En cada uno de los problemas del 11 al 30 encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto dado con la pendiente que se indica, o por los dos puntos dados.

11.- (-2, 1); m = 3	21.- (2,1); (-1,2)
12.- (0,0); m = 5	22.- (0,0); (-3,2)
13.- (-1, 2); m = 3/4	23.- (2,-3); (4,2)
14.- (3,-2); m = 2/3	24.- (-4,1); (3,-5)
15.- (-4,5); m = -2	25.- (7,0); (0,4)
16.- (0,2); m = 3	26.- (0,0); (5,-3)
17.- (0,-3); m = -2	27.- (5,-3); (5,2)
18.- (0,4); m = 1/3	28.- (-5,2); (3,2)
19.- (0,-1); m = 0	29.- (-1,3); (7,4)
20.- (0,3); m = -4/3	30.- (-3,4); (1,-2)

En cada uno de los problemas del 31 al 38 encuentre las coordenadas en el origen y la pendiente de cada recta.

31.- $3x+4y-12 = 0$	35.- $4x- y = 0$
32.- $3x-2y+6 = 0$	36.- $7x + 3y + 21 = 0$
33.- $2x - y -4 = 0$	37.- $5x + 2y + 10 = 0$
34.- $3x + y + 3 = 0$	38.- $x + 3y - 6 = 0$

En cada uno de los problemas del 39 al 44 determina si las gráficas de las ecuaciones dadas se cortan; en caso afirmativo, encuentre las coordenadas del punto de intersección.

39.- $x + 2y = 8$, $x - 3y = -7$	42.- $2x - y = -5$, $4x + 3y = -5$
40.- $6x - 3y = 2$, $2x - y = -1$	43.- $x + 5y = 16$, $3x - 2y = -3$
41.- $2x - 3y = 6$, $x + y = -2$	44.- $2x + y = 10$, $x - y = -1$

45.- Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto (1,2) y es paralela a la recta $3x - 2y + 6 = 0$

46.- Encuentra la ecuación de la recta de abscisa en el origen -3/7 y que es perpendicular a la recta $3x + 4y - 10= 0$.

47.- Encuentra la ecuación de la perpendicular a la recta $2x+ 7y - 3 = 0$ en su punto de intersección con $3x - 2y+8=0$.

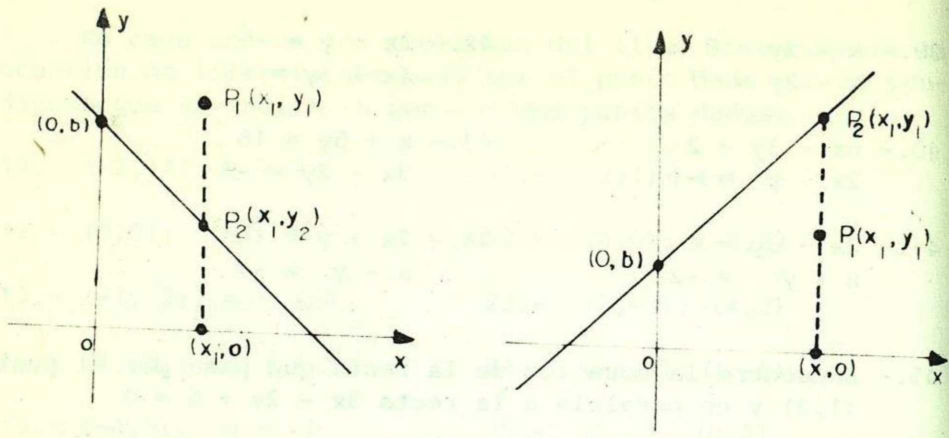
48.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por los puntos (-3,-5) y (4,7); y diga si el punto (1,1) pertenece a dicha recta.

49.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 1 = 0$ y $x+2y-4=0$ y que es perpendicular a $3x - y - 4 = 0$.

