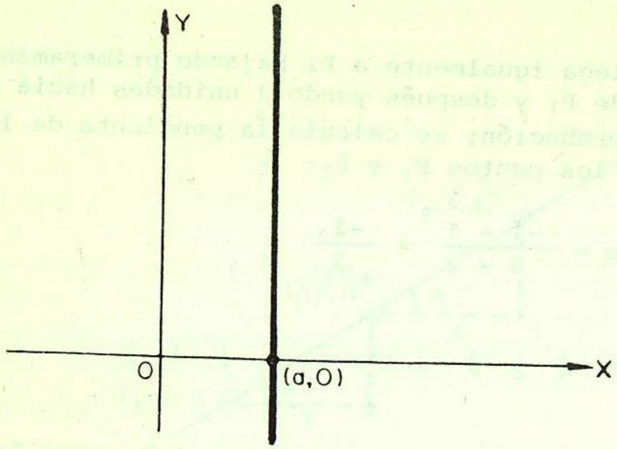

FIG.- 14

Si una recta L no vertical que pasa por el punto $P_1(x_1,y_1)$ con pendiente "m" (fig. 15), y que el punto P (x,y) sea otro

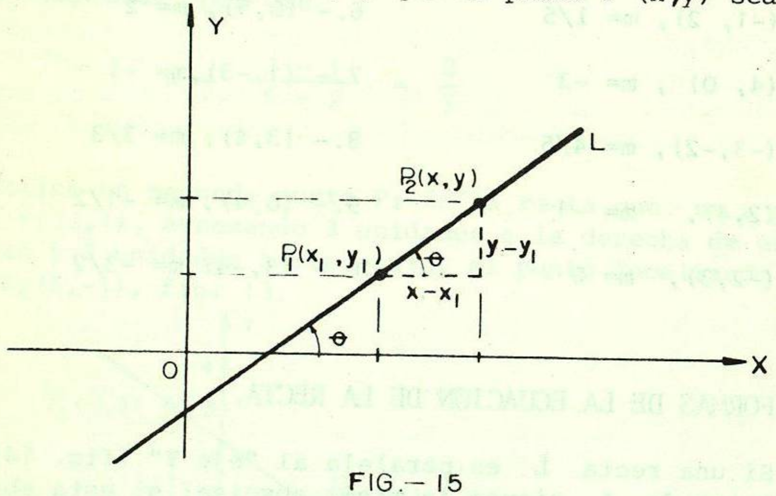

FIG.- 15

punto cualquiera de la recta diferente de P_1; entonce P (x,y) pertenece a L si la pendiente del segmento PP_1 es "m", o sea:

P(x,y) pertenece a L $\longleftrightarrow$ la pendiente PP_1 es "m"

o también:

P(x,y) pertenece a L $\longleftrightarrow \dfrac{y - y_1}{x - x_1} = m$

Como L no es vertical, $x \neq x_1$, por lo que para todo P(x,y) diferente de $P_1(x_1, y_1)$, la ecuación

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = m$$

se puede escribir como sigue:

P (x,y) pertenece a L $\longleftrightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$

y se puede observar ahora que la afirmación anterior, sigue siendo válida cuando se suprime la restricción de que P debe ser diferente de P_1; así, esta ecuación nos dice que la recta L que pasa por $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente "m", es la gráfica de la relación:

$$\{(x,y) \mid y - y_1 = m(x - x_1)\}$$

o sea que L es la gráfica de la ecuación:

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

A esta forma de la ecuación de una recta que pasa por un punto con una pendiente determinada se le llama "forma de punto y pendiente" de la ecuación de la recta.

Y si una recta L es paralela al "eje X", (m=0), fig. 16, todo punto de L tiene la misma ordenada; si esta ordenada es "b", entonces el punto P (x,y) pertenece a L si, y = b

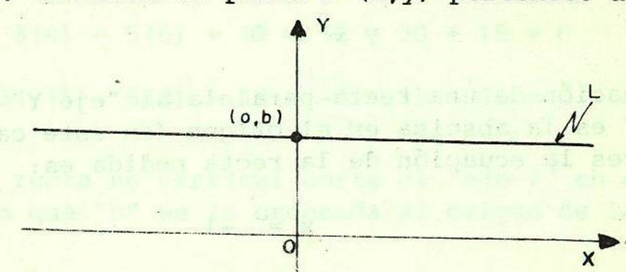

Fig. 16.

o sea que L es la gráfica de la relación:

$$\{(x, y) \mid y = b\}$$

EJEMPLO 1.

