LA CIRCUNFERENCIA.

En esta unidad veremos el estudio de una fomra de sección cónica llamada LA CIRCUNFERENCIA. Una circunferencia, analíticamente, es una ecuación de segundo grado con dos variables y queda completamente determinada si se conocen su centro y su radio.

En esta unidad aprenderás a comprender por qué a la circunferencia se le llama cónica y estarás en condición de representar e interpretar la ecuación de la circunferencia y a valorar la importancia de sus aplicaciones.

Aprende a excelencia la unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente el significado de circunferencia.

2.- Demostrar la ecuación de la circunferencia en sus dos formas conocidas.

3.- Determinar correctamente la ecuación de la circunferencia, dados cualquiera de las condiciones siguientes:

a) El centro y el radio.
b) El centro y un punto que pertenezca a ella.
c) Las coordenadas del diámetro.

4.- Determinar correctamente la ecuación de la circunferencia, dadas 3 coordenadas de ella, dando su lugar geométrico.

5.- Expresar el lugar geométrico de cualquier ecuación que pertenezca a la forma general de una circunferencia.

6.- Construir correctamente la gráfica de una relación, definida por cualquiera de las expresiones siguientes:

$$S_1 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2\}$$
$$S_2 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 < r^2\}$$
$$S_3 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 \leq r^2\}$$
$$S_4 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 > r^2\}$$
$$S_5 = \{(x,y) \mid (x-h)^2 + (y-k)^2 \geq r^2\}$$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo III de tu libro "Geometría Analítica". A manera de recomendación, te sugerimos, conforme vayas avanzando en el estudio de la unidad, anotes todas las cuestiones que creas importantes y, sobre todo, las fórmulas que se expongan dentro de la unidad.

Para el objetivo 2, es necesario que comprendas el significado de circunferencia, para que luego apliques la fórmula de la distancia entre dos puntos para demostrar la ecuación de la misma.

Para el objetivo 3, basta con conocer dos condiciones para determinar su ecuación. Para ello, analiza primero los ejemplos que vienen en tu libro y luego, en base a ellos trates de resolver la autoevaluación 1. Igualmente para el objetivo 4, te sugerimos analices los ejemplos, puesto que, en este objetivo se necesita del dominio de cómo resolver un sistema de ecuaciones lineales en 3 incógnitas. Así mismo, en caso de no recordar cómo se resuelve un sistema como estos, estudia la regla de Cramer, que viene en el libro del 2do. Semestre, o bien el método algebraico de sustitución.

Para el objetivo 5, resuelve la autoevaluación 2. Para ello, es indispensable que domines bien el método de completar el cuadrado (visto en el 3er.semestre), ya que lo usaremos para este objetivo. Las 3 condiciones a que da lugar la representación del lugar geométrico de la ecuación en forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

pueden ser:

a) *La ecuación de una circunferencia.* Su lugar geométrico queda descrito por las coordenadas del centro y su radio.

b) *Un solo punto.* Su lugar geométrico queda descrito por las coordenadas de dicho punto.

c) *Conjunto vacío.* No hay lugar geométrico posible para esa ecuación.

Para el objetivo 6, estudia los ejemplos que se incluyen en tu texto y luego procede a resolver la autoevaluación 3.

2.- Una vez que hayas resuelto todos tus objetivos, aplica tus conocimientos resolviendo la autoevaluación del capítulo, estudiando de nuevo aquellos problemas que hayas resuelto mal.

Para el objetivo 5, resuelve la autoevaluación 2. Para ello, es indispensable que domines bien el método de completar el cuadrado (visto en el 3er semestre), ya que lo usaremos para este objetivo. Las 3 condiciones a que da lugar la representación del lugar geométrico de la ecuación en forma general:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

pueden ser:

a) La ecuación de una circunferencia. Su lugar geométrico queda descrito por las coordenadas del centro y su radio.

b) Un solo punto. Su lugar geométrico queda descrito por las coordenadas de dicho punto.

c) Conjunto vacío. No hay lugar geométrico posible para esa ecuación.

Para el objetivo 6, estudia los ejemplos que se incluyen en tu texto, y luego procede a resolver la autoevaluación 3.

Una vez que hayas resuelto todos tus objetivos, aplica tus conocimientos resolviendo la autoevaluación del capítulo, estudiando de nuevo aquellos problemas que hayas resuelto mal.

CAPITULO 3.

LA CIRCUNFERENCIA.

3-1 INTRODUCCIÓN.

Una manera de generalizar la ecuación que representa la línea recta $Ax + by + c = 0$, es añadir a la misma todos los términos cuadráticos posibles (términos de segundo grado en "x" e "y"). Obtenemos así la ecuación generalizada:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$$

Como se ve, es una ecuación general de 2o. grado en cada una de las variables (siempre que A, B y C no sean nulos).

