacío)."

EJEMPLO 4.

Determina si la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una circunferencia, un punto o una circunferencia imaginaria: si la gráfica es una circunferencia, dé el centro y el radio.

a) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$

b) $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 + 8x - 10y + 50 = 0$

SOLUCIÓN:

a) (Para la solución de este ejemplo, consideraremos que el alumno está capacitado en el método de completar al cuadrado visto en 2o. semestre).

Para poder transformar la ecuación $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$ a la forma reducida, ahora, usaremos el método de completar al cuadrado, de acuerdo con los siguientes pasos:

Primer paso, pasamos al miembro derecho de la ecuación, el término constante (F),

$$x^2 + y^2 - 10x + 8y = -5$$

Segundo paso, reordenamos los términos de tal manera que podemos agrupar las variables en "x" e "y";

$$(x^2 - 10x) + (y^2 + 8y) = -5$$

Tercer paso, sumamos a ambos miembros de la ecuación una misma cantidad, tal que, podamos formar trinomios cuadrados perfectos. Para ello las cantidades buscadas, son los cuadrados de la mitad de los coeficientes de "x" e "y" (o sea, completar al cuadrado en el lado izquierdo).

$$\left[x^2 - 10x + (10/2)^2\right] + \left[y^2 + 8y + (8/2)^2\right] = -5 + (10/2)^2 + (8/2)^2$$

Cuarto paso, factorizamos y expresamos el lado izquierdo como la suma de dos binomios al cuadrado y efectuamos las operaciones indicadas en el lado derecho de dicha ecuación:

$$(x-5)^2 + (y+4)^2 = -5 + (5)^2 + (4)^2$$

$$(x-5)^2 + (y+4)^2 = -5 + 25 + 16$$

$$(x-5)^2 + (y+4)^2 = 36$$

y como en esta ecuación $t > 0$, la gráfica de la ecuación anterior es una circunferencia en $C(5,-4)$ y $r = \sqrt{t} = \sqrt{36} = 6$.

b) Escribiendo la segunda de las ecuaciones propuestas en la forma reducida, siguiendo los pasos anteriores, se tiene:

$$(x + 3)^2 + (y - 1)^2 = 0$$

se ve que la gráfica es el punto (-3,1).

c) Escribiendo la tercera de las ecuaciones propuestas en la forma reducida, se tiene:

$$(x + 4)^2 + (y - 5)^2 = -9$$

se ve que la gráfica es una circunferencia imaginaria (o conjunto vacío).

Asociadas con la circunferencia, que es la gráfica de la relación:

$$S = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$

están las gráficas de las relaciones:

$$S_1 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 < r^2\}$$

$$S_2 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 > r^2\}$$

$$S_3 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 \leq r^2\}$$

$$S_4 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 \geq r^2\}$$

en donde la gráfica de S_1 consiste en todos los puntos del plano que están dentro de la circunferencia S y la de S_2 en todos los puntos del plano que están fuera de ella; la gráfica de S_3 consiste en todos los puntos del plano que están dentro de, o sobre la circunferencia S y la de S_4 en todos los puntos del plano que quedan fuera de, o sobre ella.

(Observe que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cap S_3 = S_1$ y $S_3 \cap S_4 = S$).

EJEMPLO 5.

Construir la gráfica de la siguiente lación, estableciendo su dominio y recorrido.

$R = \{(x,y) \mid (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4 \}$

SOLUCIÓN:

El lugar geométrico que representa a la ecuación de la relación es: C(-1,-2) y r = 2.

Graficamos el punto del centro de la ecuación de la circunferencia y con un compás lo abrimos de tal manera, que tengamos un radio igual a 3 y con apoyo en el centro dibujamos la gráfica de la relación.

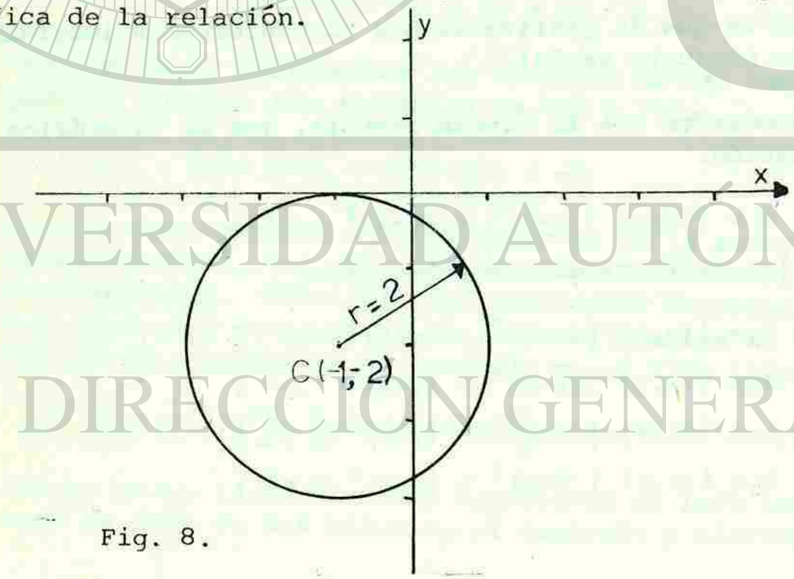


Fig. 8.

El dominio y el recorrido queda determinado por:

Dominio = [-3; 1]

Recorrido = [-4; 0]

EJEMPLO 6.

Construir la gráfica de la relación dada por $R= \{(x,y) \mid x^2+ (y-3)^2 <9\}$, y establezca su dominio y recorrido.

SOLUCIÓN:

La gráfica de la relación consiste en todos los puntos del plano, que están dentro de la ecuación de la circunferencia dada por $x^2+ (y-3)^2 = 9$.

Para graficarla, graficamos primero el centro determinado por las coordenadas de (0,3) y, con apoyo en él, abrimos nuestro compás hasta tener un radio igual a 3 y dibujamos una circunferencia interrumpida (punteada), que representa que el conjunto de puntos que están sobre la circunferencia no pertenecen a la relación. En seguida, sombreamos la parte interior de la circunferencia representando, por esta área sombreada, al conjunto de puntos que pertenecen a la relación dada. De lo anterior tenemos que:

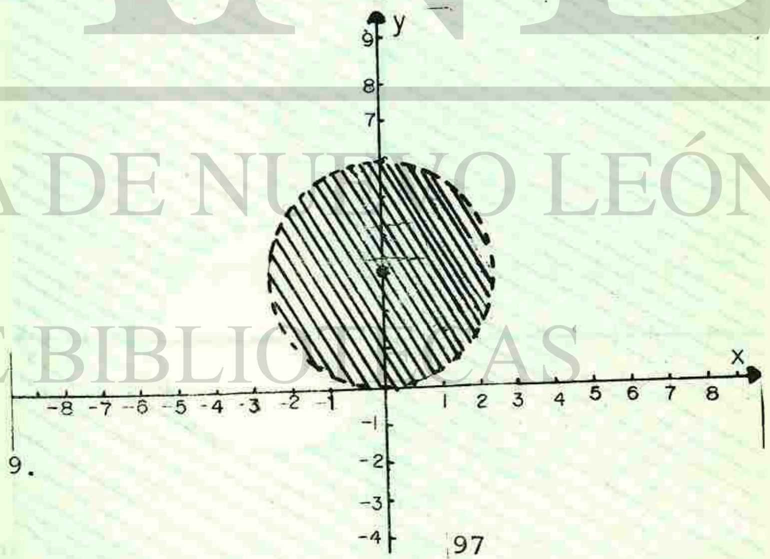


Fig. 9.

Dominio = (-3;3)

Recorrido= (0;6)

EJEMPLO 7.

Construir la gráfica de la relación siguiente, estableciendo su dominio y recorrido.

$R = \{(x,y) \mid (x-3)^2 + y^2 > 9\}$

SOLUCIÓN:

La gráfica consiste en todos los puntos del plano, que están fuera de la ecuación de la circunferencia, dada por: $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Para encontrar la gráfica usamos un compás y lo abrimos de tal manera que tengamos un radio igual a 3 y con apoyo al centro (3,0) dibujamos una circunferencia interrumpida (punteada). Dicha circunferencia punteada representa al conjunto de puntos que están sobre la circunferencia y que no pertenecen a la relación dada. En seguida sombreamos la parte exterior de la circunferencia para representar, así, al conjunto de puntos que sí pertenecen a la relación. De lo anterior, tenemos que:

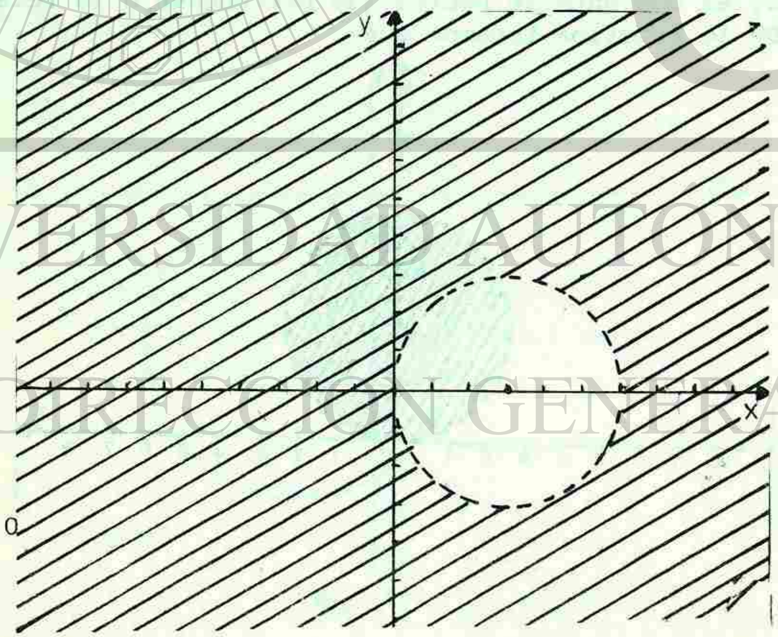


Fig.10

Dominio = $(-\infty; \infty)$

Recorrido = $(-\infty; \infty)$

EJEMPLO 8.

Construir la gráfica de la relación siguiente, estableciendo su dominio y recorrido.

$R = \{(x,y) \mid x^2 + (y-3)^2 \leq 9\}$

SOLUCIÓN:

La gráfica de esta relación consiste en todos los puntos del plano, que están dentro, o sobre la ecuación de la circunferencia $x^2 + (y-3)^2 = 9$; siendo $h = 0$, $k = 3$ y $r=3$.

Para graficar la relación, usamos un compás y lo abrimos de tal manera que, tengamos un radio igual a 3, con apoyo en el centro (0,3) dibujamos una circunferencia seguida (sin puntear) y sombreamos la parte interior de la circunferencia. De lo anterior tenemos que:

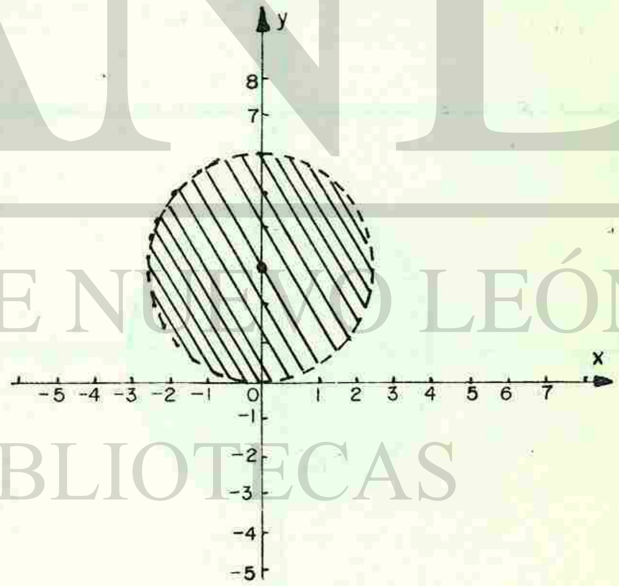


Fig. 11

Establece su dominio y recorrido.

Dominio = ____________.

Recorrido= ____________.

EJEMPLO 9.

Construye la gráfica de la relación siguiente, estableciendo su dominio y recorrido.

$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$

Fig. 12

EJEMPLO 10.

Construir la gráfica de la siguiente relación estableciendo su dominio y recorrido.

$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4 \quad y \quad (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$

SOLUCIÓN:

La relación está definida por la intersección de las expresiones:

$S_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$ y

$S_2 = \{(x,y) \mid (x-2)^2 + y^2 \leq 4\}$

Procedamos a encontrar primero las gráficas de cada expresión:

La gráfica de S_1, consiste en el conjunto de puntos del plano que están dentro, o sobre la ecuación de la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$. De tal manera, que su gráfica es:

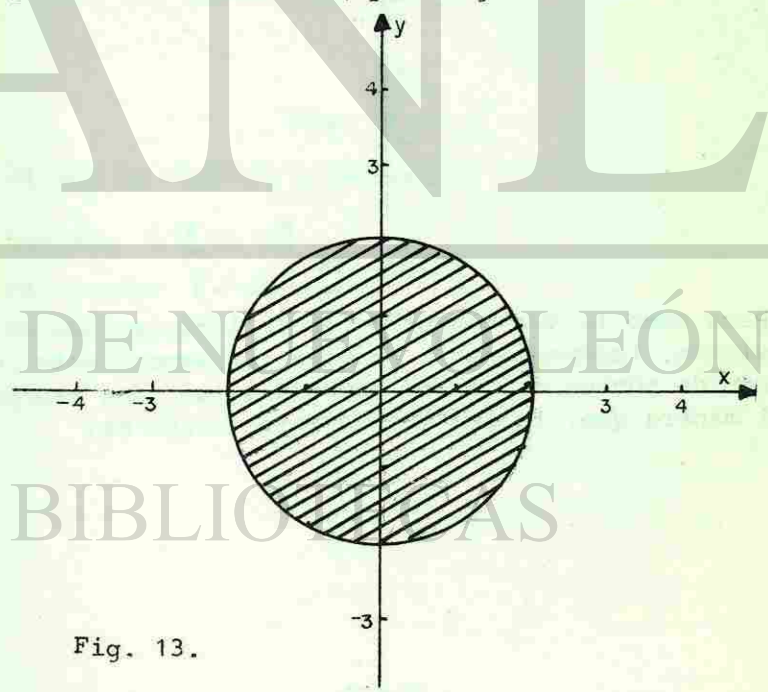


Fig. 13.

La gráfica de S_2 , consiste en el conjunto de puntos del plano que están dentro, o sobre la ecuación de la circunferencia $(x-2)^2 + y^2 = 4$. De tal manera que su gráfica es:

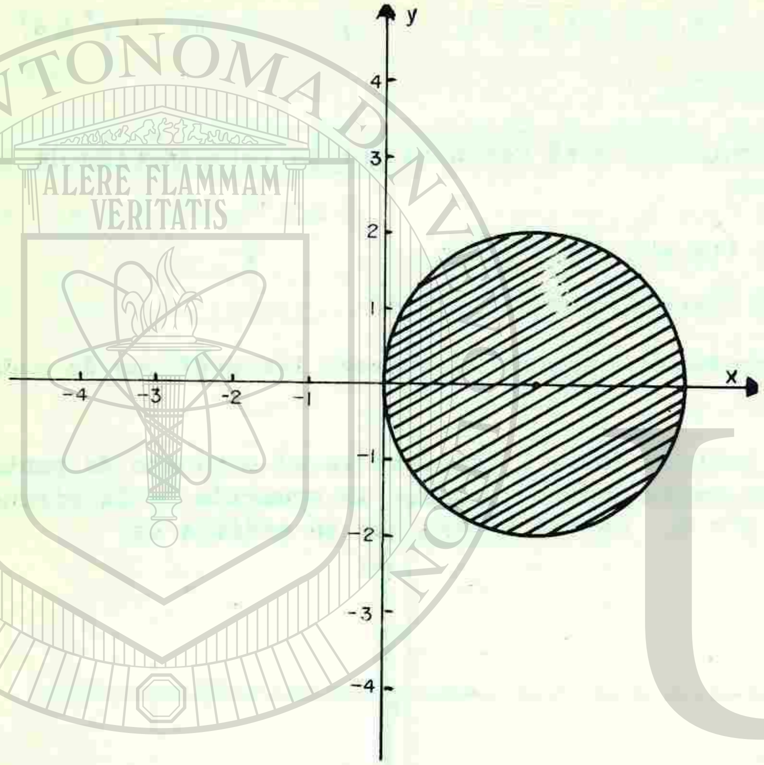


Fig. 14

Pero como lo que nos piden es la intersección de las dos expresiones, tenemos que la gráfica correspondiente, es el conjunto de puntos del plano comunes a las dos expresiones. De tal manera que, la gráfica de la relación es:

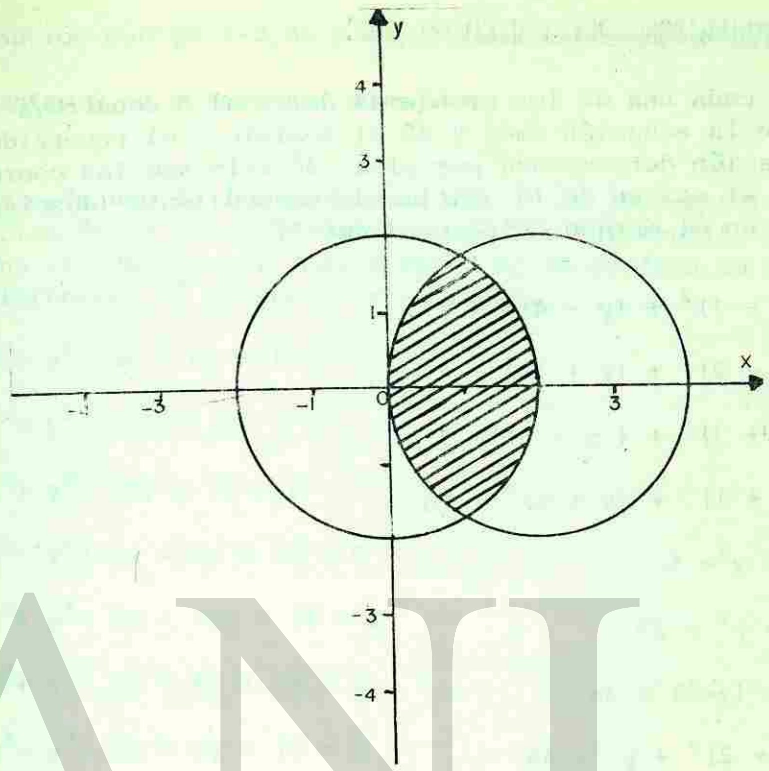


Fig. 15.

Siendo su dominio y recorrido:

Dominio = $[0; 2]$

Recorrido= $[-\sqrt{3} ; \sqrt{3}]$

AUTOEVALUACION DEL CAPITULO III.

En cada una de los problemas del 1 al 8 construya la gráfica de la ecuación dada y dé el dominio y el recorrido de la relación determinada por ella; dé asimismo las coordenadas en el origen de la gráfica correspondiente (abscisa y ordenada en el origen correspondiente).

1.- $(x - 1)^2 + (y - 4)^2 = 1$

2.- $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 4$

3.- $(x + 3)^2 + (y - 5)^2 = 9$

4.- $(x + 1)^2 + (y + 6)^2 = 16$

5.- $x^2 + y^2 = 5$

6.- $x^2 + y^2 = 25$

7.- $x^2 + (y-3)^2 = 36$

8.- $(x + 2)^2 + y^2 = 49$

En cada uno de los problemas del 9 al 16 determina la ecuación de la circunferencia que satisface las condiciones dadas y escríbela en la forma reducida y en la forma general.

9.- Centro (3,4) y radio 5.

10.- Centro (5,0) y radio 2.

11.- Centro (1,-2) y radio $\sqrt{3}$.

12.- Centro (-1,-4) y radio 3.

13.- Centro (0,-6) y radio 7.

14.- Centro (-2,3) y pasando por el punto (4,4).

15.- Con los puntos (-2,0) y (2,0) como extremos de diámetro.

16.- Centro (2,1) y tangente al eje X.

En cada uno de los problemas del 17 al 26 determina si la gráfica de la ecuación dada es una circunferencia, un punto o una circunferencia imaginaria. Si la gráfica es una circunferencia, dé su centro y su radio..

17.- $x^2 + y^2 - 8x + 6y + 29 = 0$

18.- $x^2 + y^2 - 10x - 24y = 0$

19.- $x^2 + y^2 + 10y - 75 = 0$

20.- $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 13 = 0$

21.- $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 34 = 0$

22.- $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 19 = 0$

23.- $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 16 = 0$

24.- $x^2 + y^2 + 2x - 8y + 20 = 0$

25.- $x^2 + y^2 + 2x + 4y + 5 = 0$

26.- $x^2 + y^2 + 6x + 4 = 0$

27.- Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos (5,3), (6,2) y (3,-1). ¿Cuál es el centro y el radio de esta circunferencia? Sugestión: Usar la forma general de la ecuación de la circunferencia; como la circunferencia dada va a pasar por cada uno de los puntos dados, las coordenadas de cada uno de ellos deben satisfacer su ecuación.

28.- Encuentra la ecuación de una circunferencia que pasa p[or] los puntos (4,-2), (-5,1) y (2,2). Determina su centr[o] y su radio.

29.- Encuentra la ecuación de una circunferencia que pasa p[or] los puntos (8,-2), (6,2) y (3,-7). Determina su centr[o] y su radio.

30.- Encuentra la ecuación de una circunferencia que tiene por diámetro la porción de la recta $x + 2y - 6 = 0$ comprendida en el primer cuadrante.

