o sea que A es el punto (4,1).

b) En forma semejante se encuentra que R (el punto medio del segmento R_1R_2) tiene como coordenadas.

$$x = \frac{6-3}{2} = \frac{3}{2}, \qquad y = \frac{-5+2}{2} = \frac{-3}{2}$$

o sea que R es el punto (3/2, -3/2).

EJEMPLO 2.

Un segmento de recta tiene por extremo el punto $P_1(1,-2)$ y como punto medio a P (4,3). Encuentre las coordenadas del otro extremo.

SOLUCIÓN:

Si el punto $P_2(x_2, y_2)$ es el otro extremo; sustituyendo $x_1 = 1$ y $x = 4$ en $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$, se obtiene:

$$4 = \frac{1 + x_2}{2}, \text{ o sea } \qquad 8 = 1 + x_2$$

de donde $x_2 = 7$.

Análogamente, sustituyendo $y_1 = -2$, $y = 3$ en $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$, resulta:

$$3 = \frac{-2 + y_2}{2}, \text{ o sea } \qquad 6 = -2 + y_2$$

de donde $y_2 = 8$.

Por lo tanto las coordenadas del otro extremo son $P_2(7,8)$.

Muchos teoremas de la Geometría Plana Elemental pueden demostrarse "analíticamente", empleando las ideas y los procedimientos de la Geometría Analítica. El siguiente ejemplo aclara el concepto.

EJEMPLO 3.

Demostrar, analíticamente, que las diagonales del paralelogramo cuyos vértices son los puntos: A(-2,-3), B(5,-4), C(4,1), D(-3,2), cortan por mitad.

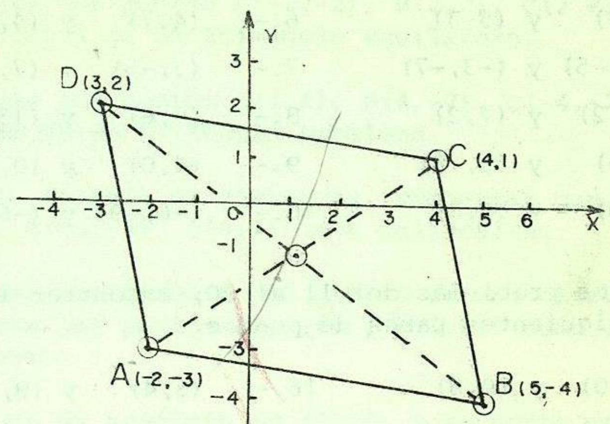

Fig. 7.

SOLUCIÓN:

Para usar los métodos de Geometría Analítica, se debe colocar el paralelogramo dado en el plano coordenado. (Fig. 7).

Por el teorema anterior, se encuentra que las coordenadas del punto medio del segmento AC son: (1, -1) y que las coordenadas del punto medio del segmento BD son (1, -1); lo que prueba que los puntos medios de AC y BD coinciden y el teorema enunciado ha sido demostrado.

Al demostrar teoremas geométricos por métodos analíticos, debemos de tener cuidado al colocar la figura en un sistema coordenado, de no suponer más de lo que ha sido dado. En particular, debe evitarse cuidadosamente al dibujar la figura, suponer que la conclusión es cierta.

AUTOEVALUACION 1.

En los problemas del 1 al 10, encontrar la longitud de los segmentos uniendo los pares de puntos siguientes:

1.- (2,3) y (5,3)
2.- (-3,-5) y (-3,-7)
3.- (-4,2) y (7,2)
4.- (5,5) y (5,-6)
5.- (0,0) y (0,3)
6.- (4,7) y (4,-10)
7.- (3,-5) y (7, -5)
8.- (6,6) y (13,6)
9.- (4,0) y (0,0)
10.- (-6,-9) y (-6,-11)

En los problemas del 11 al 20, encontrar la distancia entre los siguientes pares de puntos.

11.- (-6,0) y (0,8)
12.- (4,1) y (-1,1)
13.- (6,-2) y (-3,7)
14.- (5,8) y (-3,2)
15.- (2,-3) y (3,3)
16.- (3,4) y (9,11)
17.- (1,3) y (-5,5)
18.- (3,-2) y (4,1)
19.- (0,3) y (-4,1)
20.- (2,-6) y (2,-2)

En los problemas del 21 al 30, encontrar las coordenadas del punto medio entre los siguientes pares de puntos.