50.- Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de las rectas $x - 3y + 2 = 0$ y $5x+6y-4=0$ y que es paralela a $4x + y + 7 = 0$

2-10 DESIGUALDADES LINEALES EN DOS VARIABLES.

En la sección anterior se vió que toda recta no vertical es la gráfica de una ecuación de la forma $y= mx + b$, en la -- que "m" es la pendiente de la recta L y "b" su ordenada en el origen. Considere ahora dos puntos de igual abscisa P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_1, y_2), este último sobre la recta L; con ayuda de la fig. 21 (a) se ve que P_1 está arriba de L $\rightarrow y_1 > y_2$,



(a) (b)

Fig. 21.

o, como $y_2 = mx_1 + b$,

P_1 está arriba de L $\longleftrightarrow$ $y_1 > mx_1 + b$

Análogamente, de la fig. 21 (b) se ve que:

P_1 está debajo de L $\longleftrightarrow$ $y_1 < y_2$,

o sea;

P_1 está debajo de L $\longleftrightarrow$ $y_1 < mx_1 + b$

Ahora bien, como de la definición de gráfica de una ecuación P está sobre L $\longleftrightarrow$ $y = mx + b$, de donde ha quedado demostrado el siguiente teorema:

> "El punto $P_1(x_1, y_1)$ está arriba de la gráfica de $y=mx+b$, si,
>
> $$y_1 > mx_1 + b$$
>
> y está debajo de ella, si,
>
> $$y_1 < mx_1 + b."$$

Como consecuencia del teorema anterior, se ve que toda recta L no vertical, que es la gráfica de,

$$R_1 = \{(x,y) \mid y = mx + b\}$$

divide el plano coordenado en dos partes, que son las gráficas de las relaciones:

$R_2 = \{(x,y) \mid y > mx + b\}$ y $R_3 = \{(x,y) \mid y < mx + b\}$.

La gráfica de R_2 está formada por todos los puntos que quedan "arriba" de L y la de R_3 por el conjunto de puntos situados "debajo" de L; cada una de las gráficas de R_2 y R_3, se designa con el nombre de "semiplano".

Si L es una línea vertical que es la gráfica de $\{(x,y) \mid x = a\}$, entonces el semiplano de la " derecha " es la gráfica $\{(x,y) \mid x > a\}$ y el semiplano de la "izquierda" es la gráfica de $\{(x,y) \mid x < a\}$.

EJEMPLO 1.

Determina si cada uno de los puntos siguientes:

a) $P_1(-2,5)$

b) $P_1(6,-2)$

c) $P_1(7,0)$

está sobre, por arriba o por debajo de la recta $3x+7y-21=0$.

SOLUCIÓN;

Despejando la "y" de la ecuación dada se encuentra la forma común,

$$y = -3/7\ x + 3$$

de la cual podemos demostrar que:

a) El punto $P_1(-2,5)$ está por arriba de la recta dada, ya que cumple con la desigualdad $y_1 > mx_1 + b$, o sea,

$$5 > (-3/7)(-2) + 3$$

$$5 > 6/7 + 3$$

$$5 > 27/7.$$

b) El punto $P_1(6,-2)$ está por debajo de la recta dada, ya que hace que la desigualdad $y_1 < mx_1 + b$, sea verdad, o sea:

$$-2 < (-3/7)\ (6) + 3$$

$$-2 < -18/7 + 3$$

$$-2 < 3/7$$

c) El punto P_1 (7,0) está sobre la recta dada, ya que cumple con la ecuación $y_1 = mx_1 + b$, o sea:

$$0 = (-3/7)(7) + 3$$

$$0 = -3 + 3$$

$$0 = 0$$

EJEMPLO 2.

Construya la gráfica de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 3x + 2y > 6\}$$

y dé su dominio y su recorrido.