31.- Encuentra la ecuación de una circunferencia que tiene e[l] mismo centro que la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x - 4y + 7 =$ y cuyo radio es 4.

32.- Encuentra la ecuación de una circunferencia que tiene e[l] mismo centro que la circunferencia $x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0$ y cuyo radio es 5.

33.- Encuentra la ecuación del conjunto de puntos G que tiene la propiedad de que para todo punto $P \in G$, la distancia entre P y (6,-2) es igual a 9.

34.- Construya la gráfica de la relación $R = \{(x,y) \mid (x+2)^2 + (y-3)^2 < 16\}$

35.- Construya la gráfica de la relación $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 4$ y $(x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 9\}$

RESPUESTAS DE LA AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO III.

1.- Circunferencia con centro en (1,4), radio = 1; dominio= $[0;2]$; recorrido= $[3;5]$; el origen es 4.

2.- Circunferencia con centro en (2,-3), radio = 2, dominio = $[0;4]$; recorrido = $[-1;-5]$; no tiene abscisas en el origen; y la ordenada en el origen es -3.

3.- Circunferencia con centro en (-3,5), radio = 3; dominio= $[-6;0]$; recorrido= $[2;8]$; no tiene abscisas en el origen y la ordenada en el origen es 5.

4.- Circunferencia con centro en (-1,-6), radio = 4; dominio = $[-5;3]$; recorrido = $[-10;-2]$; no tiene abscisas en el origen; y las ordenadas en el origen son $\sqrt{15} - 6$ y $-\sqrt{15} - 6$.

5.- Circunferencia con centro en (0,0), radio = $\sqrt{5}$; dominio= $[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$ las abscisas en el origen son $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$; y las ordenadas en el origen son $-\sqrt{5}$ y $\sqrt{5}$; recorrido= $[-\sqrt{5};\sqrt{5}]$.

6.- Circunferencia con centro en (0,0) radio= 5; dominio = $[-5;5]$; recorrido = $[-5;5]$; las abscisas en el origen son 5 y -5; las ordenadas en el origen son 5 y -5.

7.- Circunferencia con centro en (0,3), radio = 6; dominio= $[-6;6]$; recorrido $[-3;9]$; las absicas en el origen son $\sqrt{27}$ y $-\sqrt{27}$; y las ordenadas en el origen son 9 y -3.

8.- Circunferencia con centro en (-2,0), radio = 7; dominio= $[-9;5]$; recorrido = $[-7;7]$; las abscisas en el origen son 5 y -9; y las ordenadas en el origen son $3\sqrt{5}$ y $-3\sqrt{5}$.

9.- $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 6x - 8y = 0$

10.- $(x-5)^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 10x + 21 = 0$

11.- $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 3$; $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 2 = 0$

12.- $(x+1)^2 + (y+4)^2 = 9$; $x^2 + y^2 + 2x + 8y + 8 = 0$

13.- $x^2 + (y+6)^2 = 49$; $x^2 + y^2 + 12y - 13 = 0$

14.- $(x+2)^2 + (y-3)^2 = 37$; $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 24 = 0$

15.- $x^2 + y^2 = 4$; $x^2 + y^2 - 4 = 0$

16.- $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$; $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 4 = 0$

17.- Circunferencia imaginaria.

18.- Circunferencia; con centro en (5,12) y radio = 13.

19.- Circunferencia, con centro en (0,-5) y radio = 10.

20.- Punto (-2,3)

21.- Punto (3,5).

22.- Circunferencia imaginaria.

23.- Circunferencia ; con centro en (3,-4) y radio = 3.

24.- Circunferencia imaginaria.

25.- Punto (-1,-2).

26.- Circunferencia; con centro en (-3,0) y radio = $\sqrt{5}$.

27.- $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$; con centro en (4,1) y radio $= \sqrt{5}$.

28.- $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$; con centro en (-1,-2) y radio = 5.

29.- $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 12 = 0$; con centro en (3,-2) y radio = 5.

30.- $x^2 + y^2 - 6x - 3y = 0$.

31.- $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

32.- $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0$

33.- $x^2 + y^2 - 12x + 4y - 41 = 0$

LA PARABOLA.

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo, y de una recta fija. El punto fijo se llama foco y la recta fija se llama directriz. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se llama eje de simetría de la parábola. La parábola es una sección cónica que se puede obtener geométricamente, mediante el corte producido en un cono circular recto por un plano paralelo a la generatriz.

Para construir la parábola por trazo contínuo, se aplica una regla a la directriz, y en el vértice de una escuadra, opuesto al cateto menor, se sujeta uno de los extremos de un cordón de longitud igual al cateto mayor; el otro extremo del cordón se fija en el foco. Después, haciendo resbalar el cateto menor de la escuadra a lo largo de la regla, se describe la curva por medio de un lápiz, aplicado contra la escuadra, cuidando de mantener el cordón bien tirante. La curva así descrita es una parábola.

Para construir la parábola por puntos, se traza primero el eje de la parábola perpendicular a la directriz, se señala el foco y se fija el vértice de la parábola en el punto medio, entre el foco y el cordón con la directriz. Se trazan luego, a la derecha del vértice, diversas perpendiculares al eje, y se les corta, tomando por el centro el foco, con arcos de radios iguales a sus respectivas distancias a la directriz. Se obtienen así puntos de la parábola, que basta unir con un trazo contínuo para obtener la curva pedida. Efectivamente, todos estos puntos equidistan del foco y de la directriz.

René Descartes inició la Geometría Analítica en 1637. Por esta razón se le suele llamar geometría cartesiana, que esencialmente no es más que un método para estudiar la geometría por medio de un sistema de coordenadas, a cual se asocia el álgebra.

Estudia cuidadosamente esta unidad ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente la parábola.

2.- Reconocer la ecuación de una parábola en los dos casos siguientes:

a) Referida a su vértice y cuyo eje de simetría coincide con un eje coordenado.

b) No referida a su vértice y cuyo eje de simetría es paralelo a un eje coordenado.

3.- Dada la ecuación de una parábola, calcular correctamente sus elementos.

4.- Establecer correctamente el dominio y el recorrido (alcance) de la relación determinada por la ecuación dada.

5.- Construir correctamente la gráfica de una parábola definida por la ecuación:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{donde } a \neq 0.$$

6.- Encontrar gráficamente la unión o la intersección de una parábola con una recta, dadas sus relaciones respectivas, especificando su dominio y su recorrido o alcance.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo IV de tu libro "Geometría Analítica". Lee primero todo el capítulo, para que veas lo que vas a estudiar. Después, trata de comprender el significado del concepto parábola para que estés en condiciones de poderla definir.

Para el objetivo 2, estudia los teoremas 1 y 2 ya que son la base para este objetivo, junto con los ejemplos que se plantean, para que luego trates de resolver la autoevaluación 1.

Para el objetivo 3, estudia la sección 4-5 de tu texto y los ejemplos que ahí se resuelven. Luego resuelve los problemas de la autoevaluación 2.

Para el objetivo 4, puedes practicar con todos los ejemplos que vienen en el capítulo y con los problemas de las autoevaluaciones en general, mostrándole a tu maestro asesor la respuesta, para que estés más seguro de ella, o en caso contrario, te pueda asesorar debidamente. Te sugerimos que construyas primeramente la gráfica de la ecuación, determinando las coordenadas del vértice a partir del cual, se obtiene el dominio y el rango, utilizando la notación o los símbolos para especificar subconjuntos.

Para el objetivo 5, estudia la sección 4-6, donde encontrarás la forma de determinar los valores máximos y mínimos, para después graficar. Resuelve después la autoevaluación 3.

Para el objetivo 6, estudia los últimos ejemplos que vienen en el capítulo, para que veas cómo se grafican, sobre todo, las desigualdades, para que puedas saber cuándo el área va adentro o fuera de la ecuación. Como práctica de este objetivo, entre tus compañeros y tú póngase problemas para que los resuelvan bajo la supervisión de su maestro asesor.

2.- Una vez que te sientas seguro de tus objetivos, resuelve la autoevaluación del capítulo, para que así compruebes tu aprendizaje logrado. Además consulta todas tus dudas con tu maestro asesor.

CAPITULO 4.

LA PARÁBOLA.

4-1 INTRODUCCIÓN.

Conforme los matemáticos estudiaban los lugares geométricos de los puntos equidistantes de dos puntos y los lugares geométricos de los puntos equidistantes de dos rectas, era natural que debieran considerar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto y una recta. Este lugar geométrico es la parábola.

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a una recta y un punto fijo son iguales. El punto fijo se llama foco y la recta fija se llama directriz.

Se sabe que muchos objetos en movimiento describen trayectorias parabólicas. Una pelota lanzada al aire, el proyectil disparado por un cañón, la bomba que se deja caer desde un avión, un chorro de agua que sale por una manguera seguiría una trayectoria parabólica si pudiera despreciarse la resistencia del aire. Por lo tanto, al disparar una granada de artillería, si se conocen el ángulo de elevación del cañón y su velocidad inicial, es posible calcualr la ecuación de su trayectoria en el aire. Entonces es posible calcular previamente a qué distancia caerá el proyectil y cuánto tiempo tardará en llegar hasta esa distancia. Haciendo variar el ángulo de elevación del cañón, puede hacerse variar la trayectoria del proyectil en el aire.

De manera semejante, puede determinarse la ecuación de la trayectoria de la bomba que se deja caer desde un avión. A partir de la ecuación, la velocidad del avión, la altura a la cual se encuentra éste y la posición del blanco, puede determinarse cuando cae la bomba.

En la actualidad, el procedimiento está tan mecanizado que el bombardeo no necesita considerar la ecuación; es más, ni siquiera necesita saber de su existencia. Sin embargo, las personas responsables de esa mecanización del procedimiento tienen que aplicar con amplitud estas ecuaciones.

La curva parabólica también es útil en la construcción de muchos objetos físicos. Frecuentemente se usa el arco parabólico en la construcción de puentes porque es más resistente que cualquier otro.

Las curvas parabólicas se usan ampliamente en la construcción de reflectores de luz, sonido y calor.

Los proyectores, faros buscadores, fanales, y las antenas de radar son ejemplos de reflectores parabólicos que se obtienen haciendo girar una parábola alrededor de su eje. La superficie así formada se llama paraboloide de revolución.

Inversamente, si rayos paralelos chocan contra una superficie parabólica, los rayos reflejados convergerán al foco de la parábola. Esta propiedad se aplica en algunos de los telescopios de reflexión. Los rayos que provienen de los cuerpos celestes son muy aproximadamente paralelos cuando pasan a través del telescopio. Estos rayos se concentran en el foco del espejo parabólico del telescopio, formando así una imagen relativamente brillante y clara.

El alumno que empieza a estudiar este libro, puede preguntarse con toda razón: ¿Qué es la Geometría Analítica? ¿Qué gano al estudiarla? Muchas famosas instituciones de enseñanza superior han reconocido los beneficios positivos que puede obtener todo aquel que estudie esta rama de las matemáticas.

El estudio de la Geometría Analítica es parte esencial de la preparación que necesita el ingeniero, hombre de ciencia, arquitecto y dibujante para tener éxito. El carpintero, maquinista, hojalatero, cantero, artista, diseñador, etc., todos aplican los principios de la Geometría Analítica en su trabajo.

4-2 LA PARABOLA.

La ecuación de la parábola la deduciremos a partir de su definición como el lugar geométrico de un punto que se mueve de acuerdo con una ley especificada.

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz de la parábola. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz.

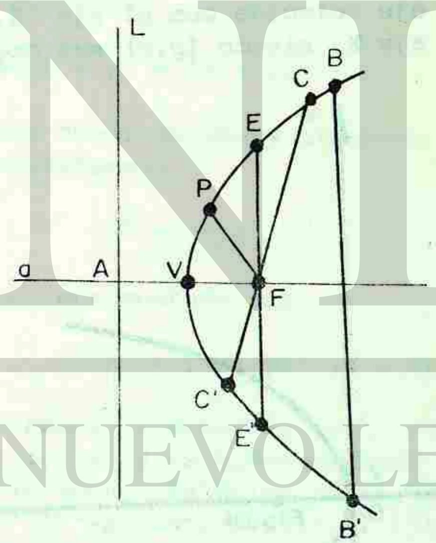


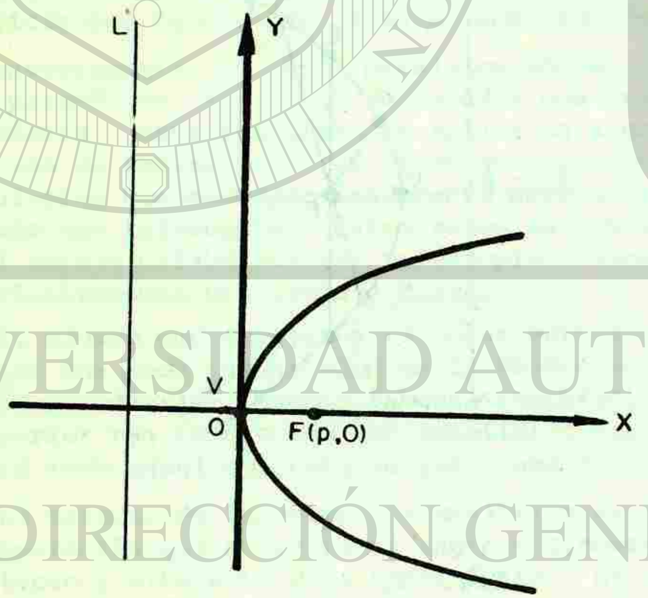
Fig. 1.

Designemos por F y "L" (fig. 1) el foco y la directriz de una parábola, respectivamente. La recta "a" que pasa por F y es perpendicular a "l" se llama eje de la parábola. Sea A el punto de intersección del eje y la directriz.

El punto V, punto medio del segmento AF, está por definición, sobre la parábola; este punto se llama vértice. El segmento de recta BB' que une a dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama cuerda. En particular, la cuerda que pasa por el foco como CC' se llama cuerda focal. La cuerda focal EE' perpendicular al eje se llama lado recto o ancho focal.

4-3 ECUACION DE LA PARABOLA CON VERTICE EN EL ORIGEN Y EL EJE DE SIMETRIA COINCIDE CON UN EJE COORDENADO.

Veremos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideraremos la parábola cuyo vértice está en el origen (Fig. 2) y cuyo eje coincide con el eje X. Entonces el foco F está sobre el eje X, siendo (p,o) sus coordenadas.



X= p; p> O

FIG.— 2

Por la definición de la parábola, la ecuación de la directriz"l" es x = -p. Sea P (x,y) un punto cualquiera de la parábola. Por P tracemos el segmento PA perpendicular a"l". Entonces por la definición de la parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}| \qquad (1)$$

Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos de la figura 2:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

y $$|\overline{PA}| = |x + p|$$

por tanto, la condición geométrica (1) está expresada, analíticamente por la ecuación:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y simplificamos, obtenemos:

$$y^2 = 4px \qquad (2)$$

cuya relación está representada por:

$$R = \{ (x,y) \mid y^2 = 4px \}$$

Ahora discutiremos la ecuación (2). Evidentemente, la curva pasa por el origen y no tiene ninguna otra intersección con los ejes coordenados. La única simetría que posee el lugar geométrico de (2) es con respecto al eje X. Despejando "y"de la ecuación (2), tenemos:

$$y = \pm 2\sqrt{px} \qquad (3)$$

por tanto, para valores de "y" reales y diferentes de 0, p y x deben ser del mismo signo. Según esto, podemos considerar dos casos:

$$p > 0 \quad y \quad p < 0$$

Si $p > 0$, deben excluirse todos los valores negativos de x, y todo el lugar geométrico se encuentra a la derecha del eje Y. Como no se excluye ningún valor positivo de x, y como "y" puede tomar todos los valores reales, el lugar geométrico de (2) es una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y y hacia arriba y abajo del eje X, relación cuyo dominio y recorrido se expresa en la forma siguiente:

$$\text{Dominio} = [0; \infty)$$
$$\text{Recorrido} = (-\infty; \infty)$$

La gráfica de la relación representada por la ecuación (2) es la indicada en la figura 2 y se dice que la parábola se abre hacia la derecha.

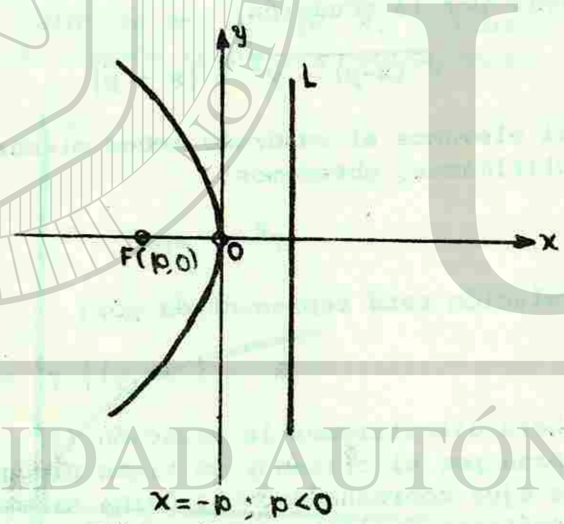


Fig. 3.

Análogamente si $p < 0$, todos los valores positivos deben de excluirse en la ecuación (3) y todo el lugar geométrico aparece a la izquierda del eje Y, es una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia la izquierda del eje Y y hacia arriba y abajo del eje X, relación cuyo dominio y recorrido se expresan:

$$\text{Dominio} = (-\infty; 0]$$
$$\text{Recorrido} = (-\infty; \infty)$$

En este caso, la gráfica de la relación representada por la ecuación (2) es la indicada en la figura 3 y se dice que la parábola se abre hacia la izquierda.

Según la ecuación (3), hay dos puntos sobre la parábola que tienen abscisa igual a p; uno de ellos tiene la ordenada 2p y el otro la ordenada -2p. Como la abscisa del foco es p, se sigue que la longitud del lado recto (ancho focal) de la parábola es igual al valor absoluto de la cantidad 4p.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje Y, se puede demostrar análogamente, que la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4py \qquad (4)$$

cuya relación se representa como $R = \{(x,y) \mid x^2 = 4py\}$ en donde el foco es el punto (o,p). Puede demostrarse fácilmente que, si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba (fig. 4-a), siendo el dominio y el recorrido de la relación representada por la ecuación de la parábola, los siguientes:

$$\text{Dominio} = (-\infty; \infty)$$
$$\text{Recorrido} = [0; \infty)$$

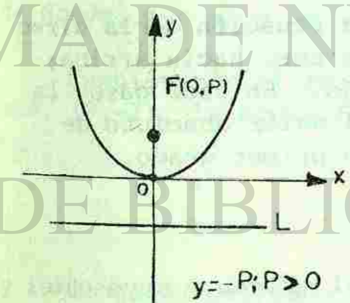


Fig. 4-a.

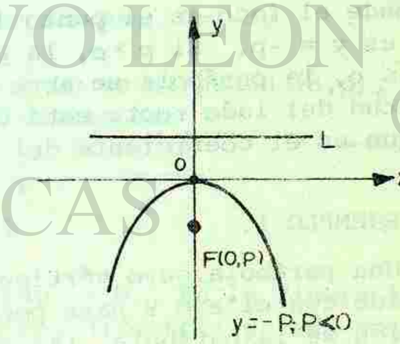


Fig. 4-b.

Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo (fig. 4-b), siendo el dominio y el recorrido los siguientes:

$$\text{Dominio} = (-\infty; \infty)$$

$$\text{Recorrido} = (-\infty; 0]$$

Las ecuaciones (2) y (4) se llaman a veces la primera ecuación ordinaria de la parábola. Como son las ecuaciones más simples de la parábola, nos referimos a ellas como a las formas canónicas.

Los resultados anteriores se resumen como sigue:

TEOREMA 1.

La relación de una parábola de vértice en el origen y eje de simetría sobre el eje X, es:

$$R = \{(x,y) \mid y^2 = 4px\}$$

en donde el foco es el punto (p,o) y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > o$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < o$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, y el vértice está en el origen, su relación es:

$$R = \{(x,y) \mid x^2 = 4py\}$$

en donde el foco es el punto (o,p), y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > o$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < o$, la parábola se abre hacia abajo. En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de $4p$, que es el coeficiente del término de primer grado.

EJEMPLO 1.

Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto $(4,-2)$. Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la

ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

SOLUCIÓN:

Por el teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py \quad (4); \quad p < o$$

como la parábola pasa por el punto $(4,-2)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación (4), y tenemos:

$$16 = 4p(-2)$$

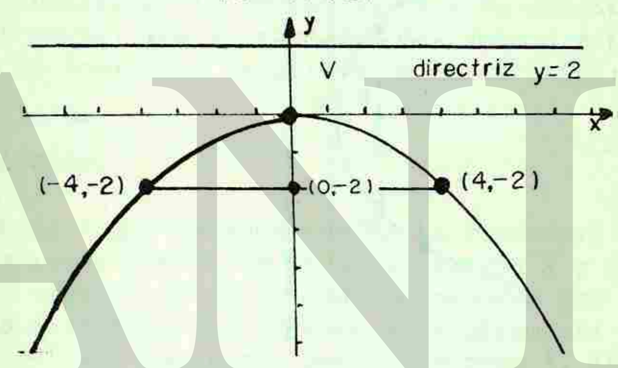


Fig. 5.

de donde, $p = -2$ y la ecuación buscada es, $x^2 = -8y$.

También por el teorema 1, el foco es el punto (o,p), o sea, $(0,-2)$; la ecuación de la directriz es:

$$y = -p$$

o sea $\quad y = 2$

y la longitud del lado recto es $|4p| = 8$. En la figura 5, se ha trazado el lugar geométrico, foco, directriz y lado recto.

