4.- Bajo el objetivo anterior, encontrar la pendiente y/o inclinación de una recta, dados dos puntos cualquiera que pertenezcan a dicha recta.

5.- Aplicar correctamente el concepto de pendiente y los principios de paralelismo y perpendicularidad, para demostrar cuándo dos rectas son paralelas o perpendiculares entre sí.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1.- Estudia la lección 1 del capítulo II de tu texto "Geometría Analítica". Para los primeros dos objetivos intervienen dos conceptos importantes y que debes saber distinguir para poder demostrar las fórmulas. Ten presentes estas fórmulas, ya que las aplicaremos en unidades posteriores.

Una vez que hayas estudiado los ejemplos que vienen en tu texto, resuelve como práctica del objetivo 2, la autoevaluación 1.

Los objetivos 3, 4 y 5 están íntimamente ligados, por lo que te recomendamos trates de comprender bien el objetivo 3, ya que es la base para resolver satisfactoriamente los otros dos objetivos. Ve y analiza los ejemplos que se exponen para que luego trates de resolver la autoevaluación 2.

2.- Si ya lograste contestar satisfactoriamente la unidad, resuelve la autoevaluación de la lección.

CAPITULO 2.

LA LÍNEA RECTA.

LECCIÓN 1.

2-1 INTRODUCCIÓN.

Un hilo tirante dá una idea intuitiva de la línea recta, la cual suele definirse como aquella que tiene todos sus puntos en una misma dirección. Así, por ejemplo, se comprueba si el borde de una regla es recta, dirigiendo una visual por uno de sus extremos para ver si todos sus puntos quedan ocultos detrás del primero. Para trazar líneas rectas se emplea generalmente, una regla, una escuadra, o un cordón bien tirante.

Por ejemplo, los carpinteros y aserradores emplean, para trazar rectas sobre la madera, un cordel bien estirado impregnado de una materia colorante, que se hace vibrar a lo largo de las piezas o troncos que se quieran aserrar. Los jardineros tienden un cordel entre dos estacas para guiarse en los surcos o plantíos que quieran hacer en línea recta. Los albañiles se sirven también de un cordel tendido a lo largo de las paredes que construyen, para mantener su alineación y de la plomada, para asegurarse que dichas paredes suben verticalmente.

En general, la línea recta es el camino más corto entre dos puntos analíticamente hablando, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables, es una recta.

Una recta queda determinada completamente si se conocen dos condiciones, por ejemplo, dos de sus puntos o un punto y su dirección.

El aprendizaje de la Geometría Analítica no es difícil, sólo requiere estudio y trabajo concienzudo. El material elaborado está expuesto en forma clara y sencilla, especialmente para aquellos alumnos que dan sus primeros pasos en el estudio de esta rama de las matemáticas.

Para estar en condiciones de empezar a analizar las ecuaciones lineales en cualquiera de sus formas equivalentes, en esta lección, aprenderás a comprender el significado de conceptos como: distancia entre dos puntos, coordenadas del punto medio, pendiente, inclinación, así como las condiciones de paralelismo y perpendicularidad.

2-2 LONGITUD DE SEGMENTOS PARALELOS A LOS EJES.

Supongamos que A_1 y A_2 son dos puntos de una recta paralela al "eje x". Entonces podremos escribir sus coordenadas como $A_1(x_1, a)$ y $A_2(x_2, a)$ (fig. 1). Ahora queremos saber la longitud de $A_1 A_2$ y la forma de expresarla. Dibujemos A_1C y A_2D perpendiculares al eje x. Entonces C tiene por coordenadas $(x_1, 0)$ y $D(x_2, 0)$. Además, las longitudes A_1A_2 y CD son iguales por ser lados opuestos de un rectángulo.

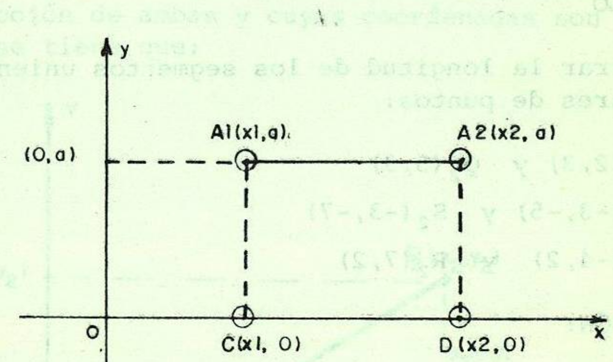

Fig. 1.

