Sustituyendo los valores h=1, k=2 y r=4 en la ecuación reducida $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, se obtiene:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

que es la ecuación buscada.

Para construir la gráfica de la circunferencia de este ejemplo, trace el centro (1,2) y luego, con una abertura de compás de r = 4 y haciendo centro en C, trace la circunferencia deseada. La gráfica se muestra en la fig. 6.

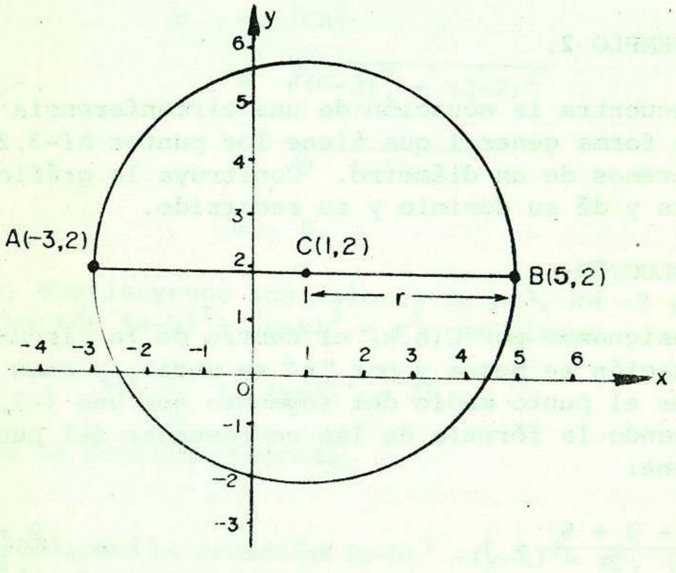

Fig. 6.

Siendo su dominio y su recorrido:

Dominio = $[-3; 5]$

Recorrido = $[-2; 6]$

Y para representar la ecuación de esta circunferencia en la forma general, basta desarrollarla de la siguiente manera:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = 16$$

pasando todos los términos al miembro izquierdo de la ecuación, simplificando y reordenando los términos para darle forma como el de la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, se obtiene:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

que es la misma ecuación buscada, pero en forma general.

O también, para obtener la ecuación de una circunferencia en la forma general a partir de la forma reducida, se puede proceder como sigue: la ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ es la ecuación en la forma general de una circunferencia, en donde, $D = -2h$, $E = -2k$ y $F = h^2 + k^2 - r^2$. Entonces, sustituyendo los valores conocidos de h, k y r se obtiene que D= -2, E= -4 y F= -11; y sustituyendo, ahora, D, E y F por sus respectivos valores en la ecuación en la forma general, obtenemos la misma ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 11 = 0$$

Si una gráfica G contiene un punto P sobre el eje X, la abscisa de P es una abscisa en el origen de G; es decir, un número "a" es una abscisa en el origen de una gráfica G si $P(a,0) \in G$. Análogamente, una ordenada en el origen de una gráfica G es un número "b" tal que $P(0,b) \in G$. Como y=0 es la ecuación del eje X, las abscisas en el origen de una gráfica pueden obtenerse haciendo y=0 en la ecuación de la gráfica y resolviendo respecto a "x" la ecuación resultante. Análogamente, las ordenadas en el origen de una gráfica pueden obtenerse haciendo x=0 en la ecuación de la gráfica y resolviendo con respecto a "y" la ecuación resultante. Una gráfica dada puede tener varias abscisas en el origen (o una, o ninguna) y también varias ordenadas en el origen, o una, o ninguna.

Por ejemplo, la circunferencia con centro en el origen y radio 5, de ecuación $x^2 + y^2 = 25$, tiene dos abscisas en el origen que son 5 y -5 y dos ordenadas en el origen, que también valen 5 y -5 (ver fig. 7).