EJEMPLO 2.

Encuentre el vértice, el foco, los puntos extremos del lado recto y la ecuación de la directriz de la parábola, $y^2 = -8x$; construya la curva y dé el dominio y el recorrido de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid y^2 = -8x\}$$

SOLUCIÓN:

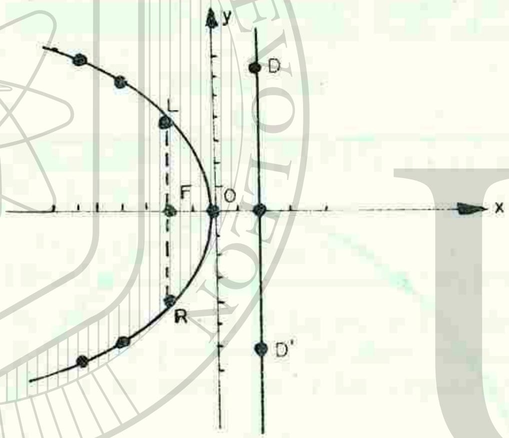


Fig. 6.

La ecuación, $y^2 = -8x$ es de la forma $y^2 = 4px$ con $p = -2$, de modo que el vértice está en el origen, el foco es $F(-2,0)$ y la ecuación de la directriz, $x = 2$. Se encuentra también que la longitud $|RL|$ del lado recto es $|4p| = |-8| = 8$, o sea que $|FL| = |FR| = 4$ y los puntos extremos del lado recto son $L(-2,4)$ y $R(-2,-4)$. Hasta aquí, sabemos que la parábola tiene su concavidad hacia la izquierda y que los puntos $0(0,0)$, $L(-2,4)$ y $R(-2,-4)$ pertenecen a la parábola.

Para obtener puntos adicionales haga uso de la ecuación de la curva; por ejemplo, si $x = -4$ se obtiene $y^2 = 32$ y si $x = -6$, $y^2 = -48$, de donde se ve que los puntos $(-4, 4\sqrt{2})$, $(-4, -4\sqrt{2})$, $(-6, 4\sqrt{3})$ y $(-6, -4\sqrt{3})$ pertenecen a la pa-

rábola, la cual se muestra en la figura 6. En esta figura se ve claramente que:

Dominio de R = $(-\infty; 0]$

Recorrido de R= $(-\infty; \infty)$

Esta parábola es simétrica respecto al eje X, pero no lo es respecto al eje Y ni respecto al origen.

EJEMPLO 3.

Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz de la recta, $y - 5 = 0$, encontrar la longitud del lado recto, las coordenadas del foco y establecer correctamente el dominio y recorrido de la relación; trazar la curva.

SOLUCIÓN:

Debido a que la ecuación de la directriz es, $y - 5 = 0$, o sea la recta $y = 5$, es paralela al eje X y como la parábola tiene su vértice en el origen, se observa que el valor absoluto de la distancia del vértice a la directriz y al foco es igual a 5. Por lo tanto, por el teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py \quad (4); \quad p < o$$

El eje de simetría de la parábola coincide con el eje Y las coordenadas del foco son: $F(0, -5)$, la ecuación de la parábola es: $x^2 = 4(-5)y = -20y$ por lo que la longitud del lado recto es, $|-20| = 20$ y paralelo al eje X cortando a la parábola en los puntos $(-10,-5)$ y $(10, -5)$.

De la figura 7 es fácil observar que el dominio y recorrido son: $(-\infty;\infty)$ y $(-\infty; 0]$ respectivamente.

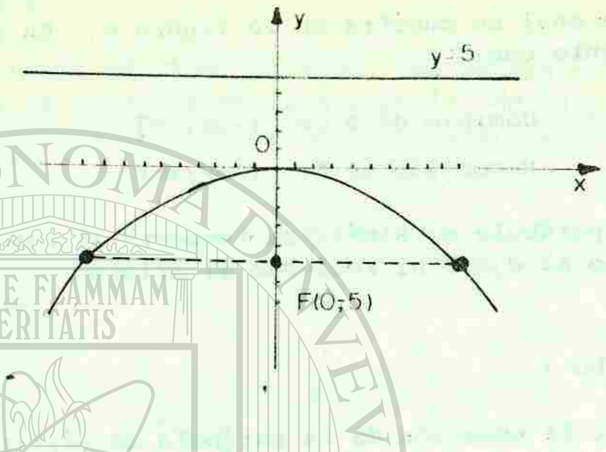


Fig. 7.

EJEMPLO 4.

Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen que satisface la siguiente condición: con foco en la parte positiva del eje Y y lado recto de longitud 8. Construya la curva y dé el dominio y recorrido de la relación así como la ecuación de la directriz.

SOLUCIÓN:

La longitud del lado recto es igual a $4p = 8$; por lo que $p = 2$; el foco está en la parte positiva del eje Y y a una distancia p del vértice (0,0). Las coordenadas del foco son F(0,2) y la ecuación de la directriz es, $y = -2$ por lo que la parábola abre sus ramas hacia arriba y por el teorema 1 su ecuación es:

$$x^2 = 4py; \quad p > o$$

$$\text{o sea} \quad x^2 = 4\,(2)y$$

$$= 8y$$

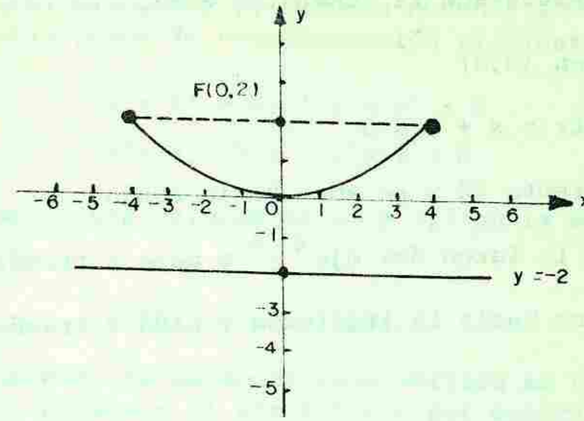


Fig. 8.

Los extremos del lado recto tocan la curva en los puntos cuyas coordenadas son, (-4,2) y (4,2). El dominio y recorrido se obtiene fácilmente del lugar geométrico de la curva en la figura 8.

Dominio $= (-\infty ; \infty)$

Recorrido $= [0 ; \infty)$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Encontrar las coordenadas del foco, las coordenadas de los extremos del lado recto y la ecuación de la directriz de cada parábola. Bosqueje la cruva.

1.- $y^2 = 4x$

2.- $x^2 = -10y$

3.- $y^2 + 3x = 0$

Escriba la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que satisface la condición dada.

4.- Foco en (3,0)

5.- Directriz $x + 6 = 0$

6.- Lado recto 12 y se abre hacia abajo.

7.- Eje a lo largo del eje "y" y pasa a través de (4,-3).

8.- Se abre hacia la izquierda y pasa a través de (-1,-1).

4-4 ECUACION DE UNA PARABOLA DE VERTICE EN (h, k) Y EJE PARALELO A UN EJE COORDENADO.

Frecuentemente necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideraremos la parábola, (fig. 9) cuyo vértice es el punto (h,k) y cuyo eje es paralelo al eje X. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h,k), se sigue por el teorema 1 que la ecuación de la parábola de referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por:

$$y'^2 = 4px' \qquad (5)$$

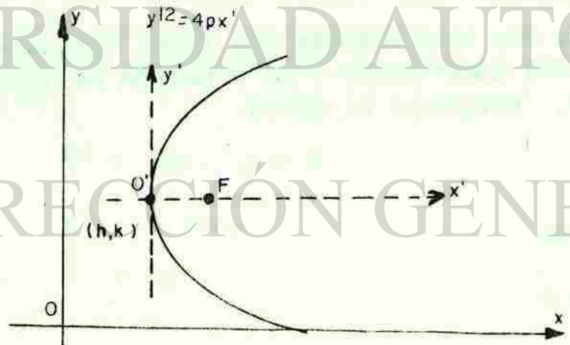


Fig. 9.

en donde las coordenadas del foco F son (p, o) referido a los nuevos ejes. A partir de la ecuación de la parábola referida a los ejes originales X y Y, podemos obtener la ecuación (5) usando las ecuaciones de transformación siguientes:

$$x = x' + h; \quad y = y' + k$$

de donde, $$x' = x - h; \quad y' = y - k$$

si sustituimos estos valores de x' y y' en la ecuación (5), obtenemos:

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h) \qquad (6)$$

Análogamente, la parábola cuyo vértice es el punto (h,k) y cuyo eje es paralelo al eje Y tiene por ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k) \qquad (7)$$

en donde $|p|$ es la longitud de aquella porción del eje comprendida entre el foco y el vértice.

Las ecuaciones (6) y (7) se llaman generalmente, segunda ecuación ordinaria de la parábola.

Los resultados anteriores, junto con los obtenidos en el teorema 1, conducen al siguiente:

TEOREMA 2.

La ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo al eje X, es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.

Si $p > o$, la parábola se abre hacia la derecha y el dominio y recorrido son respectivamente, $[h;\infty)$ y $(-\infty;\infty)$.

Si $p < 0$, la parábola se abre hacia la izquierda y el do-minio y recorrido son respectivamente, $(-\infty\,;\,h]$ y $(-\infty\,;\,\infty)$.

Si el vértice es el punto (h, k) y el eje de la parábola es paralelo al eje Y, su ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Si $p > 0$, la parábola se abre hacia arriba y su dominio y recorrido son respectivamente, $(-\infty\,;\,\infty)$ y $[k\,;\,\infty)$.

Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo y su dominio y recorrido son respectivamente, $(-\infty\,;\,\infty)$ y $(-\infty\,;\,k]$.

EJEMPLO 1.

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto $(3,4)$ y cuyo foco es el punto $(3,2)$. Hallar también la ecuación de su directriz, la longitud del lado recto, el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN:

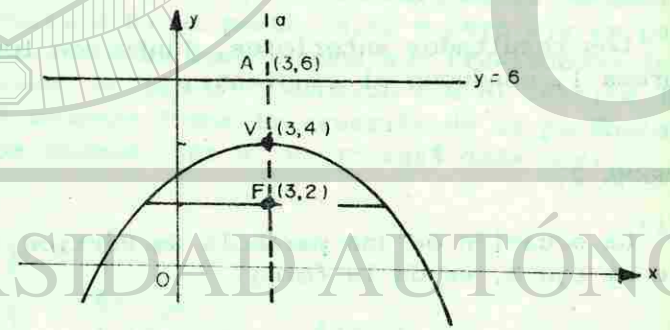


Fig. 10.

Como el vértice V y el foco F de una parábola están sobre su eje, y como en este caso cada uno de estos puntos tiene la misma abscisa 3, se sigue que el eje "a" es paralelo al eje Y, como se indica en la figura 10. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

como el vértice V es el punto $(3,4)$, la ecuación puede escribirse:

$$(x-3)^2 = 4p(y-4)$$

Ahora bien, $|p| = |\overline{FV}| = |\,4-2\,| = 2$. Pero, como el foco F está abajo del vértice V, la parábola se abre hacia abajo y p es negativo. Por tanto, $p = -2$ y la ecuación de la parábola es:

$$(x-3)^2 = -8(y-4)$$

y la longitud del lado recto es 8.

Designemos por A el punto en que el eje "a" corta la directriz l. Como V $(3,4)$ es el punto medio del segmento AF, se sigue que las coordenadas de A son $(3,6)$. Por tanto, la ecuación de la directriz es $y = 6$.

De la figura 10, fácilmente se observa que el dominio y el recorrido son respectivamente, $(-\infty\,;\,\infty)$ y $(-\infty\,;\,4]$.

EJEMPLO 2.

Encuentre la ecuación de la parábola cuyos extremos de su lado recto son los puntos $(3,1)$ y $(3,5)$ si su foco está a la derecha del vértice. Encuentre también la ecuación de la directriz, las coordenadas del foco, el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN:

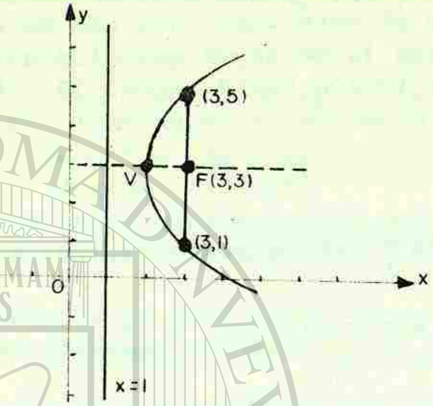


Fig. 11.

Observamos de los datos del problema que los extremos del lado recto de la parábola tienen ambos abscisa 3. Si el foco de la parábola está a la derecha del vértice la parábola abre sus brazos hacia la derecha. El foco se encuentra localizado exactamente a la mitad de la longitud del lado recto, por lo que sus coordenadas son F(3,3).

Si la longitud del lado recto es (5-1) = 4, entonces $|4p| = 4$ y por lo tanto $p = 1$. El vértice C está en (2,3) y la ecuación de la directriz es, $x = 1$ (fig. 11). El dominio es, $[2;\infty)$ y el recorrido es, $(-\infty,+\infty)$.

EJEMPLO 3.

Establezca la ecuación de la parábola cuyo vértice está en (-3,4) y cuyo foco es (-5,4); halle las coordenadas de los extremos del lado recto, la ecuación de la directriz, construya la curva y dé el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN:

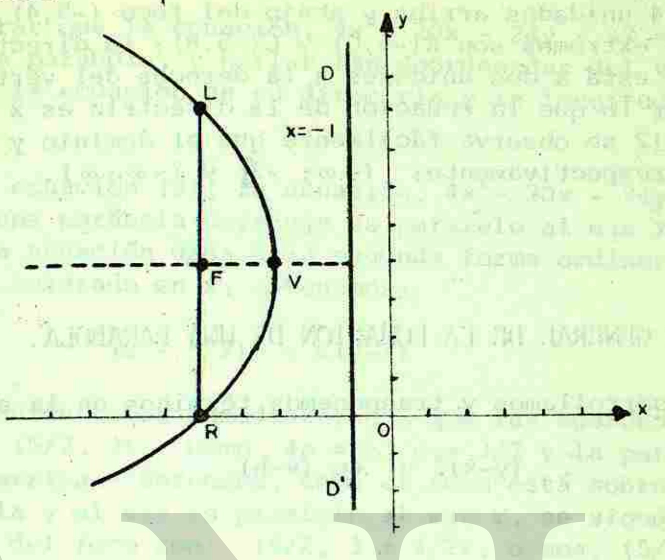


Fig. 12.

Como el vértice y el foco de una parábola están sobre su eje, y como en la parábola dada, estos puntos tienen la misma ordenada 4, se deduce que el eje es horizontal como se ve en la fig. 12. Entonces por el teorema 2 la ecuación buscada es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h)$$

como p siempre es igual a $\overline{VF}$, en este caso se tiene:

$$p = -5 - (-3)$$
$$= -2$$

y haciendo $h = -3$, $k = 4$ y $p = -2$ se obtiene:

$$(y-4)^2 = -8\,(x+3)$$

como ecuación.

Como $|2p| = 4$, los extremos del lado recto están respectivamente 4 unidades arriba y abajo del foco (-5,4), o sea que dichos extremos son R(-5,0) y L(-5,8); la directriz es vertical y está a dos unidades a la derecha del vértice (-3,4), por lo que la ecuación de la directriz es $x = -1$. De la figura 12 se observa fácilmente que el dominio y el recorrido son respectivamente: $(-\infty; -3]$ y $(-\infty; \infty)$.

4-5 FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA PARABOLA.

Si desarrollamos y trasponemos términos en la ecuación,

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

obtenemos:

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$$

puede escribirse en la forma:

$$Ay^2 + Dx + Ey + F = 0; \; A \neq 0, \; D \neq 0 \qquad (8)$$

donde $A \neq 0$, $D = -4p$, $E = -2k$, $F = k^2 + 4ph$.

Recíprocamente, completando el cuadrado en y, podemos demostrar que una ecuación de la forma (8), representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje X o superpuesto a él.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la parábola,

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Por tanto, la gráfica de

$$Bx^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (9)$$

en que $B \neq 0$ y $E \neq 0$ es una parábola de eje paralelo al eje Y o superpuesto a él.

EJEMPLO 1.

Demostrar que la ecuación, $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Por la ecuación (9), la ecuación, $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y. Si reducimos la ecuación dada a la segunda forma ordinaria, completando el cuadrado en x, obtenemos:

$$(x - 5/2)^2 = 6(y-3)$$

de esta ecuación vemos inmediatamente que las coordenadas del vértice son (5/2, 3). Como $4p = 6$, $p = 3/2$ y la parábola se abre hacia arriba. Entonces, como el foco está sobre el eje de la parábola y el eje es paralelo al eje Y, se sigue que las coordenadas del foco son: (5/2, 3 + 3/2), o sea, (5/2, 9/2). La ecuación de la directriz es, $y = 3 - 3/2$, o sea, $y = 3/2$ y la longitud del lado recto es $|4p| = 6$. Se recomienda al alumno que dibuje la figura correspondiente a este ejemplo.

EJEMPLO 2.

Encuentra el vértice, el foco y los extremos del lado recto de la parábola representada por la ecuación:

$$3x^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

construya la curva, dé las ecuaciones de la directriz y del eje. Establezca correctamente su dominio y recorrido.

SOLUCIÓN:

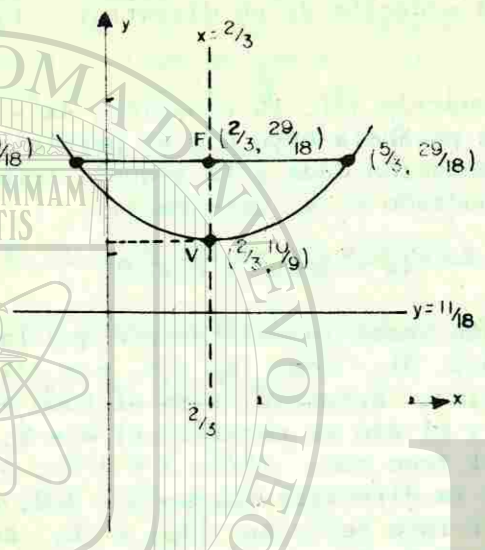


Fig. 13.

Dividiendo la ecuación dada entre 3, queda:

$$x^2 - \frac{4}{3}x - 2y + \frac{8}{3} = 0$$

y completando el cuadrado en x se tiene:

$$(x - \frac{2}{3})^2 = 2(y - \frac{10}{9})$$

Por tanto, el vértice está en V(2/3, 10/9) y $|4p| = 2$ en donde p = 1/2 y la parábola abre sus brazos hacia arriba. La ecuación del eje de simetría es, x = 2/3 y las coordenadas del foco son, F(2/3, 10/9 + 1/2) ó F(2/3, 29/18).

La ecuación de la directriz es, y= 10/9 - 1/2 = 11/18 si la longitud del lado recto es $|4p| = 2$, entonces los puntos extremos de dicho lado recto son respectivamente, (- 1/3, 29/18) y (5/3, 29/18). De la fig. 13, el dominio y el recorrido son respectivamente, $(-\infty ; \infty)$ y $[10/9 ; \infty)$.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Escriba la ecuación de la parábola, en forma ordinaria que satisface las condiciones dadas.

1.- V(0,3), F(4,3)

2.- V(2,3), F(6,3)

3.- V(3,3), F(-3,3)

4.- V(-1,-2), lado recto 12, se abre hacia abajo.

5.- V(2,1), extremos del lado recto, (-1,-5) y (-1,7)

Expresen las ecuaciones de las parábolas siguientes en forma ordinaria. En cada caso encuentre las coordenadas del vértice del foco y de los extremos del lado recto. Bosqueje la curva.

6.- $y^2 - 8x + 8 = 0$

7.- $y^2 + 12x - 48 = 0$

8.- $x^2 + 4x - 16y + 4 = 0$

9.- $y^2 - 8y + 6x + 16 = 0$

10.- $y^2 + 4y + 8x - 28 = 0$

11.- $x^2 - 8x + 6y - 8 = 0$

12.- $y^2 + 14y - 24x - 119 = 0$

Encuentre la ecuación de la parábola en forma general.

13.- V(-1, -2); eje vertical, pasa a través de (3,6).

14.- Eje horizontal, pasa a través de (1,1), (1,-3) y (-2,0).

15.- Eje vertical, pasa a través de (-1, -3), (1, -2) y (2,1)

4-6 LA FUNCION CUADRATICA.

La forma, $ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama función cuadrática de x o trinomio de segundo grado, y puede ser investigada por medio de la relación:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (10)$$

La ecuación (10) se representa gráficamente por una parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje Y. Por tanto las propiedades analíticas de la función cuadrática pueden estudiarse convenientemente por medio de las propiedades geométricas de la parábola (10).

Si reducimos la ecuación (10) a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, completando al cuadrado en x, obtenemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2}{4a} - c\right)$$

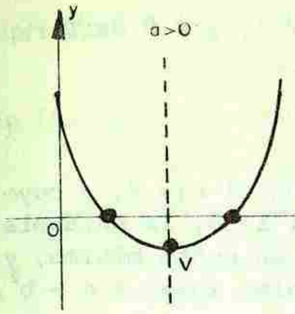


Fig. 14-a.