21.- (2,3) y (6,1)
22.- (7,7) y (5,9)
23.- (6,-2) y (3,5)
24.- (4,4) y (2,0)
25.- (-3,2) y (7,-6)
26.- (4,-2) y (1,3)
27.- (3,-1) y (1,-2)
28.- (9,3) y (8,6)
29.- (-2,-4) y (2,6)
30.- (0,2) y (4,-8)

31.- Demostrar, aplicando la fórmula de distancia, que el triángulo A(2,-2), B(2,8), C(-2,0) es rectángulo.

32.- Demostrar aplicando la fórmula de distancia, que los puntos A(0,1), B(1,0), C(-1,-4), D(-2,-3) son los vértices de un paralelogramo.

33.- Demostrar, aplicando la fórmula de la distancia, que los puntos A(2,4), B(5,1), C(6,5) son los vértices de un triángulo isósceles.

34.- Demostrar que los puntos A(-2,-2), B(2,2), C(2 $\sqrt{3}$,-2 $\sqrt{3}$) son los vértices de un triángulo equilátero.

35.- Demostrar que los puntos A(4,4), B(4,-2), C(-4,-2) son los vértices de un triángulo escaleno.

36.- Aplicando la fórmula de distancia, demostrar que los puntos A(1,3), B(-2,-3), C(3,7) son colineales.

37.- Encontrar las coordenadas del centro de una circunferencia que tiene los puntos A(-4,6) y B(2,0) como extremos de un diámetro.

38.- El extremo de un segmento es (-3,6) y su punto medio es (-1,2). Encuentre las coordenadas del otro extremo.

39.- El extremo de un segmento es (5,-1) y su punto medio es (5/2, -5/2). Encuentre las coordenadas del otro extremo.

40.- Demostrar que los puntos A(4,6), B(2,-2), C(-11,-1) y D(-13,-9) son los vértices de un paralelogramo y que las diagonales cortan por mitad.

2-5 INCLINACIÓN Y PENDIENTE DE UNA RECTA.

A partir de una recta L, que no sea paralela al "eje Y" y que pasa por los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, (fig. 8). consideremos las siguientes definiciones:

"La inclinación Θ de una recta L, es el menor de los ángulos que dicha recta forma con el semieje positivo de las X y se mide, desde la parte positiva del "eje X" a la recta L, en el sentido contrario al de las agujas del reloj, entre los límites $0° \leq \Theta < 180°$".

La inclinación de una recta paralela al "eje X" es 0° y la inclinación de una recta paralela al "eje Y" es de 90°.

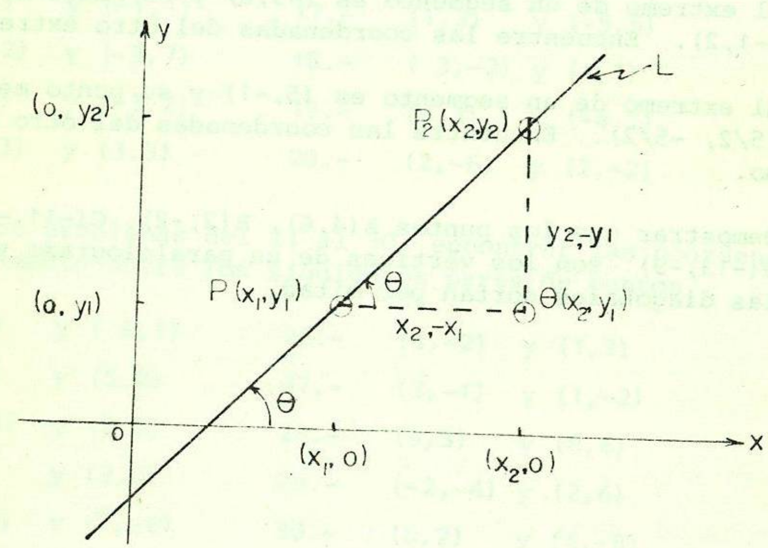

Fig. 8.

"La pendiente *m* de una recta es la tangente del ángulo de inclinación". En estas condiciones,

$$m = \tan \Theta$$

(siendo "Θ" el ángulo de inclinación y "m" la pendiente).