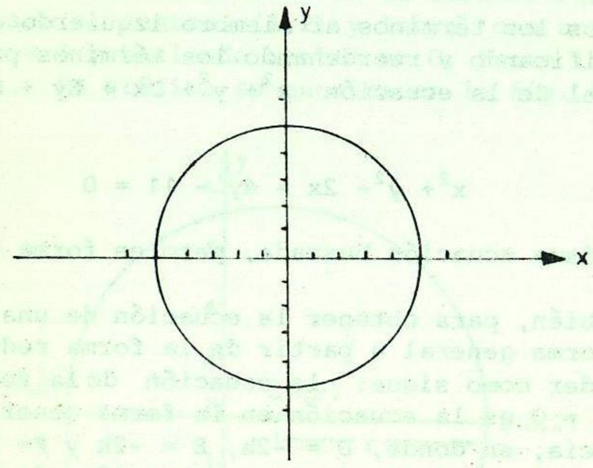

Fig. 7.

Para hallar las abscisas en el origen de la circunferencia del ejemplo 2 haremos y=0 en la ecuación $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 16$, para obtener:

$$(x-1)^2 + 4 = 16$$

por lo tanto, $x-1 = \pm\sqrt{12}$

o sea que las abscisas en el origen de esta circunferencia son $1 + \sqrt{12}$ y $1 - \sqrt{12}$. Para encontrar sus ordenadas en el origen haremos ahora, x=0 en la misma ecuación; resultando:

$$1 + (y-2)^2 = 16$$

por lo tanto, $y-2 = \pm\sqrt{15}$

o sea que las ordenadas en el origen de esta circunferencia son $2 + \sqrt{15}$ y $2 - \sqrt{15}$.

EJEMPLO 3.

Encuentra la ecuación en forma general de una circunferencia que pasa por los puntos A(2,3), B(-2,-1) y C(-6,3); determina su centro y su radio; y dé asimismo las coordenadas en el origen de la gráfica correspondiente.

SOLUCIÓN:

Dado que todos los puntos que pertenecen a la curva satisfacen su ecuación, sustituiremos los tres puntos dados en la ecuación:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

para formar un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas (D, E y F) y después resolver.

(Consideraremos que el alumno está capacitado en la resolución de un sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas).

Procediendo así, tenemos: Para el punto A(2, 3):

$$(+2)^2 + (+3)^2 + D(+2) + E(+3) + F = 0$$

o sea,

$$4 + 9 + 2D + 3E + F = 0$$

o bien,

$$2D + 3E + F = -13$$

Para el punto B(-2,-1)

$$(-2)^2 + (-1)^2 + D(-2) + E(-1) + F = 0$$

o sea,

$$4 + 1 - 2D - E + F = 0$$

o bien,

$$-2D - E + F = -5$$

Para el punto C(-6,3):

$$(-6)^2 + (3)^2 + D(-6) + E(3) + F = 0$$

o sea,

$$36 + 9 - 6D + 3E + F = 0$$

o bien,

$$-6D + 3E + F = -45$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones con tres incógnitas:

$$2D + 3E + F = -13$$

$$-2D - E + F = -5$$

$$-6D + 3E + F = -45$$

Resolviendo algebráicamente este sistema de ecuaciones tenemos que: D= 4, E= -6 y F = -3,

Sustituyendo los valores de D, E y F en la ecuación en la forma general de la circunferencia, se obtiene:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$x^2 + y^2 + (4)x + (-6)y + (-3) = 0$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0$$

que es la ecuación de la circunferencia buscada

Para localizar las coordenadas del centro y la longitud del radio de esta circunferencia, se procederá así: si D=-2h, E= -2k y F= $h^2 + k^2 - r^2$; entonces h= -D/2, k= -E/2 y $r^2 = h^2 + k^2 - F$; o sea:

$h = -4/2$	$k = -(-6)/2$	$r^2 = (-2)^2 + (3)^2 - (-3)$
$h = -2$	$k = 3$	$r^2 = 4 + 9 + 3 = 16$
		$r = 4$

por lo tanto, el lugar geométrico que representa la ecuación de la circunferencia, queda determinado por C(-2,3) y r= 4. Entonces la ecuación en la forma reducida de la circunferencia es:

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 16$$

Para encontrar las abscisas en el origen, le damos a la "y" el valor de cero en la ecuación anterior y tenemos que: si y = 0:

$$(x + 2)^2 + (-3)^2 = 16$$

$$(x + 2)^2 + 9 = 16$$

$$(x + 2)^2 = 7$$

$$x + 2 = \pm\sqrt{7}$$

$$x = -2 \pm \sqrt{7}$$

luego de donde, las abscisas en el origen son:

$-2 + \sqrt{7}$ y $-2 - \sqrt{7}$

Para encontrar las ordenadas en el origen, le damos a la "x" el valor de cero en la misma ecuación y tenemos que: si x = 0:

$$(2)^2 + (y-3)^2 = 16$$

$$4 + (y-3)^2 = 16$$

$$(y-3)^2 = 12$$

$$y-3 = \pm\sqrt{12}$$

$$y = 3 \pm\sqrt{12}$$

en donde, las ordenadas en el origen son:

$3 + \sqrt{12}$ y $3 - \sqrt{12}$

Surge ahora la siguiente pregunta: ¿La gráfica de una ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, es siempre una circunferencia?

Para resolver esta pregunta, debemos de convertir la ecuación de la forma general de la circunferencia a la forma reducida.

Para lograr la reducción de la ecuación utilizaremos el método de completar al cuadrado, de la siguiente forma:

Primeramente pasaremos al miembro derecho de la ecuación, el término constante F:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ev = -F$$

después, reordenaremos los términos de tal manera que agrupemos las variables en "x" e "y":

$$(x^2 + Dx) + (y^2 + Ey) = -F$$

sumamos a ambos miembros de la ecuación una misma cantidad tal que, podamos formar trinomios cuadrados perfectos. Para ello, las cantidades buscadas son los cuadrados de la mitad de los coeficientes en "x" e "y", (o sea, completar los cuadrados en las variables "x" e "y") resulta:

$$\left[x^2 + Dx + (D/2)^2\right] + \left[y^2 + Ey + (E/2)^2\right] = (D/2)^2 + (E/2)^2 - F$$

factorizando el lado izquierdo de la ecuación, expresándolo como la suma de dos binomios al cuadrado y efectuando las operaciones indicadas en el miembro derecho de dicha ecuación, tenemos:

$$(x + D/2)^2 + (y + E/2)^2 = D^2/4 + E^2/4 - F$$

o sea,

$$(x + D/2)^2 + (y + E/2)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4}$$

Si en esta ecuación la expresión $1/4(D^2 + E^2 - 4F) > 0$ (o sea, es positiva), entonces la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, es de la forma $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$, y su gráfica es una circunferencia que tiene por radio un número real positivo "r" en que:

$$r^2 = 1/4\,(D^2 + E^2 - 4F)$$

Ahora, si la expresión $1/4\,(D^2 + E^2 - 4F) = 0$, entonces la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, tiene por gráfica un punto solamente, cuyas coordenadas son $(-D/2, -E/2)$.

Y si la expresión $1/4\,(D^2 + E^2 - 4F) < 0$, (o sea, es negativa), entonces la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, no tiene gráfica dentro del conjunto de elementos de todos los pares ordenados posibles de números reales, por lo tanto, se dice que su gráfica es una "circunferencia imaginaria" (o el conjunto vacío).

Queda así demostrado el siguiente teorema:

"Para determinar la gráfica de la ecuación

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

escriba la ecuación en la forma reducida equivalente

$$(x + D/2)^2 + (y + E/2)^2 = t$$

en que $t = 1/4\,(D^2 + E^2 - 4F)$. Entonces:

a) Si $t > 0$, la gráfica es una circunferencia de centro $(-D/2, -E/2)$ y radio $\sqrt{t}$.

b) Si $t = 0$, la gráfica es un solo punto $(-D/2, -E/2)$.

c) Si $t < 0$, la gráfica es una circunferencia imaginaria (o conjunto vacío)."