SOLUCIÓN:

De las propiedades de las desigualdades se ve que

$$3x + 2y > 6$$

es equivalente a:

$$y > -3/2\ x + 3$$

de modo que:

$$R = \{(x,y) \mid 3x + 2y > 6\} = \{(x,y) \mid y > -3/2\ x + 3\}$$

Del teorema antes visto se deduce que el punto $P_1(x_1,y_1)$ pertenece a la relación $R=\{(x,y) \mid y > -3/2\ x + 3\}$, si el punto $P_1(x_1,y_1)$ queda arriba de la gráfica $y = -3/2\ x + 3$; en consecuencia, la gráfica de R está formada por el conjunto de puntos del plano coordenado que están situados arriba de

la gráfica de la ecuación $y = -3/2\ x + 3$. Dicha gráfica es la parte sombreada de la fig. 22. El dominio R es $(-\infty;+\infty)$ y su recorrido es también $(-\infty;+\infty)$.

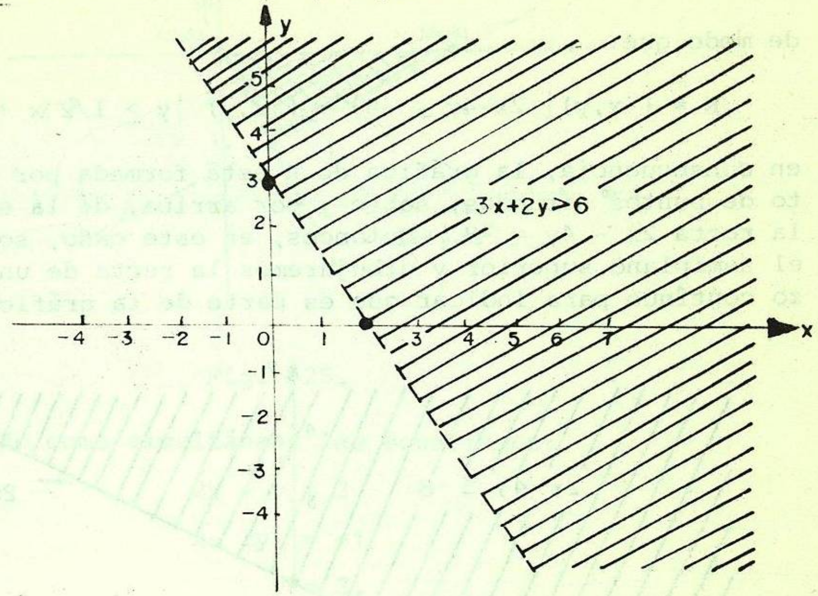


Fig. 22.

NOTA:

La gráfica de una desigualdad lineal es el semiplano sombreado que puede o no contener a la recta. Una "recta a trazos" no forma parte del semiplano; una "recta contínua" se incluye en el semiplano, véase fig. 23.

EJEMPLO 3.

Construya la gráfica de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 2x - 4y \leq -8\}$$

SOLUCIÓN:

De las propiedades de las desigualdades se ve que:

$$2x - 4y \leq -8$$

es equivalente a:

$$y \geq 1/2\ x + 2$$

de modo que:

$$R = \{(x,y) \mid 2x-4y \leq -8\} = \{(x,y) \mid y \geq 1/2\ x + 2\}$$

en consecuencia, la gráfica de R está formada por el conjunto de puntos situados, sobre y por arriba, de la ecuación de la recta $2x - 4y = -8$. Entonces, en este caso, sombrearemos el semiplano superior y dibujaremos la recta de un solo trazo contínuo para indicar que es parte de la gráfica (fig. 23).