La pendiente de una recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ es:

$$m = \tan \Theta$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

cualesquiera que sean los cuadrantes en los que estén situados los puntos P_1 y P_2.

La pendiente de una recta paralela al "eje X" (o sea, cuando, $y_2 - y_1 = 0$) es cero. La pendiente de una recta paralela al "eje Y" (o sea, cuando $x_2 - x_1 = 0$) no está definida. Y puesto que:

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

así que para el cálculo de la pendiente no importa la denominación de los puntos.

EJEMPLO 1.

Hallar la pendiente "m" y el ángulo de inclinación Θ de las rectas que unen los pares de puntos siguientes:

$x_2 y_2$ $(x_1 y_1)$

a) (3,4), (4,1)
b) (-8,-4), (5,9)
c) (10,-3), (14,-7)
d) (-11,4), (-11,10)
e) (8,6), (14,6)

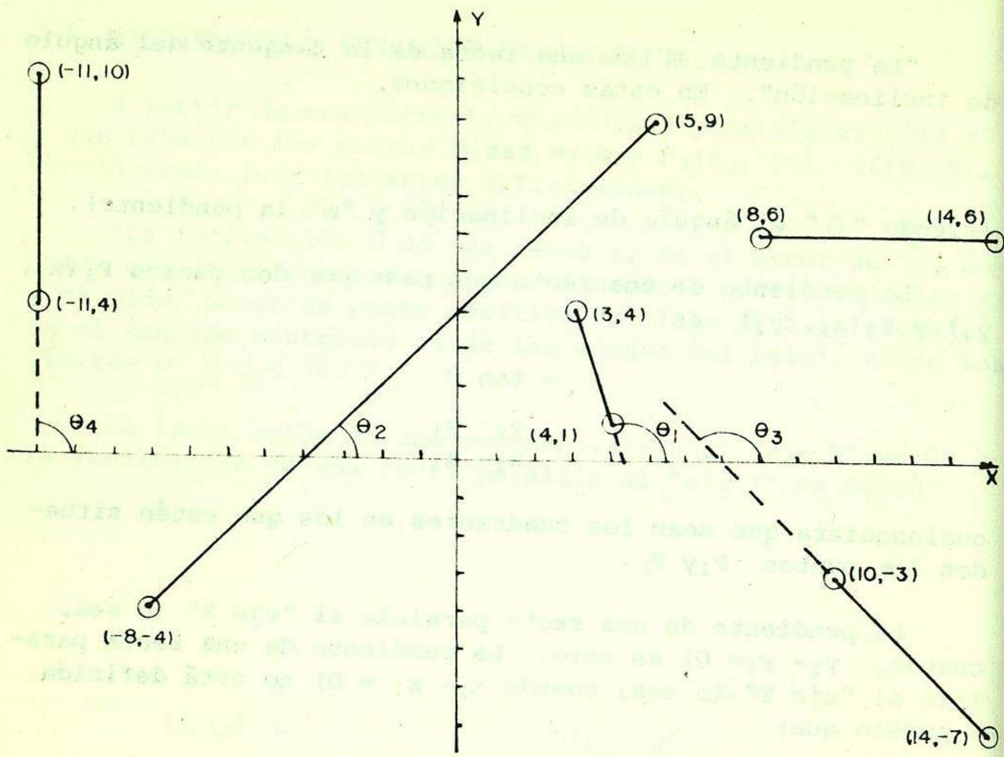

Fig. 9.

SOLUCIÓN:

a) Usando la ecuación $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$, se encuentra que "m" está dada por:

$$m_1 = \frac{1-4}{4-3}$$

$$= \frac{-3}{1}$$

$$= -3$$

o sea, que $\tan\theta_1 = -3$, siendo $0° \leq \theta < 180°$ y, en este caso θ mayor de 90° (ya que la tangente es negativa). Para hayar θ se escribe:

$$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta = 3$$

y en las tablas trigonométricas se observa que el ángulo agudo cuya tangente es 3 es 72° (tomando al entero más próximo) y por consiguiente:

$$180° - \theta_1 = 72°$$

donde $\theta_1 = 180° - 72°$

por lo tanto, $\theta_1 = 108°$

y así,

b) $m_2 = \dfrac{9+4}{5+8} = 1$ y $\theta_2 = 45°$

c) $m_3 = \dfrac{-7+3}{14-10} = -1$ y $\theta_3 = 135°$

d) $m_4 = \dfrac{10-4}{-11+11} = \dfrac{6}{0} = \infty$ y $\theta_4 = 90°$

e) $m_5 = \dfrac{6-6}{14-8} = \dfrac{0}{6} = 0$ y $\theta_5 = 0°$

EJEMPLO 2.