Encuentre la ecuación de la recta que satisface las con diciones dadas:

a) Paralela al "eje X" (horizontal) que intersecta al "eje Y" en el punto (0,3).

b) Paralela al "eje Y" (vertical) que intersecta al "eje X" en elpunto (-1, 0)

c) Que pasa por el punto $P_1(-4,3)$ y tenga de pendiente 1/2

d) Que pasa por los puntos $P_1(4,6)$ y $P_2(-1,3)$.

SOLUCIÓN:

a) La ecuación de una recta paralela al "eje X" es y=b; donde "b" es la ordenada en el origen (en este caso, b=3), entonces, la ecuación pedida es:

$$y = 3$$

o bien,

$$y - 3 = 0$$

b) La ecuación de una recta paralela al "eje Y" es x=a; donde "a" es la abscisa en el origen (en este caso, a=-1), entonces la ecuación de la recta pedida es:

$$x = -1$$

o bien,

$$x + 1 = 0$$

c) Con $x_1 = -4$, $y_1 = 3$, m= 1/2 y aplicando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se obtiene que:

$$y - 3 = 1/2\,[x - (-4)]$$

es decir, $y - 3 = 1/2\,(x + 4)$

multiplicando toda la ecuación por 2,

$$2y - 6 = x + 4$$

o bien, $x - 2y + 10 = 0$

d) Usando la ecuación $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se encuentra que la pendiente es 3/5.

Aplicando ahora $y - y_1 = m(x - x_1)$, con m= 3/5, $x_1 = 4$ y $y_1 = 6$, se tiene:

$$y - 6 = 3/5\,(x-4)$$

multiplicando la ecuación por 5,

$$5y - 30 = 3(x - 4)$$

es decir, $5y - 30 = 3x - 12$

o bien, $3x - 5y + 18 = 0$

Se puede comprobar esta respuesta mostrando que las coordenadas de $P_1(4,6)$ y $P_2(-1,3)$, satisfacen la ecuación obtenida:

$$3(4) - 5(6) + 18 = 12 - 30 + 18 = 0$$

y $3(-1) - 5(3) + 18 = -3 - 15 + 18 = 0$

Toda recta no vertical corta al "eje Y" en el punto B(0,b), en que "b" es la ordenada al origen de la recta (fig. 17).

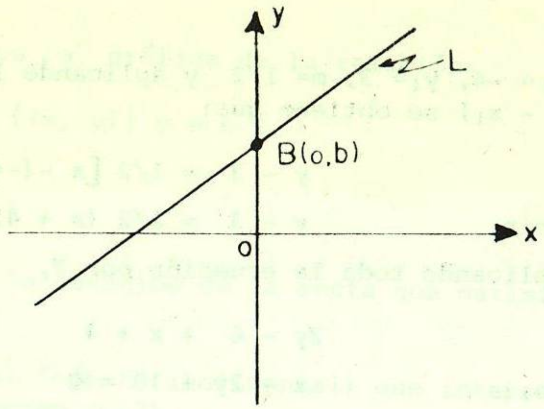

Fig. 17.

Aplicando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$ se encuentra que la ecuación de la recta L que pasa por B(o,b) con pendiente "m" es:

$$y - b = m(x - 0)$$

es decir,

$$y - b = mx$$

o bien,

$$\underline{y = mx + b}$$

que es la "forma común" de la ecuación de la recta.

EJEMPLO 2.

Encontrar la ecuación de la recta, cuya ordenada en el origen es 2 y cuya pendiente es -3.

SOLUCIÓN:

Con b= 2, m= -3 y aplicando la ecuación y= mx + b, se obtiene que la ecuación pedida es:

$$y = -3x + 2$$

o bien,

$$3x + y - 2 = 0$$

Supóngase ahora que $a \neq 0$ y $b \neq 0$ son, respectivamente, la abscisa y la ordenada en el origen de una recta L (Fig. 18)

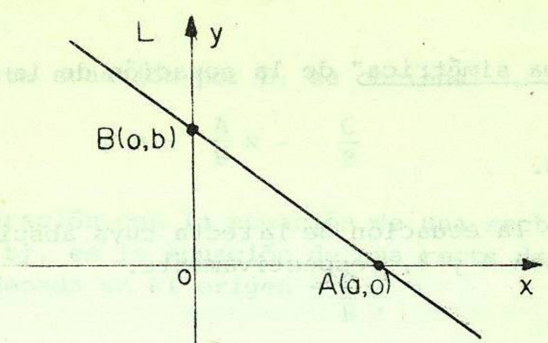

Fig. 18.