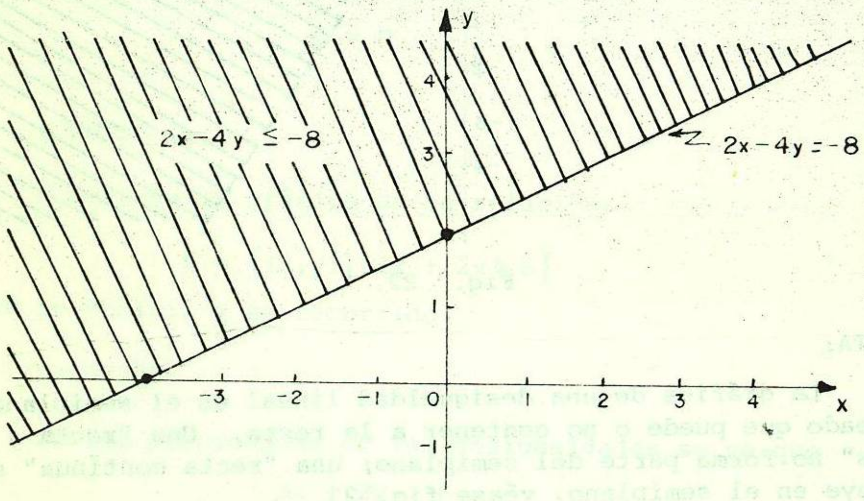


Fig. 23.

EJEMPLO 4.

Construya la gráfica de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 2x + y > 3 \quad y \quad x-2y < -1\}$$

y dé su dominio y su recorrido.

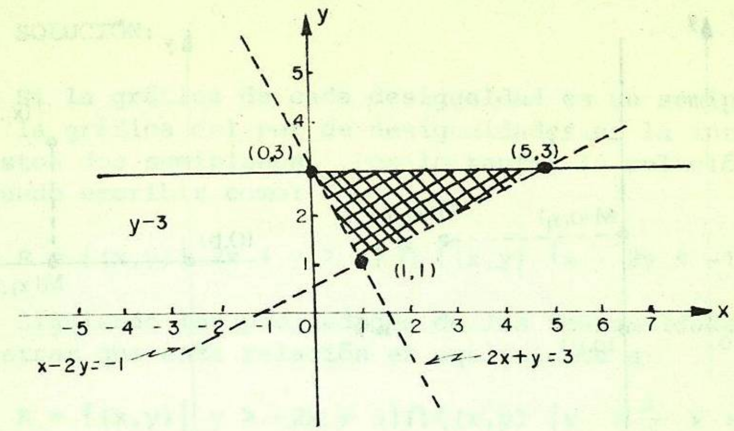


Fig. 25.

Tratando como simultáneas las ecuaciones:

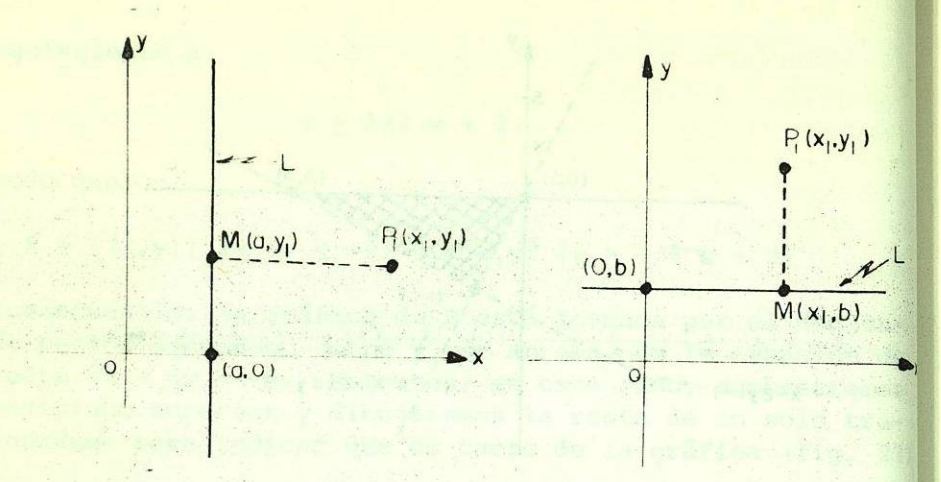
$$2x + y = 3$$
$$x - 2y = -1$$
$$y = 3,$$

se encuentra que los puntos de intersección de sus gráficas son (1,1), (0,3) y (5,3).