Demostrar, aplicando el concepto de pendiente, que los puntos A(-3,4), B(3,2) y C(6,1) son colineales.

SOLUCIÓN:

$$\text{Pendiente de AB} = \frac{2-4}{3+3} = -\frac{1}{3}$$

$$\text{Pendiente de AC} = \frac{1-4}{6+3} = -\frac{1}{3}$$

Como la pendiente de AB es la misma que la de AC, los tres puntos están situados sobre la misma recta.

2-6 RECTAS PARALELAS Y PERPENDICULARES.

Consideremos los siguientes teoremas:

"Si dos rectas L_1 y L_2 tienen la misma pendiente, entonces son paralelas."

$$L_1 \parallel L_2 \quad \longleftrightarrow \quad m_1 = m_2$$

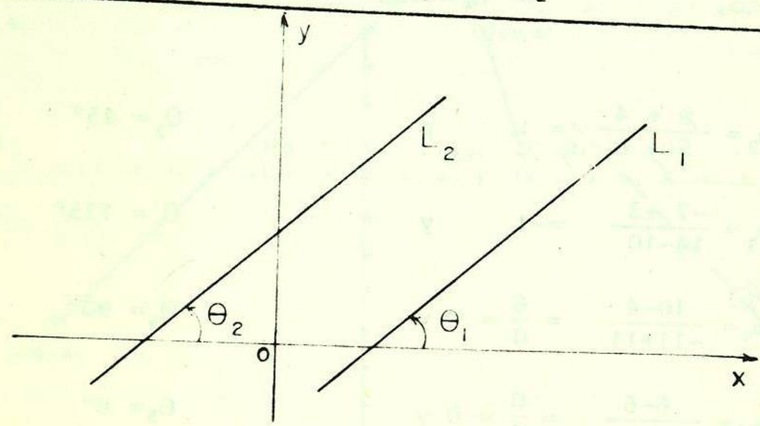

Fig. 10.

La demostración es inmediata, puesto que si dos rectas tienen la misma pendiente, tienen la misma inclinación y por lo tanto, son paralelas. O sea que, si $m_1 = m_2$ se concluye que $\tan\Theta_1 = \tan\Theta_2$, lo que implica que $\Theta_1 = \Theta_2$; en virtud de que la inclinación de una recta está restringida a $0° \leq \Theta < 180°$ y porque existe un sólo ángulo que satisface esta desigualdad. Entonces, como $\Theta_1 = \Theta_2$, $L_1 \parallel L_2$.

"Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares, si sus pendientes son recíprocas y de signo contrario."

$$L_1 \perp L_2 \quad \longleftrightarrow \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

o bien,

$$L_1 \perp L_2 \quad \longleftrightarrow \quad m_1 \, m_2 = -1$$

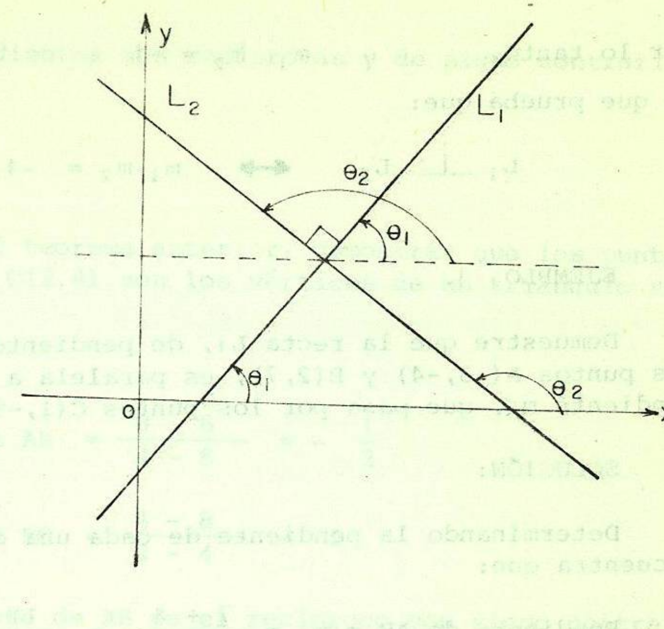

Fig. 11.