O sea que L pasa por los puntos A(a,0) y B(0,b). Usando

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

para encontrar la pendiente de la recta que pasa por estos puntos, se tiene que:

$$m = \frac{b - 0}{0 - a}$$

$$= \frac{b}{a}$$

si m = - b/a y la ordenada en el origen es "b", entonces, aplicando la ecuación de la recta en "forma común", y= mx+b, obtenemos:

$$y = -\frac{b}{a}x + b$$

multiplicando la ecuación por "a":

$$ay = -bx + ab$$

es decir,

$$bx + ay = ab$$

y finalmente, dividiendo la ecuación por "ab", nos queda:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$

que es la "forma simétrica" de la ecuación de la recta.

EJEMPLO 3.

Encontrar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen son 4 y 3, respectivamente.

SOLUCIÓN:

Con a=4, b=3 y aplicando la ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ se obtiene que la ecuación pedida es:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$$

Ya se ha visto que la ecuación y= mx + b, que es una ecuación de primer grado en "x" y "y", tiene como gráfica una recta no vertical; consecuentemente, se demuestra que la ecuación en "forma general" de primer grado en dos variables es:

$$Ax + By + C = 0$$

en donde A, B y C son números reales arbitrarios, con la sola condición de que A y B no sean simultáneamente nulos. Entonces podemos enunciar el siguiente teorema:

> "La gráfica de toda ecuación de primer grado en dos variables de la forma
>
> $$Ax + By + C = 0$$
>
> o sea la gráfica de la relación:
>
> $$\{(x, y) \mid Ax + By + C = 0\}$$
>
> es una recta".

Demostración. Si $B \neq 0$, la ecuación Ax + By + C = 0 se puede escribir como:

$$By = -Ax - C$$

dividiendo esta ecuación por B, se obtiene:

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

que por comparación con la ecuación de una recta en forma común (y= mx + b), es la ecuación de una recta de pendiente $-\frac{A}{B}$ y de ordenada en el origen $-\frac{C}{B}$.

Se ve entonces que toda ecuación de primer grado en dos variables es la ecuación de una recta; para construir su gráfica es suficiente, en virtud de que dos puntos determinan una recta, encontrar dos pares ordenados de números reales que satisfagan la ecuación, construir las gráficas de esas parejas y hacer pasar una recta por los dos puntos así obtenidos. Como precaución, es aconsejable construir la gráfica de un tercer par ordenado que también satisfaga la ecuación y comprobar que los tres puntos están en línea recta.

Como resumen, establecemos las siguientes formas de la ecuación de una recta:

a) Punto-pendiente. La ecuación de la recta que pasa por punto $P_1(x_1, y_1)$ y cuya pendiente es "m" es:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

b) Común. La ecuación de la recta de pendiente "m" y corta al "eje Y" en el punto (0,b) siendo "b" la ordenada en el origen, es:

$$y = mx + b$$

c) Simétrica. La ecuación de la recta que corta a los ejes coordenados "x" y "y" en los puntos (a, 0), siendo "a" la abscisa en el origen, y (0,b), siendo "b" la ordenada en el origen, respectivamente, es:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

d) General. Una ecuación lineal o de primer grado en las variables "x" y "y" es de la forma:

$$Ax + By + C = 0$$

en donde A, B y C son constantes arbitrarias. La pendiente de la recta escrita en esta forma es:

$$m = -\frac{A}{B}$$

y su ordenada en el origen es:

$$b = -\frac{C}{B}$$

EJEMPLO 4.

a) Construya la gráfica de la recta cuya ecuación es $3x - 4y + 12 = 0$.

b) Escriba la ecuación de la recta en la forma común y a partir de ésta determine su pendiente y su ordenada en el origen.