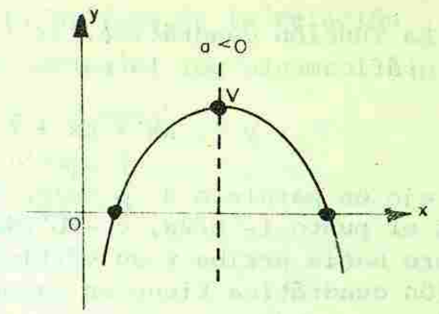


Fig. 14-b.

que es la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo a o coincide con el eje Y, y cuyo vértice es el punto $(-b/2a, c - b^2/4a)$. Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (fig. 14-b).

Un punto de una curva contínua cuya ordenada sea algebraicamente mayor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama punto máximo de la curva. Análogamente, un punto cuya ordenada sea algebraicamente menor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama punto mínimo de la curva. Evidentemente, si $a > 0$ (fig. 14-a), la parábola (10) tiene un solo punto mínimo, el vértice V. De manera semejante $a < 0$ (fig. 14-b), la parábola (10) tiene un único máximo, el vértice V.

La interpretación analítica es bien obvio. Como las coordenadas del vértice V de la parábola son $(-b/2a, c-b^2/4a)$, se sigue que si $a > 0$ la función cuadrática tiene, para $x = -b/2a$, un valor mínimo igual a $c - b^2/4a$ y si $a < 0$ tiene, para $x = -b/2a$ un valor máximo igual a $c - b^2/4a$.

Resumimos estos resultados en el siguiente:

TEOREMA 3.

La función cuadrática, $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ está representada gráficamente por la parábola:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (10)$$

cuyo eje es paralelo a o coincide con el eje Y, y cuyo vértice es el punto $(-b/2a,\ c - b^2/4a)$ si $a > 0$, la parábola (10) se abre hacia arriba y su vértice es un punto mínimo, y la función cuadrática tiene un valor mínimo igual a $c - b^2/4a$ cuando $x = -b/2a$.

Si $a < 0$, la parábola (10) se abre hacia abajo y su vértice es un punto máximo y la función cuadrática tiene un valor máximo igual a $c - b^2/4a$ cuando $x = -b/2a$.

AUTOEVALUACION 3.

Encuentre las coordenadas del punto mínimo y máximo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones y comprobar el resultado gráficamente.

1.- $y = x^2 - 8x + 10$
2.- $y = 1 - 6x - x^2$
3.- $y = 4x^2 + 4x + 1$
4.- $y = 9 - 6x - x^2$
5.- $y = 3x^2 - 3x - 4$
6.- $y = 4x^2 + 16x + 19$
7.- $y = 24x - 3x^2 - 47$
8.- $y = x^2 - 6x + 9$
9.- $y = 4x - 2x^2 - 5$

4-7 INTERSECCION DE UNA PARABOLA CON UNA RECTA.

Asociadas a la parábola R, gráfica de la relación

$$R = \{(x,y) \mid y^2 = 4px\}$$

existen las gráficas de las relaciones:

$$R_1 = \{(x,y) \mid y^2 > 4px\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \mid y^2 < 4px\}$$

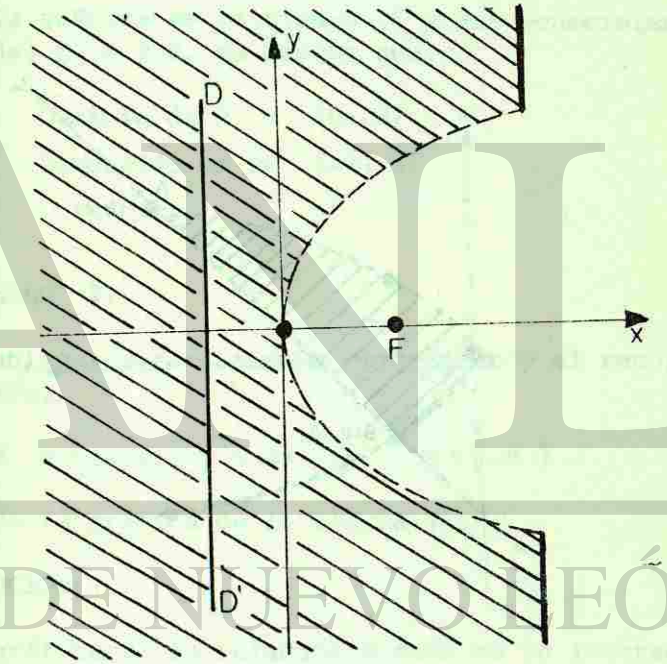


Fig. 15.

La gráfica de R_1 está formada por todos los puntos del plano exteriores a la parábola R representados por el área sombreada de la fig. 15.

Análogamente, la gráfica de R_2 está formada por todos los puntos del plano interiores a la parábola R representados por el área no sombreada de la fig. 15.

EJEMPLO 1.

Construya la gráfica de la siguiente relación,

$$R = \{(x,y) \mid y^2 < 2x \quad y \quad y > x - 4\}$$

y establezca correctamente su dominio y recorrido.

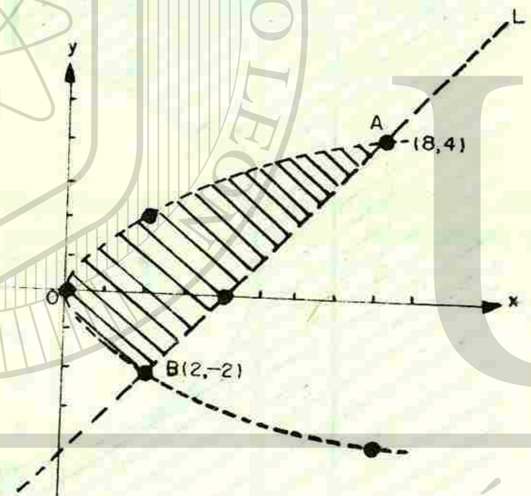


Fig. 16.

SOLUCIÓN:

La gráfica de la relación R dada arriba, es la intersección entre las dos desigualdades de la relación. O sea que, la gráfica de R es la intersección de las gráficas de:

$$R_1 = \{(x,y) \mid y^2 < 2x\}$$

$$y \quad R_2 = \{(x,y) \mid y > x - 4\}$$

Como la gráfica de R_1 consta de todos los puntos interiores a la parábola y la de R_2 está formada por los puntos que están por arriba de la recta L (fig. 16), se concluye que la gráfica de R es el conjunto de los puntos comunes a las de R_1 y R_2, que es la parte sombreada en la fig. 16. Los puntos de intersección A y B entre la recta y la parábola se determinan resolviendo simultáneamente sus ecuaciones.

De la gráfica de la figura 16 y del conocimiento de las coordenadas de A y B, se deduce que:

Dominio de R = (0; 8)

Recorrido de R = (-2; 4)

EJEMPLO 2.

Establecer correctamente el dominio y el recorrido de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid y^2 < 2x \quad y \quad y < x-4\}$$

utilizando la gráfica de la figura 16.

SOLUCIÓN:

La gráfica de la relación R dada es la intersección de las gráficas de:

$$R_1 = \{(x,y) \mid y^2 < 2x\}$$

$$R_3 = \{(x,y) \mid y < x-4\}$$

como la gráfica de R_1 consta de todos los puntos interiores a la parábola y la de R_3 está formada por los puntos que están por abajo de la recta L (fig. 16), se concluye que la gráfica de R en este ejemplo es el conjunto de los puntos comunes a las de R_1 y R_3, que es la parte no sombreada en la figura 16. De dicha figura se obtiene:

Dominio de R = $(2;\infty)$

Recorrido de R= $(-\infty;\infty)$

Se puede observar de la figura 16 que las gráficas de la parábola y de la línea recta están trazadas con línea punteada. Esto significa que sus relaciones respectivas son desigualdades y por tanto, el dominio y el recorrido se encierran en paréntesis circular.

AUTOEVALUACION DEL CAPITULO IV.

A partir de la relación de la siguiente parábola, encuentra lo siguiente:

$$R = \{(x,y) \mid x^2 = -16y\}$$

1.- Determine las coordenadas del vértice.

0) (0,4) 1) 4,0) 2) (0,0)
3) 2,2)

2.- Determine las coordenadas del foco.

0) (0,-4) 1) (-4,0) 2) (4,0)
3) (0,4)

3.- Encuentre la ecuación de la directriz.

0) x = 4 1) y = 4 2) x = -4
3) y = 0

4.- Identifique el eje de simetría:

0) Simétrica respecto a y = 4.
1) Simétrica respecto a eje X.
2) Simétrica respecto a eje Y.
3) Simétrica respecto a x = 4.

5.- Dé el dominio.

0) $(0;\ \infty)$ 1) $(0;0)$ 2) $(0;\ -\infty)$
3) $(-\infty;\ \infty)$

6.- Dé el recorrido.

0) $(-\infty;\ \infty)$ 1) $[\infty;\ 0)$ 2) $(\infty;\ 0]$
3) $(-\infty;\ 0]$

Encuentre las ecuaciones de las parábolas de vértice en el origen, que satisfacen la siguiente condición:

7.- Pasa por el punto (2,4) y tiene su foco en el eje X.

0) $y^2 = 4x$ 1) $x^2 = 8y$ 2) $y^2 = 8x$
3) $y^2 = 2x$

8.- Tiene como directriz la recta, $x - 3 = 0$.

0) $y^2 = -12x$ 1) $x^2 = -12y$ 2) $x^2 = -4y$
3) $y^2 = 12x$

9.- A partir de la definición de la parábola, encuentra la ecuación de la parábola de foco (0,-5) y directriz y=3.

0) $x^2+16y+16=0$ 1) $x^2+ 16 = 1$ 2) $y^2+ 16$
3) $y^2+ 16x + 16 = 0$

A partir de la siguiente relación, contesta lo siguiente:

$$R = \{(x,y) \mid y^2<4x \quad y \quad y > x-3\}$$

10.- Dé el dominio.

0) (0; 6) 1) (-1; 8) 2) (-2; 9)
3) (0; 9)

11.- Dé el recorrido.

0) (-1; 1) 1) (0; -1) 2) (-2; 6)
3) (-4; 8)

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO IV.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- F(1,0); lado recto en (1,-2), (1,2); directriz x= -1.

2.- F(0, -5/2); lado recto en, (-5,-5/2),(5, -5/2), directriz y= 5/2

3.- F(-3/4, 0); lado recto en, (-3/4, -3/2), (-3/4, 3/2); directriz 4x = 3

4.- $y^2 = 12x$

5.- $y^2 = 24x$

6.- $x^2 = -12y$

7.- $3x^2 + 16y = 0$

8.- $y^2 = -x$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $(y-3)^2 = 16x$

2.- $(y-3)^2 = 16(x - 2)$

3.- $(y-3)^2 = -24 (x - 3)$

4.- $(x + 1)^2 = -12 (y + 2)$

5.- $(y-1)^2 = -12 (x - 2)$

6.- $y^2 = 8 (x-1)$; V(1,0) F(3,0); (3,-4), (3,4)

7.- $y^2 = -12 (x-4)$; V(4,0) F(1,0); (1,-6), (1,6)

8.- $(x+2)^2 = 16y$; V(-2,0) F(-2,4); (-10,4), (6,4)

9.- $(y-4)^2 = -6x$; V(0,4), F(-3/2, 4); (-3/2, 1), (-3/2,7)

10.- $(y+2)^2 = -8(x-4)$; V(4,-2); F(2,-2); (2,-6), (2,2)

11.- $(x-4)^2 = -6(y-4)$; V(4,4) ; F(4, 5/2) ; (1,5/2) , (7, 5/2)

12.- $(y+7)^2 = 24(x+7)$; V(-7,-7) ; F(-1,-7) ; (-1,-19) , (-1,5)

13.- $x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

14.- $y^2 - x + 2y - 2 = 0$

15.- $5x^2 + 3x - 6y - 20 = 0$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- mín (4,6)	6.- mín (-2,3)
2.- máx (-3,10)	7.- máx (4,1)
3.- mín (-1/2, 0)	8.- mín (3,0)
4.- máx (-3,18)	9.- ———
5.- mín (1/2, -19/4)	

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO IV.

1.- (2)	7.- (2)
2.- (0)	8.- (0)
3.- (1)	9.- (0)
4.- (2)	10.- (3)
5.- (3)	11.- (2)
6.- (3)	

LA ELIPSE.

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos tales que, la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos del mismo plano, es contante. Los puntos fijos se llaman focos, las rectas que unen a cualquier punto de la curva con los focos se denominan radio vectores. La recta horizontal que pasa por los focos y termina en la elipse se llama díametro mayor o eje focal; la recta perpendicular en el punto medio del eje focal se denomina diámetro menor o eje no focal; la distancia entre los focos se llama - distancia focal. El punto de intersección de los ejes se llama centro de la elipse.

Para construir la elipse por trazo contínuo, se toma un cordón de longitud igual al eje focal, se fijan sus extremos en los focos y por medio de un lápiz se mantiene el cordón - tirante y se describe la curva.

La elipse es una sección cónica que se puede obtener - geométricamente, mediante el corte de un cono circular recto por un plano oblículo que no sea paralelo a la generatriz.

René Descartes, pensó la forma de aplicar el álgebra a la geometría, y la geometría al álgebra y de esta manera inventó la útil rama de las matemáticas denominada Geometría Analítica; cuyo objeto es el de estudiar las propiedades relativas a los conjuntos de puntos, entre los cuales está la elipse aquí descrita.

Estudia esta unidad ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente el concepto, la elipse.

11.- $(x-4)^2 = -6(y-4)$; V(4,4) ; F(4, 5/2) ; (1,5/2), (7, 5/2)

12.- $(y+7)^2 = 24(x+7)$; V(-7,-7) ; F(-1,-7) ; (-1,-19), (-1,5)

13.- $x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

14.- $y^2 - x + 2y - 2 = 0$

15.- $5x^2 + 3x - 6y - 20 = 0$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- mín (4,6)	6.- mín (-2,3)
2.- máx (-3,10)	7.- máx (4,1)
3.- mín (-1/2, 0)	8.- mín (3,0)
4.- máx (-3,18)	9.- –––
5.- mín (1/2, -19/4)	

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO IV.

1.- (2)	7.- (2)
2.- (0)	8.- (0)
3.- (1)	9.- (0)
4.- (2)	10.- (3)
5.- (3)	11.- (2)
6.- (3)	

LA ELIPSE.

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos tales que, la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos del mismo plano, es contante. Los puntos fijos se llaman focos, las rectas que unen a cualquier punto de la curva con los focos se denominan radio vectores. La recta horizontal que pasa por los focos y termina en la elipse se llama díametro mayor o eje focal; la recta perpendicular en el punto medio del eje focal se denomina diámetro menor o eje no focal; la distancia entre los focos se llama - distancia focal. El punto de intersección de los ejes se llama centro de la elipse.

Para construir la elipse por trazo contínuo, se toma un cordón de longitud igual al eje focal, se fijan sus extremos en los focos y por medio de un lápiz se mantiene el cordón - tirante y se describe la curva.

La elipse es una sección cónica que se puede obtener - geométricamente, mediante el corte de un cono circular recto por un plano oblículo que no sea paralelo a la generatriz.

René Descartes, pensó la forma de aplicar el álgebra a la geometría, y la geometría al álgebra y de esta manera inventó la útil rama de las matemáticas denominada Geometría Analítica; cuyo objeto es el de estudiar las propiedades relativas a los conjuntos de puntos, entre los cuales está la elipse aquí descrita.

Estudia esta unidad ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente el concepto, la elipse.

2.- Calcular correctamente los elementos de una elipse conocida su ecuación.

3.- Encontrar la ecuación de una elipse en los siguientes casos:

a) Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados.

b) Los ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados.

4.- Construir la gráfica de una relación definida por la expresión general:

$$S = \{(x,y) \mid \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\}$$

y determinar correctamente el dominio y recorrido.

5.- Describir el lugar geométrico que representa cualquier ecuación que pertenezca a la fórmula general:

$$A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo V de tu libro "Geometría Analítica". Al igual que en la unidad anterior, te sugerimos que, primero leas todo el capítulo en una forma rápida, para que puedas observar lo que vas a contestar.

2.- En cada sección del capítulo se exponen ejemplos ilustrativos, para que observes el prcedimiento, para que, luego trates de resolver las autoevaluaciones que se incluyen a lo largo del capítulo. A continuación, se dan las secciones que se proponen para los objetivos:

OBJETIVO 1. Estudia todo el capítulo para que logres comprender mejor el concepto de elipse y luego estudia la sección 5-2 para que la defínas.

OBJETIVO 2. Estudia la sección 5-2 del capítulo y luego resuelve los primeros 5 problemas de la autoevaluación 2.

OBJETIVO 3. Estudia las secciones 5-3 y 5-4 del capítulo y resuelve las autoevalaciones 1 y 2.

OBJETIVO 4. Estudia los ejemplos que vienen en el capítulo para que construyas sus gráficas y luego trates de encontrar su dominio y recorrido. Para ello, te sugerimos que encuentres las coordenadas de los puntos extremos de los diámetros mayor y menor.

OBJETIVO 5. Estudia la sección 5-5 del capítulo y resuelve la autoevaluación 3. Para una mejor comprensión de este objetivo, te sugerimos que, después de que escribas la ecuación de la elipse en la forma:

$$A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M,$$

puedes hacer las siguientes observaciones:

a) *Si*, $M = 0$. La gráfica es un solo punto; o sea:

$$(-D/2A, \quad -E/2C)$$

b) *Si*, $M > 0$. La gráfica es la ecuación de la elipse que puede escribirse como:

$$\frac{(x + D/2A)^2}{M/A} + \frac{(y + E/2C)^2}{M/C} = 1$$

c) *Si*, $M < 0$. La gráfica es el conjunto vacío, puesto que no pueden existir ejes negativos, o bien, al obtener la raíz cuadrada en la ecuación, siendo M negativo, obtendríamos un número imaginario.

3.- Por último, una vez que te sientas seguro de tus objetivos, resuelve tu autoevaluación, para que así compruebes tu aprendizaje logrado. Todas tus dudas, consúltalas con tu maestro asesor.

CAPITULO 5.

LA ELIPSE.

5-1 INTRODUCCIÓN.

Recordemos que la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a una distancia dada de un punto fijo. Consideremos ahora un lugar geométrico asociado con las distancias a dos puntos fijos.

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos para los cuales la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.

Los puntos fijos se llaman focos de la elipse.

Puede obtenerse una construcción mecánica sencilla de una elipse con la ayuda de dos chinches y un trozo de cuerda (ver fig. 1). Colóquense dos chinches en una mesa de dibujo en los puntos F_1 y F_2. Estos puntos serán los focos de la elipse. A continuación tómese un trozo de cuerda cuya longitud sea mayor que la distancia $F_1 F_2$. Fíjense los extremos de la cuerda a las chinches. Colóquese un lápiz en el $F_1P\ F_2$ y múevase manteniendo la cuerda tirante. Entonces $F_1P + F_2P$ es constante

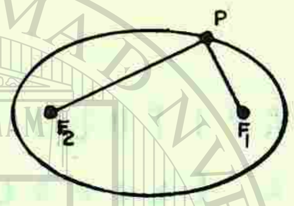


Fig. 1.

y la curva trazada será un elipse. Nuevamente, el estudiante debe descubrir las diversas formas de la elipse cuando F_1F_2 se mantiene fija y se hace variar la longitud de la cuerda.

La elipse puede construirse con regla y compás, pero en esta discusión estamos principalmente interesados en las propiedades y aplicaciones de la curva.

Frecuentemente se usa la elipse para lograr efectos artísticos. A menudo se ven formas elípticas en los jardines, paseos, albercas y en loza y muebles. En la construcción se usa el arco elíptico donde se desea lograr la belleza y los requeri-

mientos de resistencia no son críticos. El arco elíptico se considera más bello que el arco parabólico.

En las máquinas se usan engranes elípticos donde se requiere un avance lento y un retorno rápido.

Los astrónomos han demostrado que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de los focos. Nuestra Tierra, por ejemplo, en su viaje anual alrededor del Sol recorre una trayectoria elíptica con el Sol en uno de los focos. Por lo tanto, en las diferentes estaciones del año, la distancia del Sol a la Tierra variará.

De modo semejante, la trayectoria de la Luna respecto a la Tierra es una elipse con la Tierra en uno de los focos. Las órbitas de los satélites de otros planetas también son elípticas. En la astronomía es esencial el conocimiento de las trayectorias (lugares geométricos) a lo largo de las cuales se mueven estos planetas y sus satélites. Los astrónomos pueden expresar estos movimientos mediante ecuaciones y, a partir de estas ecuaciones, predecir con un alto grado de exactitud cosas como los eclipses lunares y solares.

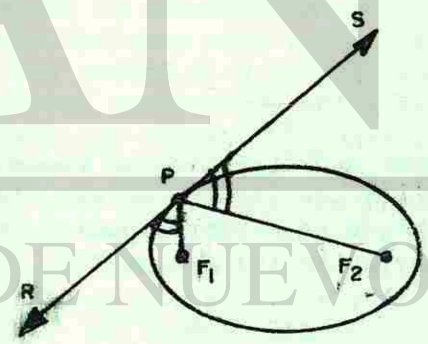


Fig. 2.

La elipse, como la parábola, tiene una propiedad geométrica que la hace útil para reflejar la luz y el sonido (ver fig. 2).

Dos rectas trazadas desde los focos F_1 y F_2 hacia cualquier punto P sobre la elipse formarán ángulos congruentes con $\angle RPF_1 \cong \angle SPF_2$. Debido a esta propiedad geométrica y a la propiedad de las superficies reflectoras mencionada en la discusión de los reflectores parabólicos, si se coloca una fuente de luz en cualquiera de los focos de una superficie elíptica, los rayos incidentes sobre de la superficie se reflejarán hacia el otro foco. En realidad, cuando se usan reflectores elípticos, la superficie reflectora es la que se obtiene al hacer girar la elipse alrededor de la recta F_1F_2. Esta superficie se denomina elipsoide de revolución.