Para demostrar el teorema anterior, supongamos que L_1 y L_2 son perpendiculares entre sí y que sus inclinaciones respectivas son Θ_1 y Θ_2 (figura 11). Por el punto de intersección de L_1 y L_2 trazamos una interrumpida L, paralela al "eje X"; entonces Θ_1 y Θ_2 son los ángulos acotados en la figura 11 con:

$$\Theta_2 - \Theta_1 = 90°$$

o bien,

$$\Theta_2 = \Theta_1 + 90°$$

y consecuentemente $\quad \tan\Theta_2 = \tan(\Theta_1 + 90°)$

como $\quad \tan(\Theta_1 + 90°) = -\cot\Theta_1$

resulta $\quad \tan\Theta_2 = -\cot\Theta_1$

$$= -\frac{1}{\tan\Theta_1}$$

o sea, $\quad m_2 = -\frac{1}{m_1}$

por lo tanto, $m_1 \; m_2 = -1$

lo que prueba que:

$$L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 m_2 = -1$$

EJEMPLO 1.

Demuestre que la recta L_1, de pendiente m_1, que pasa por los puntos A(-3,-4) y B(2,7), es paralela a la recta L_2, de pendiente m_2, que pasa por los puntos C(1,-9) y D(6,2).

SOLUCIÓN:

Determinando la pendiente de cada una de las rectas, se encuentra que:

$$\text{Pendiente de AB} = m_1 = \frac{7+4}{2+3} = \frac{11}{5}$$

$$\text{Pendiente de CD} = m_2 = \frac{2+9}{6-1} = \frac{11}{5}$$

y como $m_1 = m_2$, $L_1 \parallel L_2$.

EJEMPLO 2.

Demuestre que la recta L_1, de pendiente m_1, que pasa por los puntos A(-2,-4) y B(1,3), es perpendicular a la recta L_2, de pendiente m_2, que pasa por los puntos C(3,2) y D(-4,5).

SOLUCIÓN:

Determinando la pendiente de cada una de las rectas, se encuentra que:

$$\text{Pendiente de AB} = m_1 = \frac{3+4}{1+2} = \frac{7}{3}$$

$$\text{Pendiente de CD} = m_2 = \frac{5-2}{-4-3} = -\frac{3}{7}$$

y como estas pendientes son recíprocas y de signo contrario, $L_1 \perp L_2$.

EJEMPLO 3.

Aplicando el teorema anterior, demostrar que los puntos A(8,6), B(4,8) y C(2,4) son los vértices de un triángulo rectángulo.

SOLUCIÓN:

$$\text{Pendiente de AB} = \frac{8-6}{4-8} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{Pendiente de BC} = \frac{4-8}{2-4} = 2$$

y como la pendiente de AB es el recíproco con signo contrario de la pendiente de BC, estos dos lados del triángulo son perpendiculares.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Hallar la pendiente de las rectas que unen los pares de puntos siguiente:

1.- (3,4), (1,-2)	6.- (3,-2), (3,5)
2.- (-5,3), (2,-3)	7.- (2,4), (3,5)
3.- (6,0), (6, $\sqrt{3}$)	8.- (1,-3), (2,6)
4.- (1,3), (7,1)	9.- (-3,-3), (-4,2)
5.- (2,4), (-2,4)	10.- (-3,4), (5,4)

Hallar la inclinación de las rectas que unen los pares de puntos siguientes:

11.- (-4,-3), (-5,-2)	16.- (2, $\sqrt{3}$), (1,0)

12.-	(3,2),	(5,6)	17.-	(2,3),	(1,4)
13.-	(-2,5),	(-1,3)	18.-	(3,-2),	(3,5)
14.-	(2,-5),	(-3,-1)	19.-	($\sqrt{3}$,2),	(0,1)
15.-	(4,6),	(1,3)	20.-	(2,4),	(-2,4)

Aplicando el concepto de pendiente, averiguar cuáles de los puntos siguientes son colineales.