Vamos a considerar algunos casos especiales de esta ecuación, ya que el caso general es bastante complicado; al conjunto total de puntos cuyas coordenadas (x,y) satisfacen la ecuación anterior se le denomina "sección cónica". Esta denominación proviene de que puede obtenerse mediante la intersección de un plano con un cono de revolución de dos mantos:

Si el plano es perpendicular al eje del cono, (o sea, paralelo a la base), la intersección es una circunferencia (fig. 1) o un punto, según que corte a un manto o pase por el vértice.

Si el plano es paralelo a una generatriz del cono y corta a todas las demás, la intersección es una parábola (fig.2).

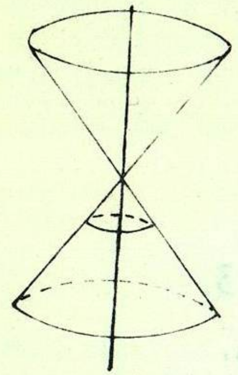

Fig. 1.

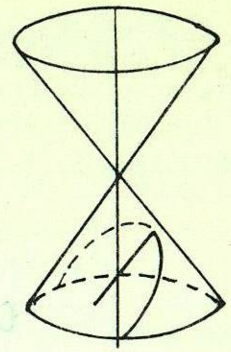

Fig. 2

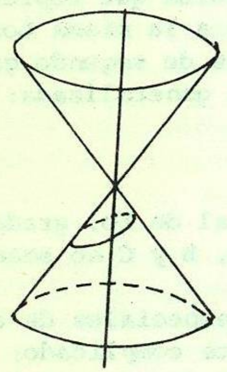

Fig. 3.

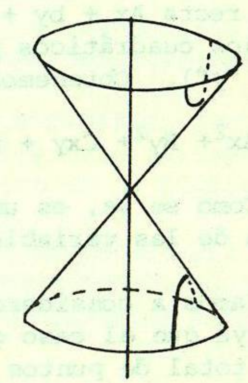

Fig. 4.

Si el plano no es perpendicular al eje, pero corta a toda generatriz, la intersección es una elipse (fig. 3).

Si el plano corta los dos mantos del cono y no pasa por el vértice, la intersección es una hipérbola (fig. 4).

No vamos a demostrar los postulados anteriores porque sería necesario utilizar Geometría en el Espacio, pero en la forma descrita fue como los antiguos griegos obtuvieron la --

circunferencia, la parábola, la elipse y la hipérbola; muchas de las propiedades de estas curvas fueron establecidas por ellos con métodos de la Geometría en el Espacio.

Consideraremos que en las ecuaciones de las secciones cónicas no existirá término en "xy"; debido a que en el estudio que haremos de la parábola, la elipse y la hipérbola, los ejes de las mismas coincidirán con, o serán paralelas a los ejes coordenados.

Nuestro estudio de las secciones cónicas en este capítulo y en los posteriores, está condensado en el siguiente teorema:

"Si la gráfica de $Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$ consiste cuando menos en un punto, entonces es, bien una sección cónica o dos rectas paralelas.

a) Si $A = B = 0$, la gráfica es una recta.

b) Si $A = B \neq 0$, la gráfica es una circunferencia, un punto o una circunferencia imaginaria.

c) Si alguno de los coeficientes A y B es cero, la gráfica es una parábola, dos rectas paralelas, una sola recta o una parábola imaginaria.

d) Si $A \cdot B > 0$, la gráfica es una elipse, un punto, o una elipse imaginaria.

e) Si $A \cdot C < 0$, la gráfica es una hipérbola o un par de rectas que se cortan.

3-2 LA CIRCUNFERENCIA.

La circunferencia es el conjunto de puntos de un plano que equidistan de un punto fijo en el plano llamado "centro"; la distancia de éste a cualquier punto de la circunferencia se llama "radio".

Una circunferencia, analíticamente, es una ecuación de segundo grado con dos variables y queda completamente deter nada si se conocen su centro y su radio.

Consideremos que el punto fijo C(h,k) sea el centro de una circunferencia de radio "r", en que "r" representa un n mero real positivo y al punto P (x, y) que estará a "r" uni des de C.

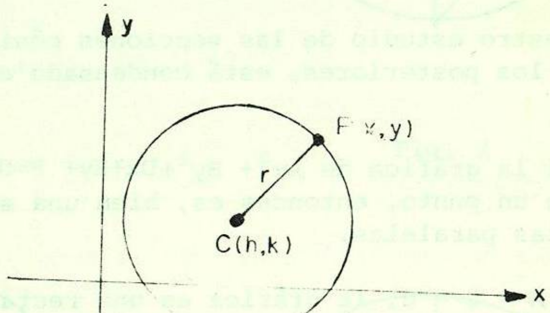

Fig. 5.