Las ondas sonoras se reflejan en la misma forma que las ondas luminosas. Por lo tanto, si al techo de un cuarto se le da la forma de un semielipsoide, un sonido débil que se produjera en uno de los focos se escucharía con claridad en el otro foco que puede estar a una distancia considerable. Generalmente el sonido no se escucha en los otros puntos. Locales construidos de esa manera se conocen como galerías de los murmullos.

5-2 LA ELIPSE.

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

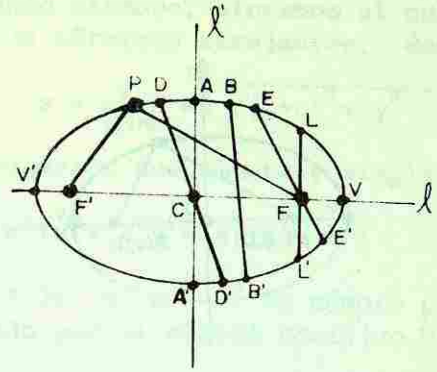


Fig. 3.

Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

Designemos por F y F' (fig. 3) los focos de una elipse. La recta l que pasa por los focos tienen varios nombres; veremos que es conveniente introducir el término de eje focal para designar esta recta. El eje focal corta a la elipse en dos puntos V y V', llamados vértices. La porción del eje focal comprendida entre los vértices, el segmento VV', se llama eje mayor. El punto C del eje focal, punto medio del segmento que une los focos, se llama centro. La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l, tiene varios nombres; encontraremos conveniente introducir el término eje no focal para designarla. El eje no focal l' corta a la elipse en dos puntos A y A', y el segmento AA' se llama eje menor. Un segmento tal como BB', que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, se llama cuerda. En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos, tal como EE', se llama cuerda focal. Una cuerda focal tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama lado recto. Evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos.

5-3 ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJES DE SIMETRÍA SUPERPUESTOS A LOS EJES COORDENADOS.

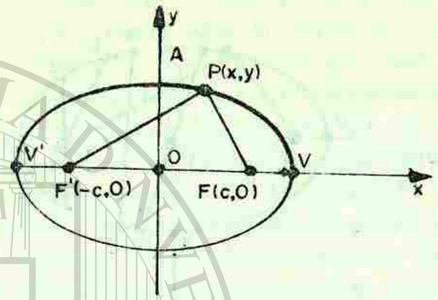


Fig. 4.

Consideremos la elipse de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 4). Los focos F y F' están sobre el eje X. Como el centro 0 es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, (c,o) y (-c, o), respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea P(x,y) un punto cualquiera de la elipse. Por definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condición geométrica,

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a \qquad (1)$$

en donde "a" es una constante positiva mayor que "c".

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$|\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por la ecuación:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (2)$$

Para simplificar la ecuación (2), pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Esto nos da,

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado nuevamente y simplificando obtenemos:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (3)$$

Como $2a > 2c$ y $a^2 - c^2$ es número positivo que puede ser reemplazado por el número positivo b^2, es decir,

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad (4)$$

si en (3) reemplazamos $a^2 - c^2$ por b^2, obtenemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

y dividiendo por a^2b^2, se obtiene finalmente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Por tanto, el punto P está sobre la elipse cuya ecuación está dada por (5).

Por ser "a" y "-a" las intersecciones con el eje X, las coordenadas de los vértices V y V' son (a,o) y (-a,o), res-pectivamente, y la longitud del eje mayor es igual a 2a, la constante que se menciona en la definición de la elipse. Las intersecciones con el eje Y son "b" y "-b". Por tanto, las coordenadas A y A' del eje menor son (o,b) y (o,-b), respectiva-mente y la longitud del eje menor es igual a 2b.

Por la ecuación (5) vemos que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Si de la ecuación (5) despejamos "y", obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (6)$$

Por tanto, se obtienen valores reales de "y" solo para valores de x en el intervalo,

$$-a \leq x \leq a$$

Si de la ecuación (5) despejamos x, obtenemos:

$$x = \pm \frac{b}{a} \sqrt{b^2 - y^2}$$

de manera que se obtienen valores reales de x, solo para valores de "y" dentro del intervalo,

$$-b \leq y \leq b$$

de aquí se deduce que la elipse está limitada por el rectángulo cuyos lados son las rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$. Por tanto, la elipse es una curva cerrada.

La abscisa del foco F es c. Si en (6) sustituímos x por este valor, se obtienen las ordenadas correspondientes que son:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

de donde, por la relación (4),

$$y = \pm \frac{b^2}{a}$$

por tanto, la longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$.

Análogamente, la longitud del lado recto para el foco F' es $2b^2/a$.

Consideremos ahora el caso en que el centro de la elipse está en el origen, pero su eje focal coincide con el eje Y. Las coordenadas de los focos son entonces (o,c) y (o,-c). En este caso por el mismo porcedimiento empleado para deducir la ecuación (5), hallamos que la ecuación de la elipse es,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (7)$$

en donde "a" es la longitud del semieje mayor, "b" la longitud del semieje menor, y $a^2 = b^2 + c^2$.

Las ecuaciones (5) y (7) se llaman, generalmente, primera ecuación ordinaria de la elipse y son las ecuaciones más simples.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente,

TEOREMA 1.

La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a 2c y cantidad constante igual a 2a es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal de la elipse coinicde con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (o,c) y (o,-c), la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, "a" es la longitud del semieje mayor, "b" la del semieje menor y, a,b,c están ligados por la relación,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$.

NOTA.

Si reducimos la ecuación de una elipse a su forma ordinaria, podemos determinar fácilmente su posición relativa a los ejes coordenados comparando los denominadores de los términos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

EJEMPLO 1.

Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje Y. Si uno de los focos es el punto (o,3) y el semieje focal es 6, hallar las coordenadas del otro foco, las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos y el dominio y el recorrido de la relación representada por la ecuación.

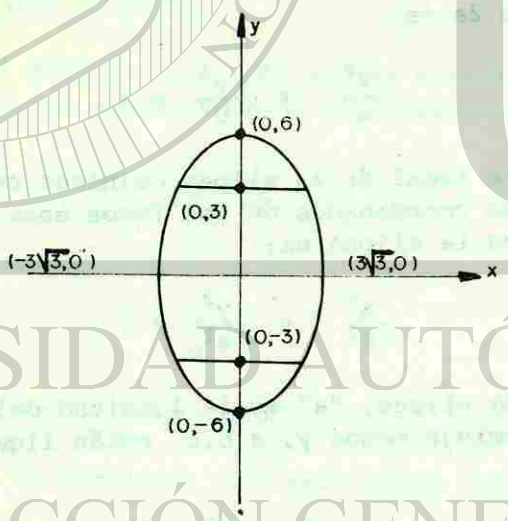


Fig. 5.

SOLUCIÓN:

Como uno de los focos es el punto (o,3), tenemos c=3, y las coordenadas del otro foco son (o,-3). Como el semieje focal es 6, a=6. Tenemos también:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$= \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

Por tanto, las longitudes de los ejes mayor y menor son, $2a = 12$ y $2b = 6\sqrt{3}$, respectivamente.

Por el teorema 1, la ecuación de la elipse es,

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$$

la longitud de cada lado recto es, $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(27)}{6} = 9$

El lugar geométrico es representado en la fig. 5 y evidentemente el dominio y el recorrido son respectivamente, $[-3\sqrt{3}\,;\ 3\sqrt{3}]$ y $[-6;\ 6]$

EJEMPLO 2.

Construya la gráfica de la elipse, $16x^2 + 25y^2 = 400$ y dé el dominio y el recorrido de la relación, $R = \{(x,y) \mid 16x^2 + 25y^2 = 400\}$.

SOLUCIÓN:

Dividiendo ambos miembros de la ecuación dada entre 400, se obtiene la ecuación equivalente,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

y como 25 > 16, esta ecuación es de la forma,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, por lo que la gráfica de la ecuación dada es una elipse con centro en el origen y con sus focos sobre el eje X.

Para esta elipse, a=5 y b=4, por lo que $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$ y c=3; entonces los vértices son, V_1 (5,o) y V_2 (-5,o); los extremos del eje menor están en B_1(o,4) y B_2(o,-4) y los focos son, F_1(3,o) y F_2 (-3,o). Además,

$$|R_1L_1| = |R_2L_2| = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5}$$

de modo que los extremos de los lados rectos son, R_1 (3,-16/5), L_1(3, 16/5), R_2(-3,-16/5), L_2(-3,16/5). El lugar geométrico se encuentra en la fig. 6.

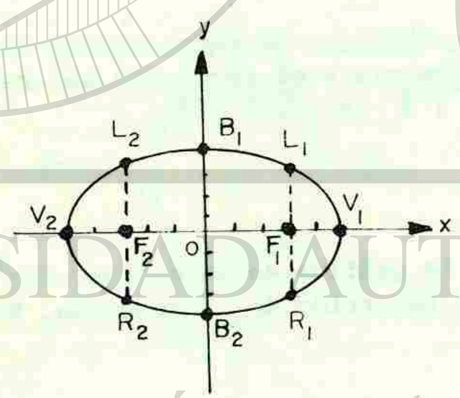


Fig. 6.

Es evidente que el dominio y el recorrido de la relación representada por la ecuación son respectivamente:

Dominio = [-5; 5]

Recorrido = [-4; 4]

AUTOEVALUACIÓN 1.

Halle las coordenadas de los focos, los extremos de los ejes y los extremos de cada lado recto en los problemas siguientes. A partir de esta información bosqueje las curvas y establezca su dominio y recorrido.

1.- $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$

2.- $\frac{y^2}{25} + \frac{x^2}{16} = 1$

3.- $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

4.- $x^2 + 4y^2 = 9$

5.- $2x^2 + 3y^2 = 12$

Escriba las ecuaciones de las elipses cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados, y que satisfacen las condiciones dadas en los siguientes problemas.

6.- Foco (2,o); vértice (5,o).

7.- Eje menor 12; vértice (9,o).

8.- Extremo del eje menor (5,o); longitud del lado recto 50/13.

9.- Pasando a través de (3, $\sqrt{2}$) y ($\sqrt{6}$, 2).

5-4 ECUACIÓN DE LA ELIPSE DE CENTRO (h,k) Y EJES PARALELOS A LOS COORDENADOS.

Ahora consideraremos la determinación de la ecuación de una elipse cuyo centro no está en el origen y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Según esto, consideremos la elipse cuyo centro está en el punto (h,k) y cuyo eje focal es paralelo al eje X, tal como se indica en la fig. 7.

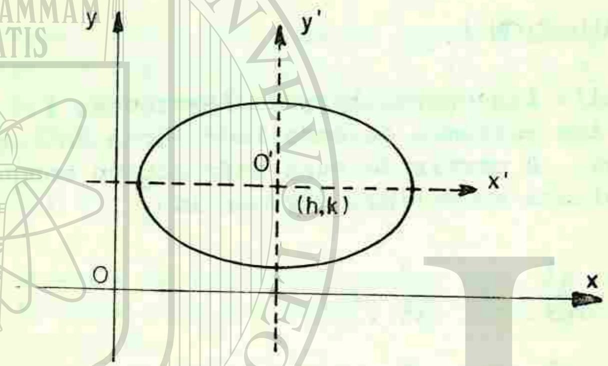


Fig. 7.

Sean 2a y 2b las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen o' coincida con el centro (h,k) de la elipse, se sigue, del Teorema 1 que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

De la ecuación (8) puede deducirse la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y usando las ecuaciones de transformación siguientes:

$$x = x' + h; \qquad y = y' + k$$

$$x' = x - h; \qquad y = y - k$$

si sustituimos estos valores de x' y y' en la ecuación (8) obtenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

que es la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y.

Análogamente, podemos demostrar que la elipse cuyo centro es el punto (h,k) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) se llaman, generalmente, la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Los resultados precedentes, junto con el Teorema 1, nos dan el siguiente:

TEOREMA 2.

La ecuación de la elipse de centro el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, "a" es la longitud del semieje mayor, "b" es la del semieje menor, "c" es la distancia del centro a cada foco, y a,b y c están ligadas por la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $2b^2/a$.

EJEMPLO 1.

Los vértices de una elipse tienen por coordenadas $(-3,7)$ y $(-3,-1)$ y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos, y el dominio y el recorrido de la relación.

SOLUCIÓN:

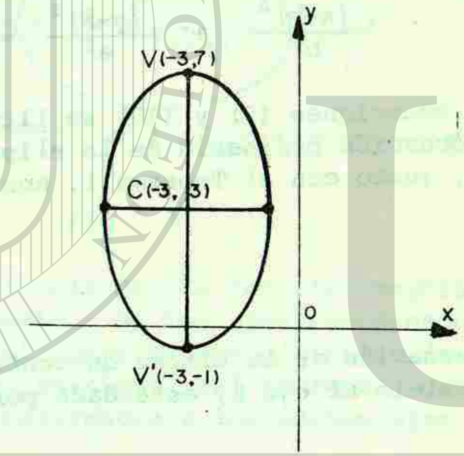


Fig. 8.

Como los vértices V y V' están sobre el eje focal y sus abscisas son ambas -3, se sigue (fig. 8) que el eje focal es paralelo al eje Y. Por tanto, por el Teorema 2, la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

El centro C es el punto medio del eje mayor VV', y sus coordenadas son, por lo tanto $(-3,3)$. La longitud del eje mayor VV' es 8, como se puede ver fácilmente.

Por tanto, $2a=8$ y $a=4$. La longitud del lado recto es $2b^2/a = 2$. Como $a=4$, se sigue que $2b^2 = 8$, de donde $b=2$, y la longitud del eje menor es 4. Luego, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

También, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, de donde $c = 2\sqrt{3}$. Por tanto, las coordenadas de los focos son:

$$F\ (-3,\ 3 + 2\sqrt{3}) \quad y$$

$$F'(-3,\ 3\ -2\sqrt{3})$$

El lugar geométrico de esta elipse es el representado en la fig. 8 y se puede observar claramente que el dominio y el recorrido son respectivamente:

$$\text{Dominio} = [-5;\ -1]$$

$$\text{Recorrido} = [-1;\ 7]$$

EJEMPLO 2.

Halle la ecuación de la elipse con centro en $C(-1,2)$, con un vértice en $V_1(-1,5)$ y con un foco en $F_1(-1,\ 2+\sqrt{5})$.

SOLUCIÓN:

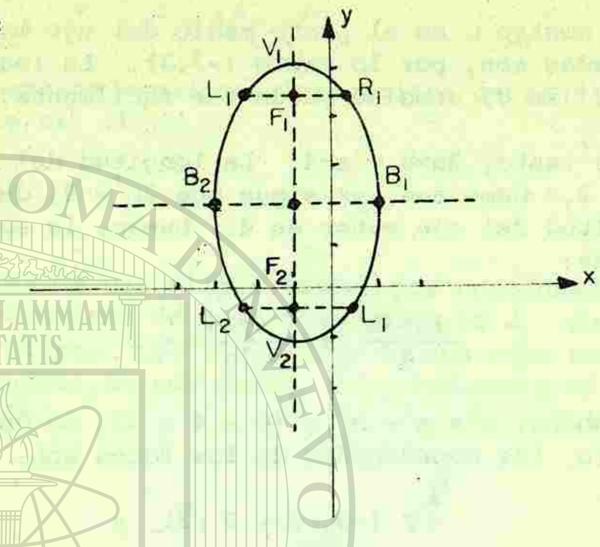


Fig. 9.

De los datos: $c = |CF_1| = \sqrt{5}$ y $a = |CV_1| = 3$; usando $b^2 = a^2 - c^2$, se encuentra, $b^2 = 9 - 5 = 4$, de modo que $b = 2$; como el eje mayor es vertical, el teorema 2 permite afirmar que la elipse es la gráfica de:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

El otro vértice está en V $(-1,-1)$ y el otro foco es F $(-1,\ 2 - \sqrt{5})$; los extremos del eje menor son $B_1(1,2)$ y B_2 $(-3,\ 2)$; la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$, igual a 8/3 en este caso, por lo que los puntos extremos de los lados rectos son $R_1(1/3,\ 2 + \sqrt{5})$, $L_1(-7/3,\ 2 + \sqrt{5})$, $R_2(1/3,\ 2 - \sqrt{5})$ y L_2 $(-7/3,\ 2 - \sqrt{5})$.

El lugar geométrico de esta elipse se muestra en la fig. 9 de donde se ve fácilmente que el dominio y el recorrido son respectivamente:

Dominio = $[-3;\ 1]$
Recorrido = $[-1;\ 5]$

EJEMPLO 3.

A partir de la siguiente ecuación de una elipse, encuentre, el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje menor, las longitudes de los ejes mayor y menor así como la del lado recto, las coordenadas de los extremos de ambos lados rectos y, finalmente, construya la curva y dé el dominio y su recorrido.

Ecuación: $$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

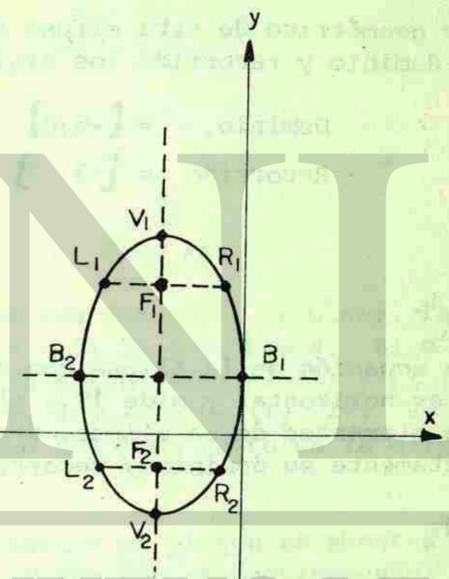


Fig. 10.

Como $25 > 9$, esta ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

en la que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$; en consecuencia, la gráfica de la ecuación dada es una elipse de eje mayor vertical con centro en C(-3,2). Como a = 5, b = 3 y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $c = \sqrt{16} = 4$, los vértices son $V_1(-3,7)$ y V_2 (-3,-3), los extremos del eje menor están en B_1 (o,2) y B_2 (-6,2) y los focos en F_1 (-3,6) y F_2 (-3,-2), la longitud $|RL|$ de un lado recto está dada por

$$|RL| = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{5} = \frac{18}{5}$$

de modo que los extremos de los lados rectos son (fig.10): R_1 (-6/5, 6), L_1 (-24/5, 6), R_2 (-6/5, -2) y L_2 (-24/5, -2).

El lugar geométrico de esta elipse se muestra en la fig. 10 siendo su dominio y recorrido los siguientes:

Dominio = [-6;0]

Recorrido = [-3; 7]

EJEMPLO 4.

Halle la ecuación de la elipse con centro en (-4,-2) si su eje mayor es horizontal y mide 10 y el eje menor mide 8. Encuentre los elementos de la elipse, trace la curva y establezca correctamente su dominio y recorrido.

SOLUCIÓN:

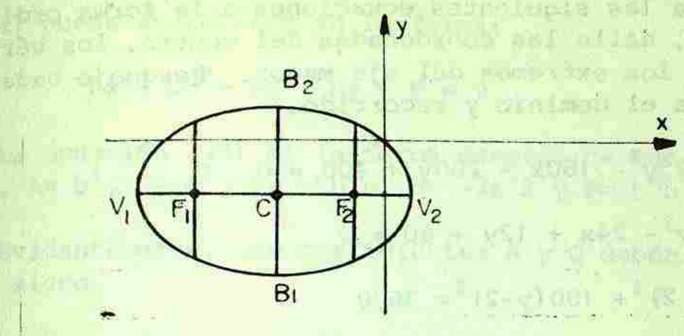


Fig. 11.

De acuerdo con los datos del problema, la elipse es horizontal y 2a = 10; a = 5; 2b = 8; b = 4. Si $c^2 = a^2 - b^2$, c=3. Por tanto, los focos están en F_1(-7,-2) y F_2 (-1,-2) y los vértices están en V_1 (-9,-2), V_2 (1, -2), B_1 (-4,-6), B_2 (-4,2). La longitud del lado recto de la elipse es $2b^2/a$ = 32/5.

El lugar geométrico es el que se muestra en la fig. 11 cuyo dominio y recorrido son respectivamente:

Dominio = [-9;1]

Recorrido = [-6;2]

AUTOEVALUACION 2.

Reduzca las siguientes ecuaciones a la forma ordinaria. En cada una, halle las coordenadas del centro, los vértices, los focos y los extremos del eje menor. Bosqueje cada curva y establezca el dominio y recorrido.

1.- $16x^2 + 25y^2 - 160x - 200y + 400 = 0$

2.- $3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$

3.- $36(x + 2)^2 + 100(y-2)^2 = 3600$

4.- $225(x+2)^2 + 289(y+3)^2 = 65025$

Escriba la ecuación de la elipse que satisface las condiciones en cada problema. Bosqueje la curva.

5.- Centro (5,1), vértice (5,4), extremo del eje menor (3,1).

6.- Extremos del eje menor (-1,2) y (-1,-4), foco (1,-1).

7.- Un punto se mueve de modo que la suma de sus distancias desde (-4,3) y (4,3) es 12. Halle la ecuación de su trayectoria.

5-5 LUGAR GEOMETRICO DE LA RELACION DE UNA ELIPSE CUYA ECUACION PERTENECE A LA FORMA GENERAL: $A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$.