De los conceptos anteriores podemos saber que:

$$CD = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

de ahí que:

$$A_1 A_2 = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Esto nos da el siguiente teorema:

> La longitud de un segmento paralelo al eje "x", entre $A_1(x_1, a)$ y $A_2(x_2, a)$ está dada por:
>
> $$A_1 A_2 = |x_2 - x_1| = |x_1 - x_2|$$

Una demostración semejante sirve para enunciar el siguiente teorema:

> La longitud de un segmento paralelo al "eje y" entre $B_1(a, y_1)$ y $B_2(a, y_2)$ está dada por:
>
> $$B_1B_2 = |y_2 - y_1| = |y_1 - y_2|$$

EJEMPLO

Encontrar la longitud de los segmentos uniendo los siguientes pares de puntos:

a) $Q_1(2,3)$ y $Q_2(5,3)$

b) $S_1(-3,-5)$ y $S_2(-3,-7)$

c) $R_1(-4,2)$ y $R_2(7,2)$

SOLUCIÓN:

a) Como la unión de los puntos Q_1 y Q_2 resulta un segmento paralelo al "eje X", tenemos que:

$$Q_1Q_2 = |x_2 - x_1| = |5 - 2| = |3| = 3$$

b) Como la unión de los puntos S_1 y S_2 resulta un segmento parelelo al "eje Y", tenemos que:

$$S_1S_2 = |y_2 - y_1| = |-7-(-5)| = |-7+5| = |-2| = 2$$

c) Y como el segmento R_1 R_2 es paralelo al "eje X", tenemos que:

$$R_1R_2 = |x_2 - x_1| = |7-(-4)| = |7+4| = |11| = 11$$

2-3 DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS.

Uno de los conceptos más importantes de la Geometría Analítica es la fórmula que da la longitud de un segmento P_1 P_2 o la "distancia" entre los puntos P_1 y P_2 en términos de sus coordenadas. Para obtenerla, consideraremos los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ del plano coordenado (fig. 2); construiremos un triángulo rectángulo cuya hipotenusa sea el segmento P_1P_2, trazando al efecto por P_1 una paralela al "eje X" y por P_2 una paralela al "eje Y"; designemos por R el punto de intersección de ambas y cuyas coordenadas son $R(x_2, y_1)$. Entonces, se tiene que:

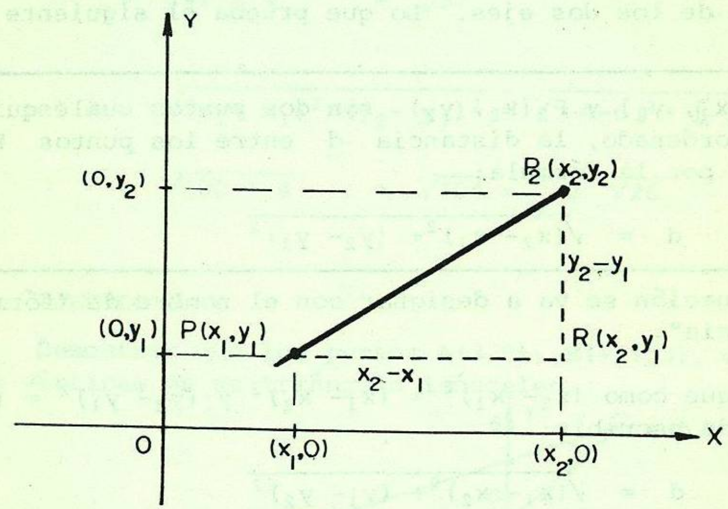

FIG.- 2

La longitud del segmento P_1P_2 puede ser calculado por el teorema de Pitágoras (en un triángulo rectángulo cualquiera, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos); a partir de este teorema,

$$(P_1P_2)^2 = (P_1R)^2 + (RP_2)^2$$

de donde:

$$P_1R = |x_2 - x_1| \qquad \text{y} \qquad RP_2 = |y_2 - y_1|$$

y consecuentemente,

$$(P_1P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

y como;

$$|x_2 - x_1|^2 = (x_2 - x_1)^2 \qquad y \qquad |y_2 - y_1|^2 = (y_2 - y_1)^2$$

de aquí que:

$$(P_1P_2)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Observamos que es verdad, aunque la recta $P_1 P_2$ sea paralela a uno de los dos ejes. Lo que prueba el siguiente teorema:

> "Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano coordenado, la distancia $\underline{d}$ entre los puntos P_1 y P_2 está dada por la fórmula:
>
> $$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esta ecuación se va a designar con el nombre de "fórmula de la distancia".

Nótese que como $(x_2 - x_1)^2 = (x_1 - x_2)^2$ y $(y_2 - y_1)^2 = (y_1 - y_2)^2$, se puede escribir:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

o sea que, en el empleo de la fórmula de la distancia para encontrar la distancia entre dos puntos, cualquiera de ellos puede ser designado como (x_1, y_1) y el otro como (x_2, y_2).

EJEMPLO 1.