c) Dé el dominio y el recorrido (o alcance) de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 3x - 4y + 12 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

a) Para construir su gráfica es suficiente encontrar dos pares ordenados que satisfagan la ecuación, en este caso conviene usar las coordenadas en el origen de la recta: en donde la abscisa en el origen se encuentra haciendo en la ecuación la y=0, entonces:

$$3x - 4y + 12 = 0$$

sustituyendo, $3x - 4(0) + 12 = 0$

o bien, $3x = -12$

y despejando, $x = -12/3$

$$x = -4$$

o sea, el punto en que la recta corta al "eje X" es P (-4, 0); y la ordenada en el origen se encuentra haciendo en la ecuación la x = 0, entonces en forma semejante se obtiene y = 3 como ordenada en el origen, o sea el -- punto en que corta la recta al "eje Y" es $P_2(0,3)$. Para encontrar un tercer punto hacemos, por ejemplo, x=4, lo que implica que la y=6 para satisfacer la ecuación; a continuación se grafican los puntos $P_1(-4,0)$ y $P_2(0,3)$, se traza la recta L definida por ellos y se observa que $P_3(4,6)$ pertenece a la recta (fig. 19).

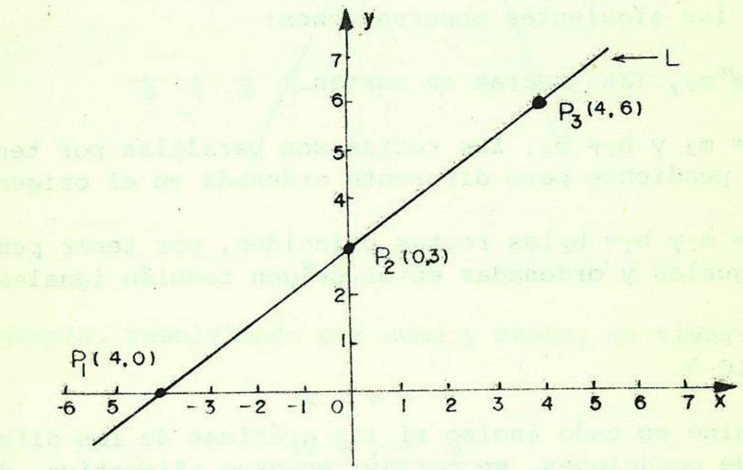

Fig. 19.

b) Para escribir la ecuación en la forma común, (y=mx+b), tenemos que despejar "y" de la ecuación dada, o sea, si

$$3x - 4y + 12 = 0$$

entonces, $y = 3/4\,x + 3$

en donde su pendiente m = 3/4 y su ordenada en el origen es b= 3; esta última ya había sido encontrada en el inciso a).

c) Para la relación R especificada se ve que:
Dominio de R= $(-\infty;\ +\infty)$, recorrido de R = $(-\infty;\ +\infty)$.

Sabemos que dos rectas en un plano, o bien se cortan en un punto, o son paralelas o están superpuestas. Supongamos que están dadas por las ecuaciones lineales:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \qquad y \qquad A_2x + B_2y + C_2 = 0,$$

con $B_1 \neq 0$ y $B_2 \neq 0$; las gráficas de estas ecuaciones se cortan, o son paralelas o coinciden. Podemos determinar cuál es el caso escribiendo las ecuaciones dadas en la forma común:

$$y = m_1x + b_1, \qquad y = m_2x + b_2$$

y haciendo las siguientes observaciones:

a) Si $m_1 \neq m_2$, las rectas se cortan.

b) Si $m_1 = m_2$ y $b_1 \neq b_2$, las rectas son paralelas por tener igual pendiente pero diferente ordenada en el origen.

c) Si $m_1 = m_2$ y $b_1 = b_2$ las rectas coinciden, por tener pendientes iguales y ordenadas en el origen también iguales.

EJEMPLO 5.

Determine en cada inciso si las gráficas de las diferentes pares de ecuaciones, se cortan; en caso afirmativo, determine las coordenadas de su punto de intersección.

a) $2x - y = -4$ $3x + y = 9$	b) $4x+3y = 12$ $8x+6y = 18$	c) $2x+3y = 6$ $4x+6y = 12$

SOLUCIÓN:

a) Escribiendo las ecuaciones dadas en la forma común, se obtiene:

$$y = 2x + 4$$
$$y = -3x + 9$$

En este caso $m_1 = 2$ y $m_2 = -3$, o sea que $m_1 \neq m_2$ y las líneas se cortan; las coordenadas del punto de intersección se obtienen resolviendo como simultáneas por cualquier método de eliminación las ecuaciones.