Consideremos ahora la ecuación de la elipse en la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

Si quitamos denominadores, desarrollamos, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

la cual puede escribirse en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (11)$$

La ecuación (11) es la forma general de una elipse en donde, $A= b^2$, $C= a^2$, $D= -2b^2h$, $E= -2a^2k$ y $F= b^2h^2+a^2k^2-a^2b^2$.

Evidentemente, los coeficientes A y C deben de ser del mismo signo.

Recíprocamente, consideremos una ecuación de la forma (11) y reduzcámosla a la forma ordinaria (9) completando cuadrados. Obtenemos:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = M \qquad (12)$$

donde,

$$M = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

entonces:

a) Si $M = 0$, la gráfica es un solo punto, $(-D/2A, -E/2C)$ llamado usualmente una elipse punto.

b) Si $M > 0$, la ecuación (12) puede escribirse,

$$\frac{(x + D/2A)^2}{M/A} + \frac{(y + E/2C)^2}{M/C} = 1 \qquad (13)$$

que es la ecuación de una elipse con centro en $(-D/2A, -E/2C)$; el eje mayor es horizontal o vertical según que M/A sea mayor que M/C o viceversa.

c) Si $M < 0$, la gráfica no representa ningún lugar geométrico real y por lo tanto es el conjunto vacío.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Por tanto, tenemos el siguiente:

TEOREMA 3.

Si los coeficientes A y C son del mismo signo, la relación,

$$\{(x,y) \mid Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}$$

representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún l gar geométrico real.

EJEMPLO 1.

La relación de una elipse es:

$$\{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0\}$$

Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto, mostrar el lugar geométrico en un diagrama y especificar el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN:

Vamos a reducir la ecuación dada a la forma ordinaria, completando los cuadrados. Resulta:

$$(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6$$

y $$(x^2+2x+1) + 4(y^2-3y+9/4) = -6 + 1 + 9$$

de donde, $$(x+1)^2 + 4(y - 3/2)^2 = 4$$

de manera que la forma ordinaria es:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3/2)^2}{1} = 1$$

Las coordenadas del centro C son, evidentemente, (-1, 3/2), y el eje focal es paralelo al eje X. Como $a^2 = 4$, a=2 y las coordenadas de los vértices V y V' son: (1,3/2) y (-3, 3/2), respectivamente. Como $c^2 = a^2 - b^2$, resulta, $c = \sqrt{4-1}$

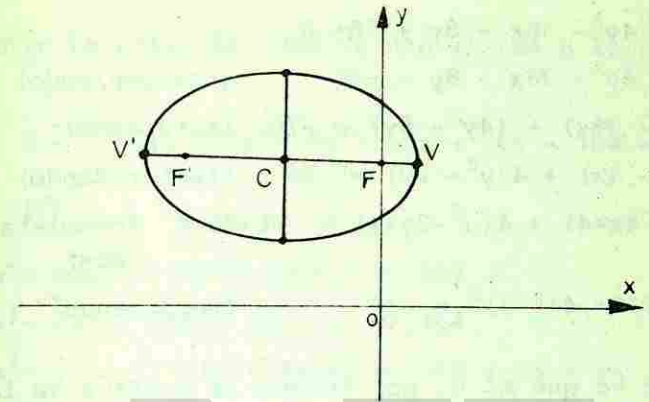


Fig. 12.

$= \sqrt{3}$, y las coordenadas de los focos F y F' son, $(-1 + \sqrt{3}, 3/2)$ y $(-1 - \sqrt{3}, 3/2)$, respectivamente. La longitud del eje mayor es 2a=4, la del eje menor es 2b=2, y la longitud de cada lado recto es, $2b^2/a = (2)(1)/(2) = 1$. El lugar geométrico es el que se muestra en la fig. 12 cuyo dominio y recorrido son respectivamente:

$$\text{Dominio} = [-3; 1]$$

$$\text{Recorrido} = [1/2; 5/2]$$

EJEMPLO 2.

Determine si la gráfica de la siguiente relación es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$R = \{(x,y) \mid 9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Para reducir la ecuación dada a la forma ordinaria se siguen los siguientes pasos:

$9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$

$9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y = -76$ (trasponiendo)

$(9x^2 - 36x) + (4y^2 - 8y) = -76$ (agrupando)

$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = -76$ (factorizando)

$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -76 + 36 + 4$ (completando cuadrados)

$9(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = -36$ (reduciendo)

de aquí se ve que $M < 0$, por lo que la gráfica de la relación dada no tiene lugar geométrico real, o sea es el conjunto vacío.

EJEMPLO 3.

Determine si la gráfica de la siguiente relación, es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 5 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Para reducir la ecuación dada a la forma ordinaria se siguen los siguientes pasos:

$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 5 = 0$

$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y = -5$

$(x^2 - 2x) + (4y^2 - 8y) = -5$

$(x^2 - 2x) + 4(y^2 - 2y) = -5$

$(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 2y + 1) = -5 + 1 + 4$

$(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 0$

Es fácil ver que $M = 0$ y que la gráfica de esta relación es el punto $(1,1)$.

EJEMPLO 4.

Reducir la relación dada de una elipse a la forma ordinaria.

$$R = \{(x,y) \mid 25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

$(25x^2 - 50x) + (9y^2 + 36y) = 164$

$25(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = 164$

$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 164 + 25 + 36$

$25(x-1)^2 + 9(y+2)^2 = 225$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

Centro en $(1,-2)$, vértices $(1,3)$ y $(1,-7)$; focos en $(1,2)$ y $(1,-6)$.

AUTOEVALUACION 3.

En cada uno de los ejercicios siguientes determine si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o el conjunto vacío; si la gráfica es una elipse, dé el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje menor y la longitud y extremos de los lados rectos y finalmente, construya la curva y de el dominio y recorrido.

1.- $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 12 = 0$

2.- $9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$

3.- $x^2 + 2y^2 - 10x + 12y + 43 = 0$

4.- $4x^2 + 3y^2 + 16x - 6y + 31 = 0$

5-6 EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE.

Un elemento importante de una elipse es su excentricidad que se define como la razón c/a y se representa usualmente por la letra e.

$$e = c/a = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Como $c < a$, la excentricidad de una elipse es menor que la unidad.

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPITULO V.

A partir de la relación dada de una elipse, encuentra lo siguiente:

$$R = \{(x,y) \mid 9x + 25y = 225\}$$

1.- Las coordenadas del centro.

0) (5,3) 1) (0,0) 2) (1,1)
3) (25,9)

2.- Las coordenadas de los vértices.

0) (0,5) y (0,-5) 1) (0,3) y (0,-3)
2) (5,0) y (-5,0) 3) (3,0) y (-3, 0)

3.- Los focos.

0) (0,3) y (0,-3) 1) (3,0) y (-3,0)
2) (4,0) y (-4,0) 3) (0,4) y (0,-4)

4.- Los puntos extremos del eje menor.

0) (0,3) y (0,-3) 1) (4,0) y (-4,0)
2) (3,0) y (-3,0) 3) (0,4) y (0,-4)

5.- La longitud de los lados rectos.

0) 18/25 1) 18/5 2) 5/18
3) 25/18

6.- El dominio.

0) [-3;3] 1) [-5;5] 2) (-5;0)
3) (0;5)

7.- El recorrido.

0) $[-5;\ 5]$ 1) $(0,3)$ 2) $(0,-3)$
3) $[-3;\ 3]$

8.- Construya la curva.

Los vértices de una elipse son los puntos $(1,-6)$ y $(9,-6)$ y la longitud de cada lado recto es $9/2$. Hallar:

9.- La ecuación de la elipse.

0) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ 1) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{36} =$

2) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$ 3) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} =$

10.- La excentricidad.

0) $\sqrt{5}/2$ 1) $7/4$ 2) $\sqrt{7}/2$
3) $\sqrt{7}/4$

11.- Las coordenadas de sus focos.

0) $(5-\sqrt{7},\ -6)$ y $(5+\sqrt{7},\ -6)$
1) $(2+\sqrt{7},\ 1)$ y $(2-\sqrt{7},\ 1)$
2) $(5,\ -3)$ y $(8,\ -3)$
3) $(\sqrt{7},\ -6)$ y $(-\sqrt{7},\ -6)$

12.- Encuentra la ecuación de la elipse con centro en el origen, que satisface la siguiente condición:
El eje menor mide 12 y uno de los focos está en $(8,0)$.

0) $x^2 + y^2 = 10$ 1) $6x^2+10y^2=100$ 2) $36x^2+100y^2=3600$
3) $36x^2 + 100y^2=36$

A partir de la siguiente relación, encuentra lo siguiente:

$$R = \{(x,y) \mid 36x^2 + 27y^2 = 972\}$$

13.- El dominio.

0) $[-3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}]$ 1) $(-6;6)$
2) $[-6\sqrt{3};\ 6\sqrt{3}]$ 3) $(6,0)$

14.- El recorrido.

0) $[6;0]$ 1) $[0;6]$ 2) $[6;\ 0]$
3) $[-6;6]$

En cada uno de los siguientes problemas determine si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

15.- $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 12 = 0$

0) $(1,-1)$ 1) $4(x-1)^2 + 9(y+1)^2 = 1$
2) Conjunto vacío.

16.- $x^2 + 2y^2 - 10x + 12y + 43 = 0$

0) Conjunto vacío. 1) $(x-5)^2+2(y+3)^2 = 1$
2) $(5,-3)$

17.- $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 22 = 0$

0) Conjunto vacío. 1) $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 14$
2) $(1,-2)$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO V.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- $F(\pm 12,0)$, $V(\pm 13,0)$, $B(0,\pm 5)$; $(12,\pm 25/13)$, $(-12,\pm 25/13)$

2.- $F(0,\pm 3)$, $V(0,\pm 5)$, $B(\pm 4,0)$; $(\pm 16/5, -3)$, $(\pm 16/5,3)$

3.- $F(\pm\sqrt{5}, 0)$, $V(\pm 3,0)$, $B(0,\pm 2)$; $(-\sqrt{5}, \pm 4/3)$, $(\sqrt{5},\pm 4/3)$

4.- $F(\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0)$, $V(\pm 3,0)$, $B(0,\pm 3/2)$; $(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \pm 3/4)$, $(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \pm 3/4)$

5.- $F(\pm\sqrt{2}, 0)$, $V(\pm\sqrt{6},0)$, $B(0,\pm 2)$; $(\sqrt{2}, \pm 2/3\sqrt{6})$, $(-\sqrt{2}, \pm 2/3\sqrt{6})$

6.- $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{21} = 1$

7.- $\dfrac{x^2}{81} + \dfrac{y^2}{36} = 1$

8.- $\dfrac{y^2}{169} + \dfrac{x^2}{25} = 1$

9.- $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{8} = 1$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $\dfrac{(x-5)^2}{25} + \dfrac{(y-4)^2}{16} = 1$ $C(5,4)$; $V'(0,4)$, $V(10,4)$; $F'(2,4)$, $F(8,4)$, $B'(5,0)$, $B(5,8)$

2.- $\frac{(y+3)^2}{3} + \frac{(x-4)^2}{2} = 1$ C(4,-3), L'(4, -3 $-\sqrt{3}$)

V'(4,-3+ $\sqrt{3}$); F'(4,-4), F(4,-2); B'(4- $\sqrt{2}$,-3), B(4+ $\sqrt{2}$, -3)

3.- $\frac{(x+2)^2}{100} + \frac{(y-2)^2}{36} = 1$ C(-2,2), V'(-12,2), V(8,2)

F'(-10,2), F(6,2); B'(-2,-4), B(-2,8)

4.- $\frac{(x+2)^2}{289} + \frac{(y+3)^2}{225} = 1$ C(-2,-3); V'(-19,-3), V(15, -3); F'(-10,-3), F(6,-3); B'(-2,-18), B(-2,12)

5.- $\frac{(x-5)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$

6.- $\frac{(x+1)^2}{13} + \frac{(y+1)^2}{9} = 1$

7.- $\frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{20} = 1$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Elipse: $\frac{(x-1)^2}{1/4} + \frac{(y+1)^2}{1/9} = 1$; centro (1,-1)

Vértices: V_1(1/2,-1), V_2 (3/2, -1)

Focos: F_1(1 - $\sqrt{5}$/6, -1), F_2(1+ $\sqrt{5}$/6, -1)

Eje menor: B_1(1, -2/3), B_2(1, - 4/3)

Lado recto: Longitud 4/9

: Extremos (1- $\sqrt{5}$/6, - 7/9), (1- $\sqrt{5}$/6,-11/9)

(1+ $\sqrt{5}$/6, - 7/9), (1+ $\sqrt{5}$/6,-11/9)

2.- Elipse: $\frac{(x+1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1$; centro (-1,1)

Vértices: V_1(-6,1), V_2(4,1)

Focos: F_1(-5,1), F_2(3,1)

Eje menor: B_1(-1,4) B_2(-1,-2)

Lado recto: Longitud 18/5

Extremos (-5, 14/5), (-5, -9/5)

(3, 14/5), (3, -9/5)

3.- Elipse punto (5, -3)

4.- Conjunto vacío, $4(x+2)^2 + 3(y-1)^2 = -12$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO V.

1.- 1	10.- 3
2.- 2	11.- 0
3.- 3	12.- 2
4.- 0	13.- 0
5.- 1	14.- 3
6.- 1	15.- 1
7.- 3	16.- 2
8.- -	17.- 0
9.- 2	

LA HIPERBOLA.

Los conocimientos empíricos acerca de la medida de la extensión, vienen de la más remota antigüedad, pero fueron muy rudimentarios en sus principios.

Las transacciones comerciales, indispensables en la vida social y el esfuerzo para medir partes más o menos extensas del universo, llevaron al hombre, apenas salido de la barbarie, a crearse un embrión de Geometría.

Según Aristóteles, las matemáticas y en especial la Geometría, tuvieron origen en Egipto, no únicamente por la necesidad de medir las tierras, sino también porque la casta de los sacerdotes disponía de tiempo suficiente para dedicarse a esta clase de ocupaciones, o sea, cultivaba la Geometría no sólo en vista de sus aplicaciones, sino como ciencia pura.

Desde época muy lejana, que se remonta a más de veinte siglos antes de nuestra era, contruyeron los egipcios las grandes pirámides. Un pueblo que emprende obras de esa importancia, debe haber poseído extensos conocimientos en matemáticas prácticas y en astronomía, pues esas imponentes construcciones están perfectamente orientadas.

Nada extraño, pues, que los antiguos griegos, Tales de Mileto, Solón, Herodoto y Pitágoras, hayan ido a Egipto a iniciarse en los conocimientos geométricos alcanzados por los sabios de ese país. Pero, como la ciencia egipcia era preponderantemente empírica, no constituía una ciencia en el verdadero sentido de la palabra, pues no era un sistema lógico, basado en postulados y axiomas.

No así los griegos, eminentemente pensadores, no se contentaron con saber el "qué"; sino quisieron averiguar el "por qué", y no se dieron por satisfechos hasta obtener explicaciones racionales. En otras palabras: con los griegos empieza propiamente la geometría como ciencia.

En esta unidad, analizaremos la hipérbola, que es otra de las secciones cónicas.

Confiamos que sientas satisfacción con su lectura y aprendizaje, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente el concepto, hipérbola.

2.- Encontrar la ecuación de la hipérbola en los siguientes casos:

a) Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados y el eje focal está sobre el eje "x" y es igual a 2a.

b) Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados y el eje focal está sobre el eje "y" y es igual a 2b.

3.- Calcular correctamente los elementos de una hipérbola, conocida su ecuación.

4.- Construir la curva, dada la relación de una hipérbola, así como sus asíntotas y dar su dominio y su recorrido.

5.- Encontrar el lugar geométrico de una hipérbola dada por la ecuación general:

$$A(x + D/2A)^2 - C(y + E/2C)^2 = M$$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo VI, de tu libro "Geometría Analítica". Te sugerimos que leas primero todo el capítulo para que, conforme vayas leyendo el capítulo, vayas haciendo todas las anotaciones que creas importantes, para luego, porceder a contestar tus objetivos.

2.- En cada sección del capítulo se exponen ejemplos ilustrativos, para que observes el procedimiento y la forma de resolver los problemas para que luego, trates de resolver las autoevaluaciones como práctica de los objetivos a resolver.

3.- Una vez que estés seguro de tus conocimientos de esta unidad, te sugerimos que resuelvas la autoevaluación del capítulo, la cual te indicará qué tan bien andas en la unidad, o bien, te indica qué objetivos debes de volver a repasar.

CAPITULO 6.

LA HIPÉRBOLA

6-1 INTRODUCCIÓN.

Otro lugar geométrico asociado con las distancias desde dos puntos fijos es la hipérbola.

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos para los cuales la diferencia de sus distancias hacia dos puntos fijos es una constante. Los puntos fijos se llaman focos de la hipérbola.

Una construcción mecánica de la hipérbola es la siguiente, (fig. 1). Se colocan dos chinches en una mesa de dibujo, en los puntos F_1 y F_2. Estos puntos serán los focos de la hipérbola. Átese un lápiz a una cuerda en P, de manera que la cuerda no se deslice sobre el lápiz. Pásese uno de los extremos de la cuerda por debajo de la chinche que se encuentra en F_1 y a continuación únase el otro extremo sobre la chinche en F_2. Si los dos extremos R_1 y R_2 coinciden al tirar de la cuerda desde ellos o bien desde P, de manera que R_1F_2 y R_2F_2 se alarguen o se acorten en la misma longitud, entonces $PF_2 \quad PF_1$ será constante (si la cuerda se mantiene tirante). La trayectoria resultante de la hipérbola puede obtenerse invirtiendo las funciones de F_1 y F_2.

Las aplicaciones sencillas de la hipérbola no son tan comunes como las de la parábola y la elipse. En los cursos de geometría analítica se estudian las ecuaciones para varias hipérbola.

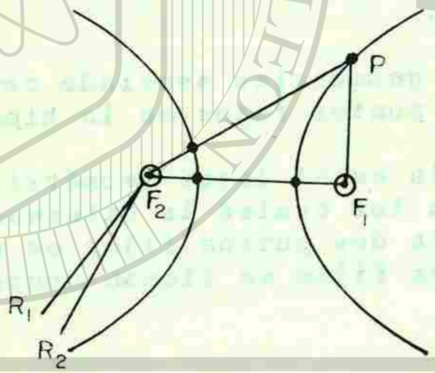


Fig. 1

Muchas leyes de la naturaleza se representan mediante ecuaciones hiperbólicas. El estudiante de física aprende que la relación entre el volumen y la presión de un gas es la ecuación de una hipérbola. Otras relaciones que se representan gráficamente mediante curvas hiperbólicas son, (a) distancia, velocidad tiempo; (b) área del cuadrado, su longitud, su ancho; (c) costo total, costo por artículo, número de artículos; (d) corriente, voltaje y resistencia en electricidad.

En la guerra se aplican las hipérbolas para localizar los emplazamientos escondidos de la artillería enemiga. El navegante de un avión con frecuencia usa las hipérbolas al determinar su posición. El sistema está relacionado con la recepción de señales de radio de varias estaciones radio emisoras en posiciones fijas conocidas. Observando los tiempos requeridos para recibir las señales y encontrando el punto de intersección de dos hipérbolas, obtenidas a partir de la construcción de las gráficas correspondientes a estos tiempos, el navegante puede determinar la posición del avión.

Si la hipérbola de la fig. 1 se gira alrededor de la recta F_2F_1, se forma una superficie llamada hiperboloide de revolución. En ocasiones se usa este tipo de superficies como reflector del sonido en la forma de una cubierta para la orquesta en los grandes anfiteatros al aire libre. Si el sonido de la persona que habla o el de un conjunto musical se origina cerca del foco de la cubierta, el sonido se dirigirá hacia el auditorio que se encuentra frente a ella. El sonido se dispersará con mayor uniformidad hacia el auditorio si la cubierta tiene la forma de una paraboloide de revolución.

6-2 LA HIPERBOLA.

Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

La definición de la hipérbola excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento comprendido entre ellos.

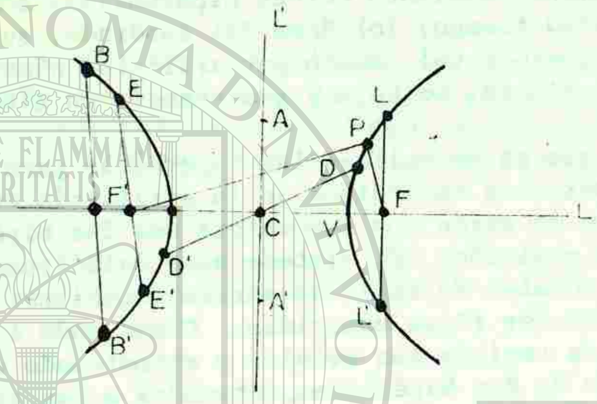


Fig. 2.

Los focos y el punto medio de este segmento no pueden pertenecer al lugar geométrico.

El estudiante debe observar la estrecha analogía que existe entre las definiciones de la hipérbola y elipse. La analogía entre estas dos curvas se encontrará frecuentemente a medida que avancemos en nuestro estudio de la hipérbola.

En el párrafo siguiente veremos que la hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita. En la fig. 2 se ha dibujado una porción de cada una de estas ramas; los focos están designados por F y F'. La recta "l" que pasa por los focos tiene varios nombres; como para la elipse creemos conveniente introducir el término "eje focal" para designar esta recta.