Encuentre la distancia entre las siguientes parejas de puntos:

a) (4,-3) y (-2, 5)
b) (-2,3) y (5, 1)
c) (6,-1) y (-4,-3)

SOLUCIÓN:

Usando la fórmula de la distancia se encuentra que:

a) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-2-4)^2 + [5-(-3)]^2}$

$d = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$.

b) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{[5-(-2)]^2 + (1-3)^2} =$

$= \sqrt{49 + 4} = \sqrt{53}$

c) $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(-4-6)^2 + [-3-(-1)]^2} =$

$= \sqrt{100 + 4} = \sqrt{104} = 2\sqrt{26}$

EJEMPLO 2.

Demostrar que los puntos A(3,8), B(-11,3), C(-8,-2) son los vértices de un triángulo isósceles.

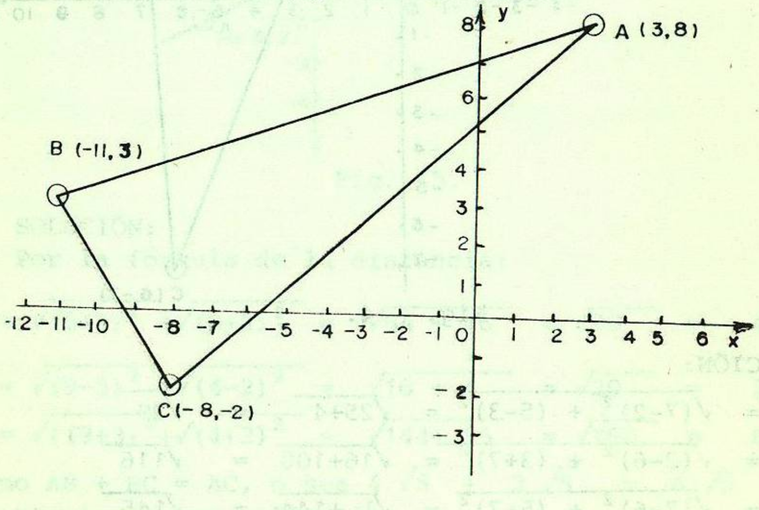

Fig. 3.

SOLUCIÓN:

Por la fórmula de la distancia:

$$AB = \sqrt{(3+11)^2 + (8-3)^2} = \sqrt{196+25} = \sqrt{221}$$

$$AC = \sqrt{(3+8)^2 + (8+2)^2} = \sqrt{121+100} = \sqrt{221}$$

$$BC = \sqrt{(-11+8)^2 + (3+2)^2} = \sqrt{9+25} = \sqrt{34}$$

Como se encontró que AB = AC, el triángulo dado es isósceles.

EJEMPLO 3.

Demostrar que los puntos A(7,5), B(2,3), C(6,-7) son los vértices de un triángulo rectángulo.

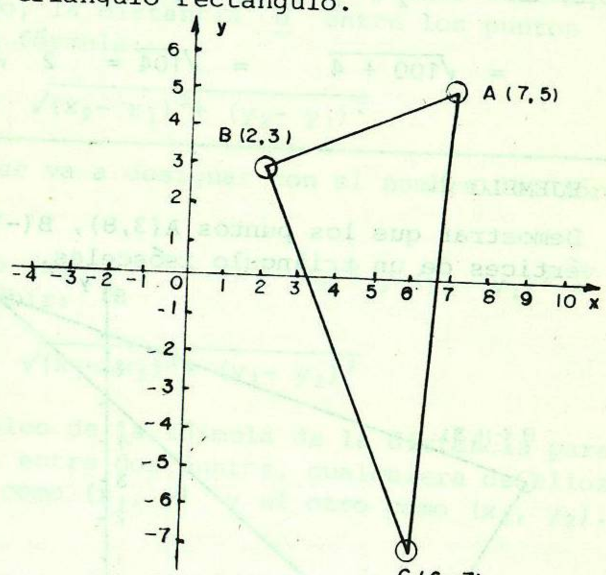

Fig. 4.

SOLUCIÓN:

$$AB = \sqrt{(7-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$

$$BC = \sqrt{(2-6)^2 + (3+7)^2} = \sqrt{16+100} = \sqrt{116}$$

$$AC = \sqrt{(7-6)^2 + (5+7)^2} = \sqrt{1+144} = \sqrt{145}$$

Si para el triángulo con vértices en A, B y C se cumple que $(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$, entonces ABC es un triángulo rectángulo en B; y como

$$(AB)^2 + (BC)^2 = 29 + 116 = 145 = (AC)^2$$

en consecuencia, el triángulo ABC del presente ejemplo es rectángulo en B.

EJEMPLO 4.

Demostrar que los tres puntos siguientes son colineales: A(-3,-2), B(5,2) y C(9,4).