$$2x - y = -4$$
$$3x + y = 9$$

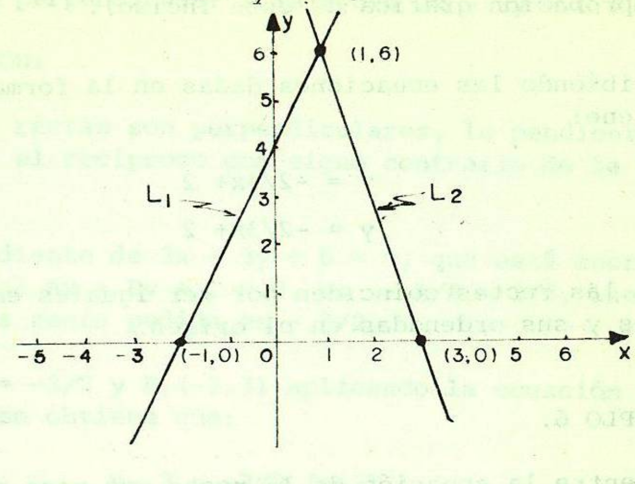

Fig. 20.

Por ejemplo, resolviendo por suma y resta, se tiene:

$$\begin{aligned} 2x - y &= -4 \\ 3x + y &= 9 \\ \hline 5x \quad &= 5 \end{aligned}$$

finalmente, $\qquad x = 1$

Sustituyendo este valor de "x" en cualquiera de las ecuaciones se encuentra que y=6. Entonces la solución es el par ordenado (1,6), del cual se puede observar que satisface ambas ecuaciones.

b) Escribiendo las ecuaciones dadas en la forma común, se obtiene:

$$y = -4/3x + 4$$
$$y = -4/3x + 3$$

En este caso $m_1 = -4/3$, $m_2 = -4/3$, $b_1 = 4$ y $b_2 = 3$; por consiguiente las rectas son paralelas. (Se deja al estudiante la comprobación gráfica de este inciso).

c) Escribiendo las ecuaciones dadas en la forma común, se obtiene:

$$y = -2/3x + 2$$

$$y = -2/3x + 2$$

Aquí las rectas coinciden por ser iguales entre sí sus pendientes y sus ordenadas en el origen.

EJEMPLO 6.

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (2,-3) y es paralela a la recta que une los puntos (4,1) y (-2,2).

SOLUCIÓN:

Las rectas paralelas tienen la misma pendiente. Entonces, la pendiente de la ecuación de la recta pedida es igual a la pendiente de la recta que pasa por (4,1) y (-2,2) o sea, la pendiente de la recta que une los puntos (4,1) y (-2,2) es

$$m = \frac{2-1}{-2-4} = -\frac{1}{6}$$

Por lo tanto, con $m = -1/6$ y $P_1(2,-3)$, aplicando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene:

$$y + 3 = -1/6(x-2)$$

simplificando, $\quad x + 6y + 16 = 0$

que es la ecuación de la recta pedida.

EJEMPLO 7.

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (-2,3) y es perpendicular a la recta $2x - 3y + 6 = 0$.

SOLUCIÓN:

Si las rectas son perpendiculares, la pendiente de una de ellas es el recíproco con signo contrario de la pendiente de la otra.

La pendiente de $2x - 3y + 6 = 0$, que está escrita en la forma general $Ax + By + C = 0$, es $-A/B = 2/3$, luego la pendiente de la recta pedida es $-3/2$.

Con $m = -3/2$ y $P_1(-2,3)$ aplicando la ecuación $y - y_1 = m(x - x_1)$, se obtiene que:

$$y - 3 = -3/2\,(x+2)$$

simplificando, $\quad 3x + 2y = 0$

que es la ecuación de la recta pedida.

AUTOEVALUACION 2.

En cada uno de los problemas del 1 al 10 construya la gráfica de la relación que se da.

1.- $\{(x,y) \mid y - 4 = 0\}$ 6.- $\{(x,y) \mid 2x-3y-6 = 0\}$

2.- $\{(x,y) \mid x + 3 = 0\}$ 7.- $\{(x,y) \mid 3x+2y+6 = 0\}$

3.- $\{(x,y) \mid y = 2x\}$ 8.- $\{(x,y) \mid 2x+y-5 = 0\}$

4.- $\{(x,y) \mid 2x+7 = 0\}$ 9.- $\{(x,y) \mid x-2y-5 = 0\}$

5.- $\{(x,y) \mid x/5 - y/4 = 1\}$ 10.- $\{(x,y) \mid x/3 + y/2 = 1\}$