21.- (2,3), (-4,7) y (5,8)

22.- (4,1), (5,-2) y (6,-5)

23.- (-1,-4), (2,5) y (7, -2)

24.- (0,5), (5,0) y (6,-1)

25.- (-2,1),(3,2) y (6,3)

26.- Determine que la recta L_1 de pendiente m_1 que pasa por los puntos A(1,6) y B(-1,2) es paralela o perpendicular a la recta L_2, de pendiente m_2, que pasa por los puntos C(-7,0) y D(1,-4).

27.- Determine que la recta L_1, de pendiente m_2, que pasa por los puntos A(3,0) y B(0,2) es paralela o perpendicular a la recta L_2, de pendiente m_2, que pasa por los puntos C(6,0) y D(0,4).

Aplicando el concepto de pendiente, demostrar que los puntos siguientes son los vértices de un triángulo rectángulo.

28.- (6,5), (1,3) y (5, -7)

29.- (3,2), (5,-4) y (1,-2)

30.- (2,4), (4,8) y (6,2)

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 1.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.-	3	21.-	(4,2)
2.-	2	22.-	(6,8)
3.-	11	23.-	(9/2, 3/2)
4.-	11	24.-	(3,2)
5.-	3	25.-	(2,-2)
6.-	17	26.-	(5/2, 1/2)
7.-	4	27.-	(2, -3/2)
8.-	7	28.-	(17/2, 9/2)
9.-	4	29.-	(0,1)
10.-	2	30.-	(2, -3)
11.-	10	31.-	$(AB)^2 = (BC)^2 + (AC)^2$
12.-	5	32.-	AB =CD=$\sqrt{2}$; BC=DA= 2 $\sqrt{5}$
13.-	9 $\sqrt{2}$	33.-	AC = BC = $\sqrt{17}$
14.-	10	34.-	AB = BC = AC = 4 $\sqrt{2}$
15.-	$\sqrt{37}$	35.-	AB $\neq$ BC $\neq$ AC
16.-	$\sqrt{85}$	36.-	AB + AC = BC
17.-	2 $\sqrt{10}$	37.-	(-1,3)
18.-	$\sqrt{10}$	38.-	(1, -2)
19.-	2 $\sqrt{5}$	39.-	(0,-4)
20.-	4	40.-	AB=CD= $\sqrt{68}$; AC=BD= $\sqrt{274}$ y sus diagonales cortan por (-9/2,-3/2)

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.-	3	16.-	60°
2.-	-6/7	17.-	135°
3.-	∞	18.-	90°
4.-	- 1/3	19.-	30°
5.-	0	20.-	0°
6.-	∞	21.-	No
7.-	1	22.-	Si
8.-	9	23.-	Nó
9.-	-5	24.-	Si
10.-	0	25.-	No
11.-	135°	26.-	Perpendiculares
12.-	63°	27.-	Paralelas.
13.-	117°		
14.-	141°		
15.-	45°		

LA LINEA RECTA.

PARTE II.

En la unidad anterior hacíamos referencia a la línea recta acerca de varios ejemplos. En realidad, la línea recta tiene gran importancia en todos los medios. Así, por ejemplo, los carpinteros y aserraderos emplean, para trazar rectas sobre la madera, un cordel bien estirado impregnado de una materia colorante que se hace vibrar a lo largo de las piezas o troncos que se quieren aserrar. Los jardineros tienden un cordel entre dos estacas para guiarse en los surcos o plantíos que quieren hacer en línea recta. Los albañiles se sirven también de un cordel tendido a lo largo de las paredes que construyen, para asegurarse que dichas paredes suben verticalmente.

En general, la línea recta es el camino más corto entre dos puntos y, analíticamente hablando, es una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables, es una recta.

En esta unidad aprenderás a representar gráficamente cualquier línea recta y estarás en condición de representar su ecuación en cualquiera de sus formas equivalentes.

OBJETIVOS:

1.- Construir correctamente la gráfica de una recta, dados un punto y la pendiente.

2.- Determinar la ecuación de la línea recta, dados un punto y la pendiente.