EJEMPLO 4.

Determina si la gráfica de cada una de las siguientes ecuaciones es una circunferencia, un punto o una circunferencia imaginaria: si la gráfica es una circunferencia, dé el centro y el radio.

a) $x^2+y^2-10x+8y+5=0$

b) $x^2+y^2+6x-2y+10=0$

c) $x^2+y^2+8x-10y+50=0$

SOLUCIÓN:

a) (Para la solución de este ejemplo, consideraremos que el alumno está capacitado en el método de completar al cuadrado visto en 2o. semestre)

Para poder transformar la ecuación $x^2+y^2-10x+8y+5=0$ a la forma reducida, ahora, usaremos el método de completar al cuadrado, de acuerdo con los siguientes pasos:

Primer paso, pasamos al miembro derecho de la ecuación, el término constante (F),

$$x^2+y^2-10x+8y=-5$$

Segundo paso, reordenamos los términos de tal manera que podemos agrupar las variables en "x" e "y";

$$(x^2-10x)+(y^2+8y)=-5$$

Tercer paso, sumamos a ambos miembros de la ecuación una misma cantidad, tal que, podamos formar trinomios cuadrados perfectos. Para ello las cantidades buscadas, son los cuadrados de la mitad de los coeficientes de "x" e "y" (o sea, completar al cuadrado en el lado izquierdo).

$$\left[x^2-10x+(10/2)^2\right]+\left[y^2+8y+(8/2)^2\right]=-5+(10/2)^2+(8/2)^2$$

Cuarto paso, factorizamos y expresamos el lado izquierdo como la suma de dos binomios al cuadrado y efectuamos las operaciones indicadas en el lado derecho de dicha ecuación:

$$(x-5)^2+(y+4)^2=-5+(5)^2+(4)^2$$
$$(x-5)^2+(y+4)^2=-5+25+16$$
$$(x-5)^2+(y+4)^2=36$$

y como en esta ecuación $t>0$, la gráfica de la ecuación anterior es una circunferencia en $C(5,-4)$ y $r=\sqrt{t}=\sqrt{36}=6$.

b) Escribiendo la segunda de las ecuaciones propuestas en la forma reducida, siguiendo los pasos anteriores, se tiene:

$$(x+3)^2+(y-1)^2=0$$

se ve que la gráfica es el punto (-3,1).

c) Escribiendo la tercera de las ecuaciones propuestas en la forma reducida, se tiene:

$$(x+4)^2+(y-5)^2=-9$$

se ve que la gráfica es una circunferencia imaginaria (o conjunto vacío).

Asociadas con la circunferencia, que es la gráfica de la relación:

$$S=\{(x,y)\mid (x-h)^2+(y-k)^2=r^2\}$$

están las gráficas de las relaciones:

$$S_1=\{(x,y)\mid (x-h)^2+(y-k)^2<r^2\}$$
$$S_2=\{(x,y)\mid (x-h)^2+(y-k)^2>r^2\}$$
$$S_3=\{(x,y)\mid (x-h)^2+(y-k)^2\le r^2\}$$
$$S_4=\{(x,y)\mid (x-h)^2+(y-k)^2\ge r^2\}$$

en donde la gráfica de S_1 consiste en todos los puntos del plano que están dentro de la circunferencia S y la de S_2 en todos los puntos del plano que están fuera de ella; la gráfica de S_3 consiste en todos los puntos del plano que están dentro de, o sobre la circunferencia S y la de S_4 en todos los puntos del plano que quedan fuera de, o sobre ella.

(Observe que $S_1 \cap S_2 = \emptyset$, $S_1 \cap S_3 = S_1$ y $S_3 \cup S_4 = S$).

EJEMPLO 5.