El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos, V y V', llamados vértices. La porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento VV', se llama eje transverso. El punto medio C del eje transverso se llama centro (fig. 2). La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal "l"

tiene varios nombres; nosotros, como lo hicimos para la elipse, consideraremos conveniente introducir "eje no focal" para esta recta. El "eje no focal" l' no corta a la hipérbola; sin embargo, una porción definida de este eje, el segmento AA' en la fig. 2, que tiene C por punto medio, se llama eje conjugado. La longitud del eje conjugado se dará en el siguiente párrafo. El segmento que uno dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama cuerda; estos puntos -- pueden ser ambos de la misma rama, como para la cuerda BB', o uno de una rama y el otro de la otra, como para el eje transverso VV'. En particular, una cuerda que pasa por un foco, tal como EE' se llama cuerda focal. Una cuerda focal tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama lado recto; evidentemente, por tener dos focos, la hipérbola tiene dos lados rectos.

6-3 PRIMERA ECUACION ORDINARIA DE LA HIPERBOLA.

Consideremos la hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 3).

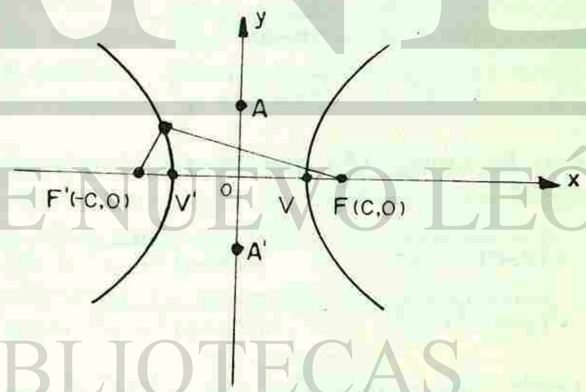


Fig. 3.

Los focos F y F' están entonces sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán (c,o) y (-c,o), respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea P(x,y) un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, por la definición de la hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente, que expresa que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante,

$$\left| |FP| - |F'P| \right| = 2a \qquad (1)$$

en donde "a" es una constante positiva y $2a < 2c$.

La condición geométrica (1) es equivalente a las dos relaciones,

$$|FP| - |F'P| = 2a \qquad (2)$$

$$|FP| - |F'P| = -2a \qquad (3)$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola; la relación (3) se verifica cuando P está sobre la rama derecha.

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenemos

$$|FP| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$|F'P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada analíticamente por:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (4)$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a \qquad (5)$$

correspondiendo las ecuaciones (4) y (5) a las relaciones (2) y (3), respectivamente.

Por el mismo procedimiento usado al transformar y simplificar la ecuación para la elipse, podemos demostrar que las ecuaciones (4) y (5) se reducen cada una a:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad (6)$$

Por ser $c > a$, $c^2 - a^2$ es un número positivo que podemos designar por b^2. Por tanto, sustituyendo en la ecuación (6) la relación:

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad (7)$$

obtenemos, $$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

que puede escribirse en la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

Luego, la ecuación (8) es la ecuación de la hipérbola.

Estudiemos ahora la ecuación (8); las intersecciones con el eje X son a y -a. Por tanto, las coordenadas de los vértices V y V' son (a,o) y (-a,o) respectivamente, y la longitud del eje transverso es igual a 2a, que es la constante que interviene en la definición. Aunque no hay intersecciones con el eje Y, dos puntos, A(o,b) y A'(o,-b), se toman como extremos del eje conjugado.

Por tanto, la longitud del eje conjugado es igual a 2b. La ecuación (8) muestra que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y el origen.

Despejando "y" de la ecuación (8), resulta:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (9)$$

Por tanto, para que los valores de "y" sean reales, x está restringida a variar dentro de los intervalos $x \geq a$ y $x \leq -a$. De aquí que ninguna porción del lugar geométrico - -

aparece en la región comprendida entre las rectas x=a y x=-a.

Despejando x de la ecuación (8), se obtiene:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} \qquad (10)$$

de la cual vemos que "x" es real para todos los valores reales de "y".

Según esto, las ecuaciones (9) y (10), juntos, con la simetría del lugar geométrico, muestran que la hipérbola no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje X, y la otra se extiende indefinidamente hacia la hizquierda y por arriba y debajo del eje X.

De los resultados anteriores se deduce que si

$$R = \{(x,y) \mid b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2\}$$

entonces dominio de R = $(-\infty;-a] \cup [a;+\infty)$ y recorrido de R= $(-\infty; +\infty)$.

La hipérbola (8) no tiene asíntotas verticales ni horizontales. En el siguiente párrafo veremos, sin embargo, que la curva tiene dos asíntotas oblicuas.

De la ecuación (9) y de la relación (7), hallamos que la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$.

Como para la elipse, la excentricidad "e" de una hipérbola está definida por la razón c/a. Por tanto, de (7), tenemos:

$$e = \frac{c}{a}$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \qquad (11)$$

como $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad.

Si el centro de la hipérbola está en el origen pero su eje focal coincide con el eje Y, hallamos, análogamente, que la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \qquad (12)$$

Las ecuaciones (8) y (12) son las más simples de esta curva y las llamaremos primera ecuación ordinaria de la hipérbola.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente:

TEOREMA 1.

La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje X, y focos los puntos (c,o) y (-c,o), es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (o,c) y (o,-c), entonces la ecuación es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, "a" es la longitud del semieje transverso, "b" la del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada foco, y, a,b,c están ligados por la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es, $2b^2/a$, y la excentricidad "e" está dada por la relación:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1$$

NOTA.

La posición de una elipse con relación a los ejes coordenados puede determinarse como se indicó en la nota de la unidad de la elipse, comparando los denominadores de los términos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

Este método no es aplicable a la hipérbola, ya que podemos tener $a > b$, $a < b$ ó $a = b$. La posición de la hipérbola se determina por los signos de los coeficientes de las variables de la ecuación en forma ordinaria. La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene el eje transverso de la hipérbola.

EJEMPLO 1.

Los vértices de una hipérbola son los puntos V(o,3) y V'(0,-3), y sus focos los puntos F(0,5) y F'(0,-5). Hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad, la longitud de cada lado recto y por último el dominio y el recorrido de la relación.

SOLUCIÓN:

Como los vértices y los focos están sobre el eje Y, el eje focal coincide con el eje Y. Además, el punto medio del eje transverso está, evidentemente en el origen. Por tanto, por el teorema 1, la ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

La distancia entre los vértices es $2a = 6$, longitud del eje transverso. La distancia entre los focos $2c = 10$. Por tanto, $a=3$, y $c=5$, de donde, $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$; por tanto $b = 4$ y la longitud del eje conjugado es $2b = 8$. La ecuación de la hipérbola es entonces:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

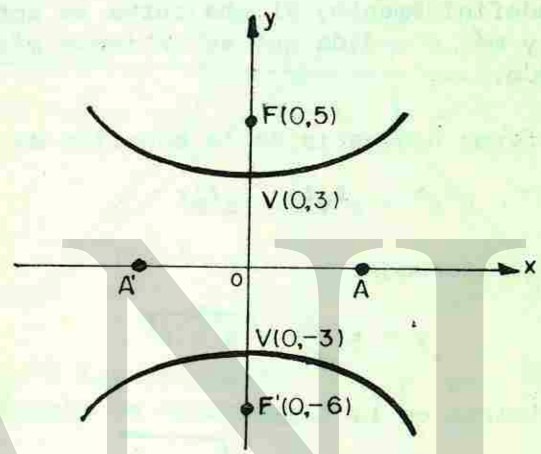


Fig. 4.

La excentricidad es, $e = c/a = 5/3$, y la longitud de cada lado recto es:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2\ (16)}{3} = \frac{32}{3}$$

El lugar geométrico está representado en la fig. 4, en donde el eje conjugado está indicado por el segmento AA' del eje X. Se puede ver fácilmente de la gráfica que el dominio y recorrido de la relación son respectivamente:

Dominio $= (-\infty;\infty)$

Recorrido $= (-\infty;-3] \cup [3;\infty)$

6-4 ASÍNTOTAS DE LA HIPERBOLA.

Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece contínuamente y tiende a cero, dicha recta se llama asíntota de la curva.

Esta definición implica dos cosas: a) una curva que tiene una asíntota no es cerrada o de extensión finita, sino que se extiende indefinidamente; 2) una curva se aproxima a la asíntota más y más a medida que se extiende más y más en el plano coordenado.

Si de la forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

despejamos "y", obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

que puede escribirse en la forma:

$$y = \pm \frac{b}{a} x \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Frecuentemente se desea investigar lo que ocurre en una ecuación cuando una de las variables aumenta numéricamente sin límite. Si un punto de la hipérbola se mueve a lo largo de la curva de manera que su abscisa x aumenta numéricamente sin límte, el radical del segundo miembro de la ecuación de arriba se aproxima más y más a la unidad, y la ecuación tiende a la forma:

$$y = \pm \frac{b}{a} x$$

Como esta ecuación representa las rectas $y = \frac{b}{a} x$ y $y = -\frac{b}{a} x$, esto nos conduce a inferir, de la definición de asíntota, que la hipérbola es asíntota a estas dos rectas.

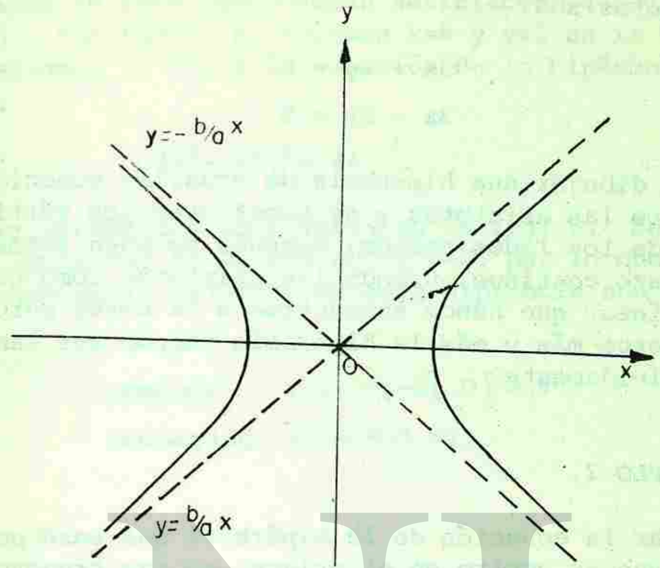


Fig. 5.

En la fig. 5 las rectas $y = \frac{b}{a} x$ y $y = -\frac{b}{a} x$ son asíntotas de la hipérbola de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y están representadas por las líneas interrumpidas de la figura.

Estos resultados se resumen en el siguiente:

TEOREMA 2.

La hipérbola, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tiene por asíntotas las rectas $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$.

NOTA.

Si la ecuación de una hipérbola está en su forma ordinaria, las ecuaciones de sus asíntotas pueden obtenerse reemplazando el término constante por cero y factorizando el primer miembro. Así, para la hipérbola, $9x^2 - 4y^2 = 36$ tenemos - --

$9x^2 - 4y^2 = 0$, de donde $(3x+2y)(3x-2y) = 0$, y las ecuaciones de las asíntotas son:

$$3x + 2y = 0$$
$$3x - 2y = 0$$

Para dibujar una hipérbola de ecuación conocida, se trazan primero las asíntotas y se construyen los vértices y los extremos de los lados rectos; después se unen estos puntos con un trazo contínuo, usando las asíntotas como guías, ya que son líneas que nunca encuentran a la curva pero a las cuales se acerca más y más la hipérbola cuando sus ramas se alejan indefinidamente.

EJEMPLO 2.

Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto (6,2), tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta, $2x-5y=0$. Además, encontrar el dominio y recorrido de la relación.

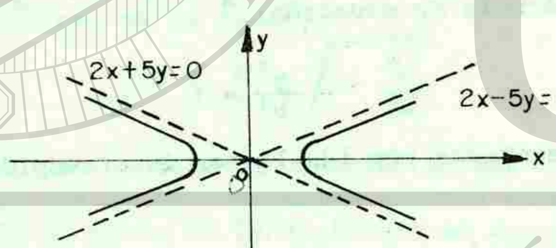


Fig. 6.

Por el teorema 2 anterior, la otra asíntota es la recta, $2x+5y=0$. Las ecuaciones de ambas asíntotas pueden obtenerse haciendo k igual a cero en la ecuación:

$$(2x-5y)(2x+5y) = k \qquad \text{o sea,}$$
$$4x^2 - 25y^2 = k$$

Como la hipérbola buscada debe pasar por el punto (6,2), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola. Por tanto, si hacemos $x=6$ y $y=2$ en la última ecuación, hallamos $k= 44$, y la ecuación de la hipérbola que se busca es:

$$4x^2 - 25y^2 = 44$$

El lugar geométrico se muestra en la fig. 6. De la ecuación de las asíntotas se ve que $a=5$ y $b=2$, por lo que el dominio y recorrido de la relación de esta hipérbola son respectivamente:

$$\text{Dominio} = (-\infty;-5] \cup [5;+\infty)$$
$$\text{Recorrido} = (-\infty;+\infty)$$

EJEMPLO 3.

Construir la gráfica de la siguiente relación y dar su dominio y recorrido.

$$R = \{(x,y) \mid 36x^2 - 64y^2 = 2304\}$$

SOLUCIÓN:

Dividimos entre 2304 y reducimos la ecuación a:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

La gráfica es una hipérbola en la que $a=8$, $b=6$ y $c = \sqrt{a^2+b^2} = 10$. Por consiguiente, los vértices son $(\pm 8,0)$ y los focos $(\pm 10,0)$. Cada lado recto tiene una longitud de $2b^2/a = 9$. Las ecuaciones de las asíntotas son, $3x-4y=0$ y $3x+4y= 0$. A partir de esta información puede trazarse la hipérbola (fig. 7).

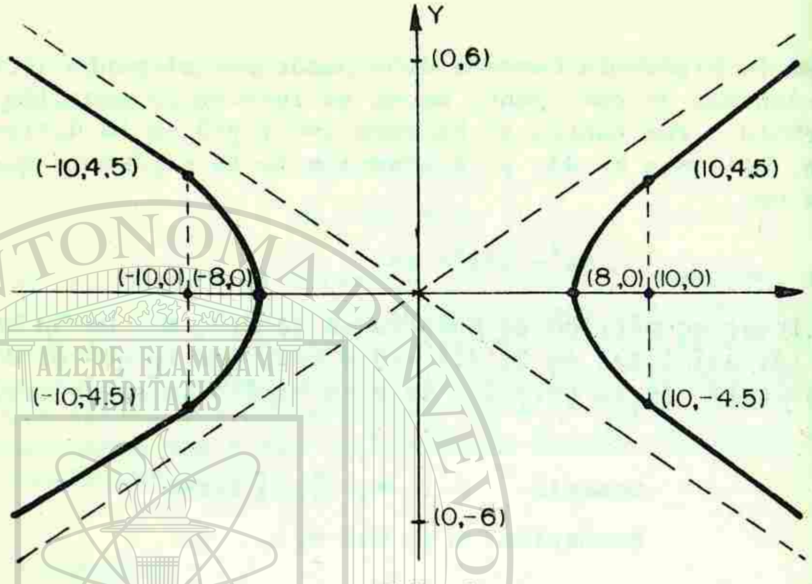


FIG.-7

El lugar geométrico de la relación se muestra en la figura en donde se observa fácilmente que el dominio y recorrido son los siguientes:

$$\text{Dominio} = (-\infty;-8] \cup [8;\infty)$$

$$\text{Recorrido} = (-\infty;\infty)$$

EJEMPLO 4.

Construya la gráfica de $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ y dé el dominio y el recorrido de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 16x^2 - 9y^2 - 144 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

La ecuación dada es equivalente a:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

que es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, por lo que la gráfica de la ecuación dada es una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje X. Para este hipérbola $a=3$, $b=4$, por lo que $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$ y $c=5$; entonces los vértices son $V_1(3,0)$ y $V_2(-3,0)$ y los focos están en $F_1(5,0)$ y $F_2(-5,0)$, la longitud del lado recto es, $2b^2/a = 32/3$, o sea que los extremos de los lados rectos (fig. 8) son $R_1(5,-16/3)$, $L_1(5,16/3)$, $R_2(-5,-16/3)$ y $L_2(-5, 16/3)$.

La ecuación del par de asíntotas se escribe:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0$$

que es equivalente a:

$$y = \frac{4}{3}x \qquad y \qquad y = -\frac{4}{3}x$$

o sea;

$$3y - 4x = 0 \qquad y \qquad 3y + 4x = 0$$

Estas asíntotas están representadas por la línea interrumpida de la fig. 8, en donde se muestra el lugar geométrico.

Para la relación R especificada:

$$\text{Dominio de } R = (-\infty;-3] \cup [3;+\infty)$$

$$\text{Recorrido de } R = (-\infty;+\infty)$$

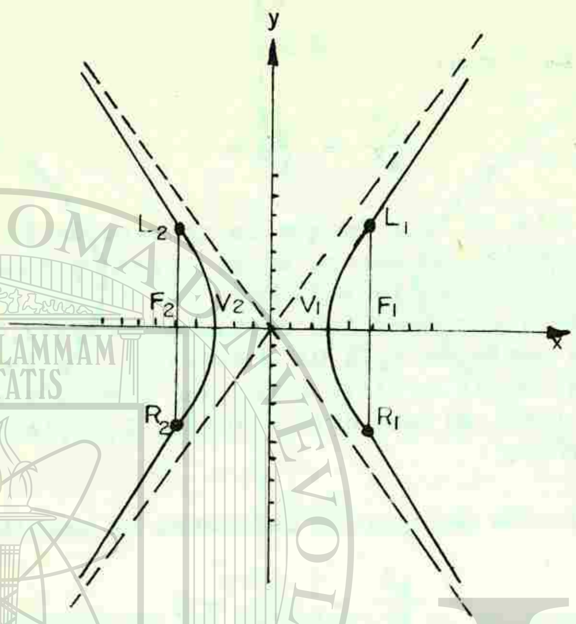


Fig. 8.

6-5 HIPERBOLA EQUILATERA O RECTANGULAR.

Consideremos la hipérbola especial cuyos ejes transversal y conjugado son de igual longitud.

Entonces a=b, y la ecuación:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

toma la forma más sencilla;

$$x^2 - y^2 = a^2$$

debido a la igualdad de sus ejes, la hipérbola se llama hipérbola equilátera.

Por al teorema 2, las asíntotas de la hipérbola equilátera son las rectas:

$$x - y = 0$$

$$y \qquad x + y = 0$$

Como estas rectas son perpendiculares, resulta que las asíntotas de una hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí. Por esta razón la hipérbola equilátera se llama también hipérbola rectangular.

AUTOEVALUACION 1.

Para cada hipérbola halle las coordenadas de los vértices y los focos, la longitud de cada lado recto y las ecuaciones de las asíntotas. Trace cada curva usando las asíntotas y establezca su dominio y recorrido.

1.- $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2.- $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$

3.- $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$

4.- $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$

5.- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$

6.- $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$

7.- $y^2 - x^2 = 36$

8.- $x^2 - y^2 = 49$

Escriba las ecuaciones de las hipérbolas cuyos ejes están sobre los ejes coordenados y las cuales también satisfacen las condiciones dadas en los problemas siguientes:

9.- Vértice (4,0), extremo del eje conjugado (0,3).

10.- Foco (6,0), vértice (4,0).

11.- Foco (0,5), eje conjugado 4.

12.- Eje conjugado 6, vértice (7,0).

13.- Lado recto 5, foco (3,0).

14.- Extremo del eje conjugado (3,0), longitud del lado recto 10.

15.- Pasa a través de (6,5) y (8, $2\sqrt{15}$).

16.- Pasa a través de (3,$\sqrt{2}$) y ($2\sqrt{3}$, 2)

6-6 SEGUNDA ECUACION ORDINARIA DE LA HIPERBOLA.

Si el centro de una hipérbola no está en el origen, pero sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden obtenerse tal como se determinaron ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse y el procedimiento se resume en el siguiente:

TEOREMA 3.

La ecuación de una hipérbola de centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, "a" es la longitud del semieje transverso, "b" la del semieje conjugado, "c" la distancia del centro a cada uno de los focos y a,b,c están ligados por la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$, y la excentricidad "e" está dada por la relación:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$$

EJEMPLO 1.

Trazar la gráfica de la siguiente relación y dar su dominio y recorrido.

$$R = \{(x,y) \mid 12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Primero reducimos la ecuación a la forma ordinaria, por el método de completar cuadrados,

$$12(y^2+6y+9) - 4(x^2-4x+4) = -44 + 108 - 16$$

$$12(y+3)^2 - 4(x-2)^2 = 48$$

$$\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$$

Vemos ahora que a=2, b=$2\sqrt{3}$, c= $\sqrt{4+12}$ = 4 y el centro de la hipérbola está en (2,-3). Por tanto, los extremos del eje transverso están en (2,-5) y (2,-1), y los extremos del eje conjugado en ($2-2\sqrt{3}$, -3) y ($2+2\sqrt{3}$, -3). Las coordenadas de los focos, a 4 unidades del centro son (2,-7) y (2, 1). La longitud de cada lado recto es $2b^2/a = 12$ y por consiguiente, los extremos de cada lado recto están a 6 unidades del foco correspondiente. Los vértices de la hipérbola, los extremos de cada lado recto y las asíntotas son suficientes para dibujar una gráfica razonablemente precisa (fig. 9). Las ecuaciones de las asíntotas, aunque no son necesarias para su trazo, son:

$$\frac{y+3}{2} + \frac{x-2}{2\sqrt{3}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{y+3}{2} - \frac{x-2}{2\sqrt{3}} = 0$$

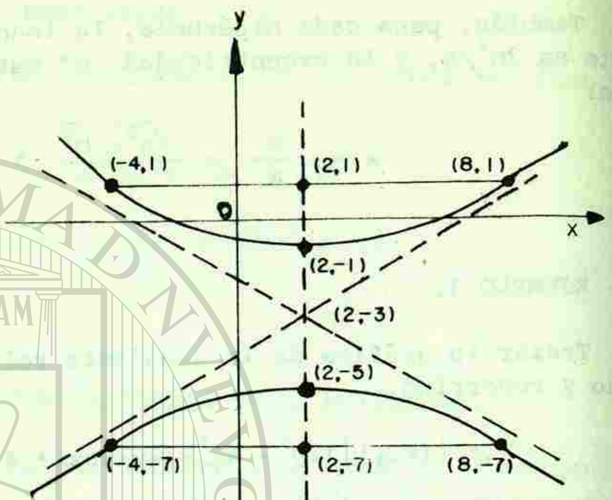


Fig. 9.