De los resultados anteriores se obtiene que: el dominio de R = (0;5); y el recorrido de R = (1;3).

2-11 DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA.

Una recta L puede ser vertical, horizontal (fig. 26), u oblicua respecto a los ejes coordenados. Sea "d" la distancia PM del punto $P(x_1,y_1)$ a la recta L, siendo M el punto de intersección de L con la perpendicular a ella que pasa por P. Si L, es vertical, es la gráfica de $\{(x,y) \mid x=a\}$, entonces, como se puede ver en la fig. 26 (a): $d = |x_1 - a|$.



(a) (b)

Fig. 26.

Si L, es horizontal, es la gráfica de $\{(x,y) | y = b\}$, en tonces:

$$d = |y_1 - b|$$

como se puede ver en la figura 26 (b).

Si L no es paralela a ningún eje coordenado, para hallar la distancia "d" del punto $P(x_1, y_1)$ a dicha recta, se aplica el siguiente teorema, cuya demostración se pide en el problema 22 de la autoevaluación de esta sección:

> "La distancia d del punto $P_1(x_1, y_1)$ a la recta no vertical L, de ecuación $Ax + By + C = 0$, está dada por:
>
> $$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$
>
> que es la fórmula que da la distancia de un punto a una recta".

SOLUCIÓN:

Si la gráfica de cada desigualdad es un semiplano, entonces, la gráfica del par de desigualdades es la intersección de estos dos semiplanos. Por lo tanto, la relación anterior se puede escribir como:

$$R = \{(x,y) \mid 2x + y > 3\} \cap \{(x,y) \mid x - 2y < -1\}$$

Siguiendo las propiedades de las desigualdades se puede demostrar que esta relación es equivalente a:

$$R = \{(x,y) \mid y > -2x + 3\} \cap \{(x,y) \mid y > \frac{1}{2} x + 1/2\}$$

Dibujaremos primero las dos rectas. encontramos que la gráfica de $y > -2x + 3$ determina el semiplano de la derecha de la ecuación $2x + y = 3$ y que la gráfica de $y > 1/2\ x + 1/2$ determina el semiplano de la izquierda de la ecuación $x-2y=-1$. La región común a las dos se sombrea como en la fig. 24.

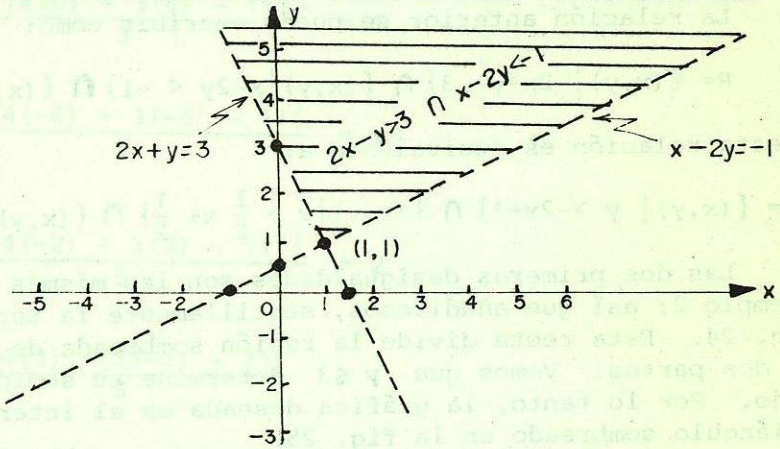


Fig. 24.

Tratando como simultáneas las ecuaciones:

$$2x + y = 3$$

$$x - 2y = -1$$

se encuentra que el punto de intersección de sus gráficas es

(1,1).

De los resultados que se acaban de obtener se ve que el dominio de $R = (-\infty; +\infty)$; el recorrido de $R = (1; +\infty)$.

Este ejemplo es típico para dos desigualdades. Pero podemos considerar tres o más desigualdades simultáneas. Las ideas y el procedimiento son los mismos.