El punto P(x,y) pertenecerá a la circunferencia si su distancia a C(h,k) es igual a "r"; en otras palabras, la cir cunferencia de centro C(h,k) y radio "r" es la gráfica de la ecuación:

$$|PC| = r$$

o sea, por la fórmula de distancia entre dos puntos del capí tulo anterior, se encuentra que:

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

o también, elevando los dos miembros al cuadrado, obtenemos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

lo que demuestra el siguiente teorema:

"La circunferencia de centro C(h,k) y radio "r" es la gráfica de la ecuación:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

que recibe el nombre de "forma reducida" de la ecuación de la circunferencia. Si el centro C está en el origen, entonces h= 0 y k=0 y la ecuación anterior se escribe:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

EJEMPLO 1.

Encontrar la ecuación de una circunferencia que satisfa- ga con las condiciones dadas:

a) Con centro en C(2,3) y radio 4.
b) Con centro en C(-1,5) y radio 2.
c) Con centro en C(0,0) y radio $\sqrt{3}$.
d) Con centro en C(0,4) y radio 1.
e) Con centro en C(3,-2) y que pase por el punto A(6,2).

SOLUCIÓN:

a) Como la ecuación de una circunferencia en la forma redu- cida es $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$; cuyo centro es el punto - - C(h,k) y su radio es de "r" unidades; vamos a sustituir en esta ecuación los valores conocidos, que son h=2, k=3 y r=4 y se obtiene:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

que es la ecuación buscada.

b) Sustituyendo los valores conocidos de h= -1, k=5 y r=2 en la ecuación en la forma reducida, nos queda:

$$(x+1)^2 + (y-5)^2 = 4$$

c) Igualmente, sustituyendo $h = 0$, $k= 0$, y $r = \sqrt{3}$ en la misma ecuación, se tiene:

$$x^2 + y^2 = 3$$

d) Asimismo, ahora, $h= 0$, $k = 4$ y $r = 1$, tenemos:

$$x^2 + (y-4)^2 = 1$$

e) Como el radio "r" es la distancia entre $C(3,-2)$ y cualquier otro punto de la circunferencia dada, usaremos la fórmula de distancia entre dos puntos para encontrar r;

$$r = |CA|$$
$$= \sqrt{(6-3)^2 + (2+2)^2}$$
$$= \sqrt{9 + 16}$$
$$= 5$$

Luego, sustituyendo los valores de $h=3$, $k= -2$ y $r =5$ en la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ se tiene:

$$(x-3)^2 + (y+2)^2 = 25$$

que es la ecuación buscada.

Desarrollando la ecuación $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, (elevando al cuadrado los binomios "x-h" y "y-k"), se obtiene:

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

reordenado, llegamos a:

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + h^2 + k^2 - r^2 = 0$$

Este es un caso particular de la ecuación:

$$Ax^2 + By^2 + Dx + Ey + F = 0$$

donde $A= B \neq 0$, (lo cual constituye una condición necesaria para que la ecuación de la sección 3-1 sea una circunferencia), en que $A = B = 1$, $D= -2h$, $E= -2k$ y $F= h^2 + k^2 - r^2$.

Queda así demostrado el siguiente teorema:

"Cualquier circunferencia es la gráfica de una ecuación de la forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

llamada "forma general" de la ecuación de la circunferencia.

EJEMPLO 2.

Encuentra la ecuación de una circunferencia en forma reducida y forma general que tiene los puntos $A(-3,2)$ y $B(5,2)$ como extremos de un diámetro. Construya la gráfica correspondiente y dé su dominio y su recorrido.

SOLUCIÓN:

Designando por $C(h,k)$ el centro de la circunferencia cuya ecuación se busca y por "r" su radio; y como el centro $C(h,k)$ es el punto medio del segmento que une $(-3,2)$ con $(5,2)$ usando la fórmula de las coordenadas del punto medio, se obtiene:

$$h = \frac{-3+5}{2} = 1 \qquad y \qquad k = \frac{2+2}{2} = 2$$

y como "r" es la distancia entre $C(1,2)$ y cualquiera de los extremos del diámetro dado, usando la fórmula de distancia entre dos puntos para encontrar r:

$$r = |CB|$$
$$= \sqrt{(5-1)^2 + (2-2)^2}$$
$$= \sqrt{16 + 0}$$
$$= 4$$