Construir la gráfica de la siguiente lación, estableciendo su dominio y recorrido.

$R = \{(x,y) \mid (x+1)^2 + (y+2)^2 = 4\}$

SOLUCIÓN:

El lugar geométrico que representa a la ecuación de la relación es: C(-1,-2) y r = 2.

Graficamos el punto del centro de la ecuación de la circunferencia y con un compás lo abrimos de tal manera, que tengamos un radio igual a 3 y con apoyo en el centro dibujamos la gráfica de la relación.

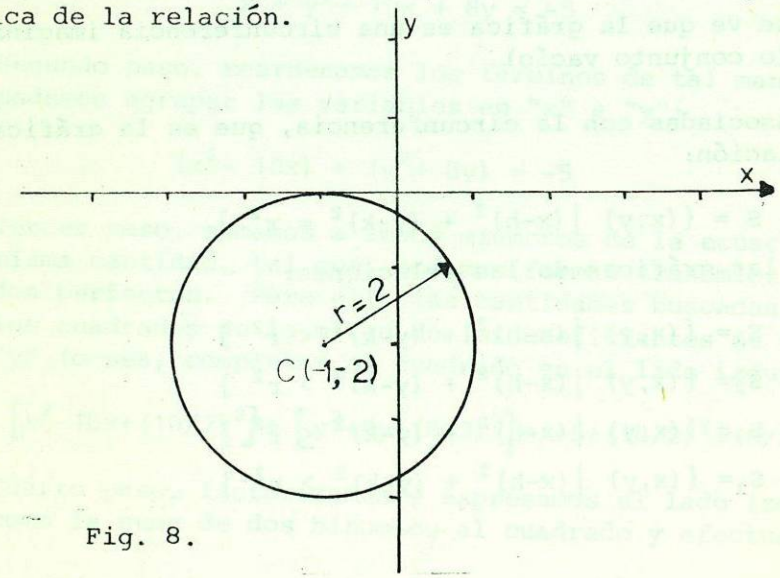

Fig. 8.

El dominio y el recorrido queda determinado por:

Dominio = $[-3;\ 1]$

Recorrido = $[-4;\ 0]$

EJEMPLO 6.

Construir la gráfica de la relación dada por $R= \{(x,y) \mid x^2+ (y-3)^2 <9\}$, y establezca su dominio y recorrido.

SOLUCIÓN:

La gráfica de la relación consiste en todos los puntos del plano, que están dentro de la ecuación de la circunferencia dada por $x^2+ (y-3)^2 = 9$.

Para graficarla, graficamos primero el centro determinado por las coordenadas de (0,3) y, con apoyo en él, abrimos nuestro compás hasta tener un radio igual a 3 y dibujamos una circunferencia interrumpida (punteada), que representa que el conjunto de puntos que están sobre la circunferencia no pertenecen a la relación. En seguida, sombreamos la parte interior de la circunferencia representando, por esta área sombreada, al conjunto de puntos que pertenecen a la relación dada. De lo anterior tenemos que:

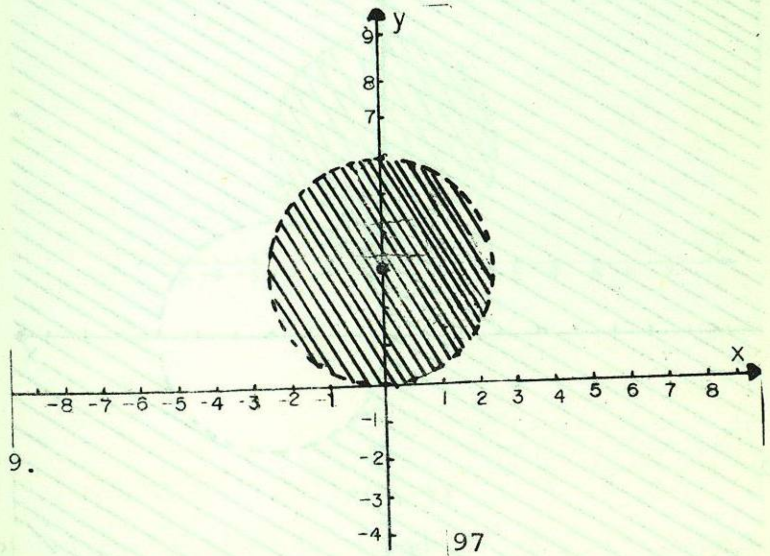

Fig. 9.