EJEMPLO 5.

Construya la gráfica de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 2x + y > 3 \ \text{ y } \ x - 2y < -1 \ \text{ y } \ y \leq 3\}$$

y dé su dominio y su recorrido.

SOLUCIÓN:

La relación anterior se puede escribir como:

$$R = \{(x,y) \mid 2x+y > 3\} \cap \{(x,y) \mid x-2y < -1\} \cap \{(x,y) \mid y \leq 3\}$$

y esta relación es equivalente a:

$$R = \{(x,y) \mid y > -2x+3\} \cap \{(x,y) \mid y > \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\} \cap \{(x,y) \mid y \leq 3\}$$

Las dos primeras desigualdades son las mismas que en el ejemplo 2; así que añadiremos, sencillamente la tercera a la fig. 24. Esta recta divide la región sombreada de la fig.24 en dos partes. Vemos que $y \leq 3$ determina su semiplano más bajo. Por lo tanto, la gráfica deseada es el interior del triángulo sombreado en la fig. 25.

EJEMPLO .

Encuentra la distancia de los siguientes puntos a la recta de ecuación: $4x + 3y - 11 = 0$:

a) $P(6,4)$ b) $P(-6,-5)$
c) $P(-2,3)$ d) $P(3,-2)$

SOLUCIÓN:

Por el teorema anterior, la distancia "d" del punto $P(x_1, y_1)$ a la recta del enunciado, está dada por:

$$d = \frac{|4x_1 + 3y_1 - 11|}{5}$$

aplicando la ecuación anterior se obtienen los siguientes resultados:

a) $d = \dfrac{|4(6) + 3(4) - 11|}{5} = 5$

b) $d = \dfrac{|4(-6) + 3(-5) - 11|}{5} = 10$

c) $d = \dfrac{|4(-2) + 3(3) - 11|}{5} = 2$

d) $d = \dfrac{|4(3) + 3(-2) - 11|}{5} = 1$

AUTOEVALUACIÓN 3.

En cada uno de los problemas del 1 al 4, determina si cada uno de los puntos dados está sobre, por arriba o por debajo de la recta correspondiente.

1.- $2x + 3y - 6 = 0$; $(4,1)$, $(-1,1)$, $(2,3)$

2.- $3x + 4y + 8 = 0$; $(0,0)$, $(-5,-1)$, $(2,3)$

3.- $5x - 12y - 26 = 0$; $(-5,1)$, $(0,-13/6)$, $(10,0)$

4.- $3x - 2y + 6 = 0$; $(2,2)$, $(2,6)$, $(-2,5)$

Construya la gráfica de cada una de las siguiente relaciones y dé el dominio y el recorrido de cada una de ellas.

5.- $R = \{(x,y) \mid 2x + 5y > 10\}$

6.- $R = \{(x,y) \mid x + y \leq -1\}$

7.- $R = \{(x,y) \mid 3x - 4y > -12\}$

8.- $R = \{(x,y) \mid 2x - 7y \leq 14\}$

9.- $R = \{(x,y) \mid x + 2y \leq 4\}$

10.- $R = \{(x,y) \mid 4x + 3y > 12 \text{ y } 4x - 5y > -20\}$

11.- $R = \{(x,y) \mid 4x + 3y > 12 \text{ y } 4x-5y > -20 \text{ y } 4x-y \leq 12\}$

12.- $R = \{(x.y) \mid 4x + 3y > 12 \text{ y } 4x-5y > -20 \text{ y } 4x-y > 12\}$

En cada uno de los problemas del 13 al 18 encuentra la distancia del punto dado a la recta correspondiente.

13.- $x + 4 = 0$; $(3,2)$

14.- $2y + 7 = 0$; $(2,-3)$

15.- $3x + 4y + 5 = 0$; $(-2,4)$

16.- $4x + 3y - 8 = 0$; $(1,-2)$

17.- $6x - 8y - 3 = 0$; $(0,-5)$

18.- $5x + 12y - 5 = 0$; $(2,5)$

19.- Encuentra la distancia del punto de intersección de las gráficas de las ecuaciones $x - 2y + 1 = 0$ y $x-y-1= 0$ a la gráfica de $5x + 12y - 13 = 0$.