El lugar geométrico es el representado en la fig. 9 de donde se puede ver fácilmente que el dominio y el recorrido de la relación son los siguientes:

Dominio $= (-\infty\,;\infty)$

Recorrido $= (-\infty\,;-5] \cup [-1;\infty)$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Reduzca las ecuaciones siguientes a la forma ordinaria. En cada una halle las coordenadas del centro, los vértices y los focos. Trace el lugar geométrico de cada ecuación y establezca su dominio y recorrido.

1.- $9x^2 - 16y^2 - 54x - 63 = 0$

2.- $21x^2 - 4y^2 + 84x - 32y - 64 = 0$

3.- $5y^2 - 4x^2 - 30y - 32x = 99$

4.- $2x^2 - 3y^2 - 8y + 6x - 1 = 0$

Escriba las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones dadas en los siguientes problemas.

5.- Centro (1,3), vértice (4,3), extremo del eje conjugado (1,1).

6.- Vértice (-4,0), focos (-5,0) y (1,0).

7.- Extremos del eje conjugado (3,-1) y (3,5), foco (-1,2).

8.- Vértices (-1,3) y (5,3), longitud del eje conjugado 6.

9.- Un punto se mueve de modo que la diferencia de sus distancias desde (-4,3) y (4,3) es numéricamente igual a 6. Halle la ecuación de su trayectoria.

6-7 LUGAR GEOMÉTRICO DE LA RELACIÓN DE UNA HIPÉRBOLA CUYA ECUACIÓN PERTENECE A LA FÓRMULA GENERAL: $A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$.

TEOREMA 4.

Si los coeficientes A y C difieren en el signo, la ecuación:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una hiperbola de ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

La ecuación anterior puede escribirse en la forma equivalente:

$$A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$$

donde

$$M = D^2/4A + E^2/4C - F$$

Entonces:

a) Si $M = 0$, la gráfica está formada por dos rectas que se cortan.

b) Si $M \neq 0$, la gráfica es una hipérbola con centro en $(-D/2A, -E/2C)$; su eje transverso es horizontal si M/A es positivo y M/C negativo, y vertical en caso contrario.

EJEMPLO 1.

Encontrar el lugar geométrico de la siguiente relación y dar su dominio y recorrido.

$$R = \{(x,y) \mid 9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Vamos a reducir la ecuación anterior a la forma ordinaria completando los cuadrados. Entonces,

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$$

y $\quad 9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4$

de donde $\quad 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36$

de manera que la forma ordinaria es:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola cuyo centro C es el punto (3,1) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y (fig. 10).

Como $a^2 = 9$, $a = 3$, y las coordenadas de los vértices V y V' son $(3, 1+3)$ y $(3, 1-3)$ o sea, $(3,4)$ y $(3,-2)$ respectivamente. Como $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, y las coordenadas de los focos F y F' son, $(3, 1+\sqrt{13})$ y $(3, 1-\sqrt{13})$ respectivamente. La longitud del eje transverso es $2a = 6$, la del eje conjugado es $2b = 4$ y la de cada lado recto es $2b^2/a = 8/3$. La

excentricidad es $e = c/a = \sqrt{13}/3$.

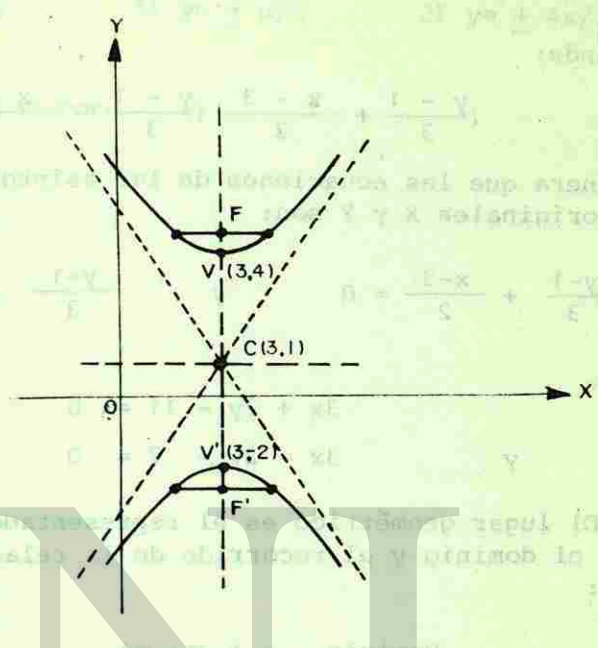


Fig. 10.

Para obtener las ecuaciones de las asíntotas, aplicaremos el teorema 2, teniendo en cuenta que el centro de la hipérbola es el punto (3,1) y no el origen. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen sea el centro C(3,1) la ecuación de la hipérbola toma la forma:

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1$$

de modo que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los nuevos ejes se obtienen de la relación:

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 0$$

Pero esta última relación al ser referida a los ejes originales X y Y, toma la forma:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 0$$

de donde:

$$\left(\frac{y-1}{3} + \frac{x-3}{2}\right)\left(\frac{y-1}{3} - \frac{x-3}{2}\right) = 0$$

de manera que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los ejes originales X y Y son:

$$\frac{y-1}{3} + \frac{x-3}{2} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{y-1}{3} - \frac{x-3}{2} = 0$$

o sea,

$$3x + 2y - 11 = 0$$

$$\text{y} \quad 3x - 2y - 7 = 0$$

El lugar geométrico es el representado en la fig. 10 de donde el dominio y el recorrido de la relación son respectivamente:

Dominio $= (-\infty ; \infty)$

Recorrido $= (-\infty ;-2] \cup [4; \infty)$

EJEMPLO 2.

Determina si la gráfica de la siguiente relación es una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

$$R = \{(x,y) \mid 4y^2 - x^2 + 2x - 1 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Completando cuadrados en la ecuación anterior tenemos:

$$4y^2 - (x^2 - 2x) = 1$$

$$4y^2 - (x^2 - 2x+1) = 1 - 1 = 0$$

7.- Las asíntotas.

0) $y = \pm 3x/4$ 1) $y = \pm x/2$ 2) $y = \pm 4x/3$
3) $y = \pm x/3$

8.- Construya la curva.

0)

1)

9.- Encontrar la ecuación de la hipérbola con centro en el origen, que satisface la siguiente condición:

Las asíntotas son: $y = \pm\ 5x/12$ y uno de los focos está en (13,0).

0) $x^2/144 - y^2/25 = 0$ 1) $x^2/144 + y^2/25 = 1$

2) $y^2/144 - x^2/25 = 1$ 3) $x^2/144 - y^2/25 = 1$

Determine si la gráfica de las siguientes ecuaciones es una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

10.- $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

$$4y^2 - (x-1)^2 = 0$$

$$(2y)^2 - (x-1)^2 = 0$$

De lo anterior se observa que el miembro derecho de la ecuación es cero, o sea, M = 0, por lo que la gráfica de la relación dada está formada por dos rectas que se cortan cuyas ecuaciones son:

$$2y + x - 1 = 0$$

y $$2y - x + 1 = 0$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

En cada uno de los problemas siguientes, determine si la gráfica de la ecuación dada es una hipérbola o un par de rectas que se cortan. Si es hipérbola, dé las ecuaciones de sus asíntotas y trace la curva.

1.- $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

2.- $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0$

3.- $x^2 - y^2 - 12x + 16y - 28 = 0$

4.- $9x^2 - 16y^2 - 18x + 96y - 135 = 0$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPITULO VI.

A partir de la relación de la hipérbola,

$$R = \{(x,y) \mid 9x^2 - 16y^2 = 144\}$$

encuentre lo siguiente:

1.- Las coordenadas del centro.

0) (4,3)   1) (0,0)   2) (0,3)
3) (3.0)

2.- Los vértices.

0) (4,0) y (-4,0)   1) (0,2) y (0, -2)
2) (0,4) y (0,-4)   3) (2.0) y (-2, 0)

3.- Los focos.

0) (5,0) y (-5,0)   1) (4,0) y (-4,0)
2) (0,4) y (-4,0)   3) (0,5) y (0,-5)

4.- La longitud de los lados rectos.

0) 2/9   1) 9/2   2) 9/4
3) 1/2

5.- El dominio.

0) $(-\infty;-4] \cup [4;\infty)$ 1) $[-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$
2) $(-\infty;-4) \cup (4;+\infty)$ 3) $[-\infty;-4] \cup [4;+\infty)$

6.- El recorrido.

0) $[-\infty;+\infty)$ 1) $(-\infty;+\infty]$ 2) $(-\infty;+\infty)$
3) $[-\infty;+\infty]$

10.- $4x^2 - 9y^2 - 16x + 18y - 29 = 0$

0) Hipérbola: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$ 1) Par de rectas: $4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 0$

11.- $4y^2 - x^2 + 2x - 1 = 0$

1) Par de rectas: $(2y)^2 - (x-1)^2 = 0$ 1) Hipérbola: $y^2 - x^2 = 1$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO VI.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- $V(\pm 4,0)$; $F(\pm 5,0)$; $9/2$; $x/4 - y/3 = 0$; $x/4 + y/3 = 0$

2.- $V(\pm 6,0)$; $F(\pm 10,0)$; $64/3$; $x/6 + y/8 = 0$; $x/6 - y/8 = 0$

3.- $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm \sqrt{13})$; $8/3$, $y/3 - x/2 = 0$; $y/3 + x/2 = 0$

4.- $V(0, \pm 3)$; $F(0, \pm \sqrt{34})$; $50/3$; $y/3 + x/5 = 0$; $y/3 - x/5 = 0$

5.- $V(\pm 2,0)$; $F(\pm 5,0)$; 21; $x/2 + y/\sqrt{2} = 0$; $x/2 - y/\sqrt{21} = 0$

6.- $V(\pm 2\sqrt{5}, 0)$; $F(\pm 6,0)$; $16\sqrt{5}/5$; $x/2\sqrt{5} + y/4 = 0$; $x/2\sqrt{5} - y/4 = 0$

7.- $V(0, \pm 6)$; $F(0, \pm 6\sqrt{2})$; 12; $x+y=0$; $x-y=0$

8.- $V(\pm 7,0)$; $F(\pm 7\sqrt{2},0)$; 14; $x+y = 0$; $x-y = 0$

9.- $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

10.- $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$

11.- $\dfrac{y^2}{21} - \dfrac{x^2}{4} = 1$

12.- $\dfrac{x^2}{49} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

13.- $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

14.- $\dfrac{25y^2}{81} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

15.- $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{20} = 1$

16.- $\dfrac{x^2}{6} - \dfrac{y^2}{4} = 1$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $\dfrac{(x-3)^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$; $C(3,0)$; $V'(-1,0)$, $V(7,0)$; $F'(-2,0)$, $F(8,0)$

2.- $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{(y+4)^2}{21} = 1$; $C(-2,-4)$; $V'(-4,-4)$, $V(0,-4)$, $F'(-7,-4)$, $F(3,-4)$

3.- $\dfrac{(y-3)^2}{16} - \dfrac{(x+4)^2}{20} = 1$; $C(-4,3)$; $V'(-4,-1)$, $V(-4,7)$, $F'(-4,-3)$, $F(-4,9)$

4.- $\dfrac{(y-2)^2}{3} - \dfrac{(x-1)^2}{2} = 1$; $C(1,2)$; $V'(1,2 - \sqrt{3})$, $V(1,2 + \sqrt{3})$ $F'(1, 2 - \sqrt{5})$, $F(1, 2 + \sqrt{5})$

5.- $\dfrac{(x-1)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{4} = 1$

6.- $\dfrac{(x+2)^2}{4} - \dfrac{y^2}{5} = 1$

7.- $\dfrac{(x-3)^2}{7} - \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

8.- $\dfrac{(x-2)^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{9} = 1$

9.- $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{(y-3)^2}{7} = 1$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Hipérbola de ecuación: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

Asíntotas: $y-1 = \pm 2/3(x-2)$

2.- Hipérbola de ecuación: $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Asíntotas: $y-2 = \pm 3/4(x-3)$

3.- Par de rectas que se cortan: $y-8 = \pm (x-6)$

4.- Par de rectas que se cortan: $y-3 = \pm 3/4(x-1)$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO VI.

1.- 1	7.- 0
2.- 0	8.- 0
3.- 0	9.- 3
4.- 1	10.- 0
5.- 0	11.- 0
6.- 2	

REPASO GENERAL DEL CURSO.

Es verdaderamente importante recalcar el papel que desempeñan las matemáticas y la ciencia en la vida moderna. Debemos de estar conscientes de que las matemáticas son el motor de la ciencia moderna y que sin un conocimiento, al menos elemental de la materia, quedaríamos imposibilitados para participar, o cuando menos comprender, muchas de las actividades en esta era del espacio.

Con el fin de mantener despierto tu interés, los maestros hemos presentado este curso de matemáticas de modo tal, que logre avivar tu interés y hacerte vislumbrar el enorme valor que tiene esta materia.

Hemos llegado a esta unidad de repaso final y dado un paso más en nuestro aprendizaje. Cuando ascendemos por una abrupta pendiente, solemos poner cuidado en cada dificultad que nos presenta el camino. Al llegar a una cima, es difícil resistir el impulso de mirar hacia atrás y observar el avance logrado. A veces, al final del curso, puede tenerse esta misma sensación de logro. Hemos enfrentado cada dificultad conforme se ha venido presentando, pero sólo al terminar el semestre podremos evaluar el progreso total.

Te deseamos mucho éxito en el estudio de ésta, tu última unidad.

OBJETIVOS:

1.- Definir o reconocer las definiciones apropiadas, o distinguir como verdaderos o falsos los conceptos o términos de la tabla A anexa a la unidad.

2.- Definir de 2 maneras diferentes las funciones trigonomé-

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Hipérbola de ecuación: $\frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{4} = 1$

Asíntotas: $y-1 = \pm 2/3(x-2)$

2.- Hipérbola de ecuación: $\frac{(x-3)^2}{16} - \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

Asíntotas: $y-2 = \pm 3/4(x-3)$

3.- Par de rectas que se cortan: $y-8 = \pm (x-6)$

4.- Par de rectas que se cortan: $y-3 = \pm 3/4(x-1)$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO VI.

1.- 1	7.- 0
2.- 0	8.- 0
3.- 0	9.- 3
4.- 1	10.- 0
5.- 0	11.- 0
6.- 2	

REPASO GENERAL DEL CURSO.

Es verdaderamente importante recalcar el papel que desempeñan las matemáticas y la ciencia en la vida moderna. Debemos de estar conscientes de que las matemáticas son el motor de la ciencia moderna y que sin un conocimiento, al menos elemental de la materia, quedaríamos imposibilitados para participar, o cuando menos comprender, muchas de las actividades en esta era del espacio.

Con el fin de mantener despierto tu interés, los maestros hemos presentado este curso de matemáticas de modo tal, que logre avivar tu interés y hacerte vislumbrar el enorme valor que tiene esta materia.

Hemos llegado a esta unidad de repaso final y dado un paso más en nuestro aprendizaje. Cuando ascendemos por una abrupta pendiente, solemos poner cuidado en cada dificultad que nos presenta el camino. Al llegar a una cima, es difícil resistir el impulso de mirar hacia atrás y observar el avance logrado. A veces, al final del curso, puede tenerse esta misma sensación de logro. Hemos enfrentado cada dificultad conforme se ha venido presentando, pero sólo al terminar el semestre podremos evaluar el progreso total.

Te deseamos mucho éxito en el estudio de ésta, tu última unidad.

OBJETIVOS:

1.- Definir o reconocer las definiciones apropiadas, o distinguir como verdaderos o falsos los conceptos o términos de la tabla A anexa a la unidad.

2.- Definir de 2 maneras diferentes las funciones trigonométricas para cualquier ángulo agudo.

3.- Dado el valor de cualquier función trigonométrica, encontrar:

a) Las demás funciones trigonométricas.
b) Sus recíprocas o cofunciones.

4.- Sin necesidad de usar tablas, expresar los valores de las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos en términos de una razón.
0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 180°, 270°, 360°

5.- Discriminar entre las funciones trigonométricas, aquellas que sean útiles para resolver cualesquier problema planteado en relación con ellas.

6.- Expresar correctamente las funciones trigonométricas de ángulos obtusos, cóncavos o negativos, en términos de ángulos agudos y mostrar su valor por medio de tablas.

7.- Transformar correctamente ángulos de medida sexagesimal a radianes o viceversa.

8.- Demostrar las relaciones fundamentales y usarlas correctamente para expresar cualquier enunciado en términos de otra igualdad.

9.- Resolver correctamente ecuaciones trigonométricas condicionales (lineales o cuadráticas) para valores positivos del ángulo; expresando sus soluciones en medida sexagesimal o radianes.

10.- Aplicar correctamente la ley de los senos y cosenos en la resolución de triángulos oblicuángulos, dadas las siguientes condiciones:

a) Un lado y dos ángulos cualquiera.
b) Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
c) Dos lados y el ángulo que forman.
d) Los tres lados.

11.- Transformar correctamente los números complejos, de la forma rectangular (a+bi) a la fomra polar o trigonométrica $r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ o viceversa.

12.- Efectuar correctamente operaciones (suma, resta, multiplicación y división) con números complejos; expresando su resultado en forma rectangular o trigonométrica.

13.- Encontrar correctamente la pendiente o inclinación de una recta dados dos puntos cualquiera de ella.

14.- Encontrar correctamente la ecuación de la línea recta, dados dos puntos o un punto y la pendiente.

15.- Encontrar correctamente la distancia de un punto a una recta, dados el punto y la ecuación.

16.- Encontrar correctamente la ecuación de la circunferencia, dados cualesquiera de las siguientes condiciones:

a) El centro y el radio.
b) El centro y un punto de la circunferencia.
c) Los puntos extremos de un diámetro.
d) Tres puntos cualquiera de la circunferencia.

17.- Describir el lugar geométrico que representa cualquier ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

18.- Encontrar correctamente la ecuación de la parábola, dadas las siguientes condiciones:

a) El vértice y el foco.
b) El vértice y la directriz.
c) El vértice y el lado recto.

19.- Encontrar correctamente la ecuación de la elipse, dadas las siguientes condiciones.

a) El centro, los ejes y los focos.
b) El centro, un eje y un vértice.

c) El centro, un eje y el lado recto.
d) El centro, un vértice y un punto de la curva.
e) El centro y dos puntos de la curva.

20.- Encontrar correctamente la ecuación de la hipérbola, dadas las siguientes condiciones:

a) El centro, un eje y un punto de la curva.
b) El centro, un eje y un foco.
c) El centro, un vértice y el lado recto.
d) El centro, un foco y las asíntotas.
e) El centro y dos puntos de la curva.
f) El centro, un vértice y un punto de la curva.
g) El centro, un vértice y un foco.

21.- Describir el lugar geométrico que representa cualquier ecuación de la forma:

a) $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
con $A.C > 0$ y $A \neq C$

b) $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
con $A.C < 0$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Para que puedas resolver práctica y eficazmente la unidad, te recomendamos los siguientes pasos:

a) Lee bien tus objetivos y trata de comprender lo que se te pide en cada uno de ellos.

b) En caso de no entender alguno de tus objetivos, pregunta a tu maestro asesor.

c) Consulta con suma atención tu texto para que puedas resolver satisfactoriamente tus objetivos. Procura tener siempre a la mano papel y lápiz para resolver los ejemplos y ejercicios que vienen en tu texto y en tu libro de unidades, comenzando con los que traen respuestas en las páginas finales.

d) Una vez que te sientas seguro, te sugerimos que trates de resolver los problemas que no traen respuesta, para que así tengas más confianza en tu aprendizaje logrado.

e) En caso de no entender algún problema, consúltalo con tus compañeros más aventajados o bien con tu asesor.

f) Haz grupos con tus compañeros para que entre todos resuelvan más rápido la unidad.

g) Entre más te ejercites en la resolución de los problemas más fácil te será resolver la unidad. En los temas que tengas más dificultad, es donde necesitas practicar y leer más para que puedas salir avante en tus objetivos.

2.- Para que puedas contestar satisfactoriamente la unidad, estudia todas las unidades del curso, sacando todas las anotaciones que juzgues importantes, así como copia todas las fórmulas que vimos para que las tengas a la mano.

3.- Pon en práctica tus conocimientos adquiridos a lo largo del curso en la resolución de la autoevaluación (sin hacer trampa), cuidando de anotar los problemas equivocados para que estudies sus objetivos respectivos.

4.- Por último, no nos queda más que desearte mucho éxito en tu vocación futura esperando haber cumplido con la misión que nos hemos trazado contigo, que es, el que APRENDAS A APRENDER. Esperamos, así mismo, que hayas sentido placer en explorar las matemáticas junto con nosotros.

Que tus éxitos en el estudio sean los que te lleven a la satisfacción de tus más caros anhelos, te desean tus amigos:

LOS COORDINADORES.

¡EXITO EN TU VIDA FUTURA!