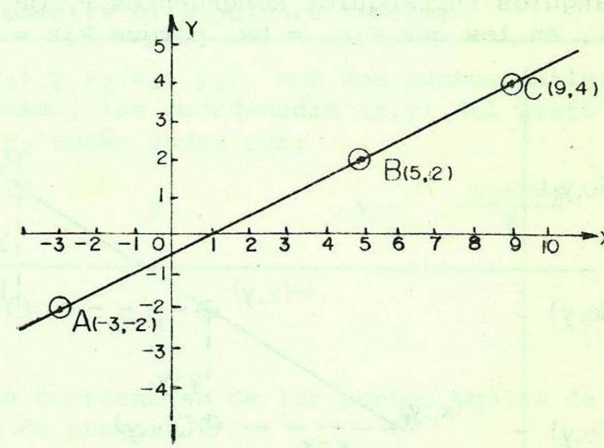

Fig. 5.

SOLUCIÓN:

Por la fórmula de la distancia:

$$AB = \sqrt{(5+3)^2} + \sqrt{(2+2)^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$BC = \sqrt{(9-5)^2} + \sqrt{(4-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$AC = \sqrt{((9+3)^2} + \sqrt{(4+2)^2} = \sqrt{144+ 36} = \sqrt{180} = 6\sqrt{5}$$

y como AB + BC = AC, o sea $4\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = 6\sqrt{5}$ los puntos anteriores son colineales.

2-4 PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO.

Frecuentemente se desea encontrar las coordenadas del punto medio del segmento que une dos puntos de coordenadas dadas.

Consideremos los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ como los extremos del segmento P_1P_2 y $P(x,y)$ su punto medio; se ve que para estos puntos se cumple la igualdad $P_1P = PP_2$. Por cada uno de estos tres puntos trazaremos paralelas a los ejes coordenados como se muestra en la figura 6, de modo de formar triángulos rectángulos congruentes P QP y PRP (ver figura 6), en los que $P_1Q = PR$ porque $P_1P = PP_2$.

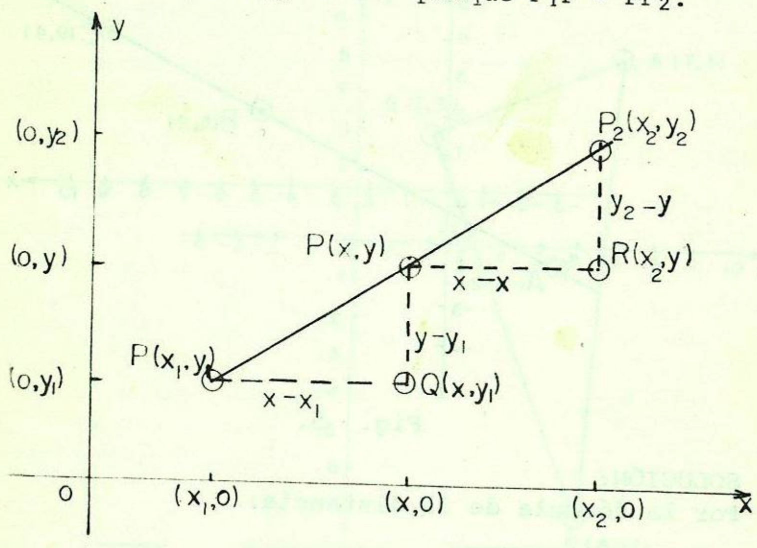

Fig. 6.

Ahora, $P_1Q = x-x_1$ y $PR = x_2- x$, de donde:

$$x - x_1 = x_2 - x$$

reordenando $\qquad 2x = x_1 + x_2$

y despejando $\qquad x = \dfrac{x_1+x_2}{2}$

Análogamente, $QP = RP_2$ y

$$y - y_1 = y_2 - y$$

reordenando $\qquad 2y = y_1 + y_2$

despejando $\qquad y = \dfrac{y_1+y_2}{2}$

con lo que se demuestra el siguiente teorema:

> "Si $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera del plano coordenado, las coordenadas (x,y) del punto medio del segmento P_1P_2 están dadas por:
>
> $$x = \frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{y} \quad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

EJEMPLO 1.

Encuentre las coordenadas de los puntos medios de las siguientes parejas de puntos:

a) $A_1(3,7)$ y $A_2(5, -5)$

b) $R_1(6,-5)$ y $R_2(-3,2)$

SOLUCIÓN:

a) Sea $A(x,y)$ el punto medio del segmento A_1A_2. Por el teorema anterior, las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos $A_1(3,7)$ y $A_2(5,-5)$ son:

$$x = \frac{3+5}{2} = 4, \qquad y = \frac{7-5}{2} = 1$$