20.- Encuentra la distancia entre el par de rectas paralelas cuyas ecuaciones son: $x+2y-5=0$ y $x+2y+10=0$.

21.- Encuentra la longitud del radio de una circunferencia de centro $(-1,4)$ y que es tangente a la gráfica de $3x+4y-24=0$.

22.- Demuestre el siguiente teorema:

"La distancia "d" del punto $P(x_1,y_2)$ a la recta no vertical L, de ecuación $Ax+ By + C = 0$, está dada por:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Sugestión: Si L es una recta no vertical de ecuación $y= mx+b$, encuentra las coordenadas del punto M de intersección de L con la perpendicular a ella que pasa por P; después usa la fórmula de la distancia entre dos puntos para establecer que:

$$d^2 = \frac{(y_1 - mx_1 - b)^2}{m^2 + 1}$$

y a partir de este resultado hacer ver que, si la ecuación de L es $Ax + By + C = 0$, entonces:

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCIÓN 2.

AUTOEVALUACIÓN 2.

11.- $3x - y + 7 = 0$

12.- $5x-y = 0$

13.- $3x-4y+11 = 0$

14.- $2x-3y-12 = 0$

15.- $2x+y+3 = 0$

16.- $3x-y+2=0$

17.- $2x+y+3 = 0$

18.- $x-3y+12 = 0$

19.- $y + 1 = 0$

20.- $4x+3y-9 = 0$

21.- $x+3y-5 = 0$

22.- $2x+3y= 0$

23.- $5x-2y-16 = 0$

24.- $6x+7y+17 = 0$

25.- $4x +7y-28 = 0$

26.- $3x+5y = 0$

27.- $x - 5 = 0$

28.- $y - 2 = 0$

29.- $x - 8y + 25 = 0$

30.- $3x + 2y + 1 = 0$

31.- (4,0), (0,3), $m= -3/4$

32.- (-2,0), (0,3), $m= 3/2$

33.- (2,0), (0,-4), $m= 2$

34.- (-1,0), (0,-3), $m= -3$

35.- (0,0), $m= 4$

36.- (-3,0), (0,-7), $m= -7/3$

37.- (-2,0), (0,-5), $m= -5/2$

38.- (6,0), (0,2), $m= - 1/3$

39.- (2,3)

40.- Son paralelas.

41.- (0,-2)

42.- (2,1)

43.- (1,3)

44.- (3,4)

45.- $3x-2y + 1 = 0$

46.- $28x-21y + 12 = 0$

47.- $7x - 2y + 16 = 0$

48.- $12x - 7y + 1 = 0$; No.

49.- $x + 3y - 5 = 0$

50.- $12x + 3y - 2 = 0$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Arriba de la recta, debajo de ella, arriba de ella.

2.- Arriba de la recta, debajo de ella,arriba de ella.

3.- Arriba de la recta, sobre ella, debajo de ella.

4.- Debajo de la recta. sobre ella, debajo de ella.

5.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty ; +\infty)$

6.- Dominio = $(-\infty ; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty ; +\infty)$

7.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty; +\infty)$

8.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty; +\infty)$

9.- Dominio = $(-\infty; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty ; +\infty)$

10.- Dominio = $(0 ; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty ; +\infty)$

11.- Dominio = $(0; 5]$; Recorrido = $(0; 8]$

12.- Dominio = $(3; +\infty)$; Recorrido = $(-\infty; +\infty)$

13.- $d = 7$

14.- $d = 1/2$

15.- $d = 3$

16.- $d = 2$

17.- $d = 37/10$

18.- $d = 5$

19.- $d = 2$

20.- $d = 3\sqrt{5}$

21.- $r = 11/5$