Dominio = $(-3;3)$

Recorrido= $(0;6)$

EJEMPLO 7.

Construir la gráfica de la relación siguiente, estableciendo su dominio y recorrido.

$$R = \{(x,y) \mid (x-3)^2 + y^2 > 9\}$$

SOLUCIÓN:

La gráfica consiste en todos los puntos del plano, que están fuera de la ecuación de la circunferencia, dada por: $(x-3)^2 + y^2 = 9$.

Para encontrar la gráfica usamos un compás y lo abrimos de tal manera que tengamos un radio igual a 3 y con apoyo al centro (3,0) dibujamos una circunferencia interrumpida (punteada). Dicha circunferencia punteada representa al conjunto de puntos que están sobre la circunferencia y que no pertenecen a la relación dada. En seguida sombreamos la parte exterior de la circunferencia para representar, así, al conjunto de puntos que sí pertenecen a la relación. De lo anterior, tenemos que:

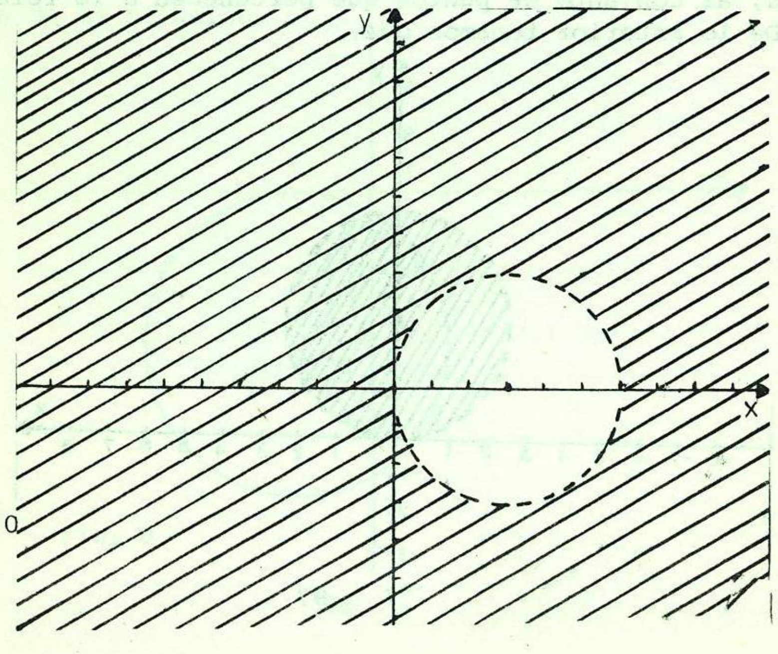

Fig.10

Dominio = $(-\infty; \infty)$

Recorrido = $(-\infty; \infty)$

EJEMPLO 8.

Construir la gráfica de la relación siguiente, estableciendo su dominio y recorrido.

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + (y-3)^2 \leq 9\}$$

SOLUCIÓN:

La gráfica de esta relación consiste en todos los puntos del plano, que están dentro, o sobre la ecuación de la circunferencia $x^2 + (y-3)^2 = 9$; siendo $h = 0$, $k = 3$ y $r=3$.

Para graficar la relación, usamos un compás y lo abrimos de tal manera que, tengamos un radio igual a 3, con apoyo en el centro (0,3) dibujamos una circunferencia seguida (sin puntear) y sombreamos la parte interior de la circunferencia. De lo anterior tenemos que:

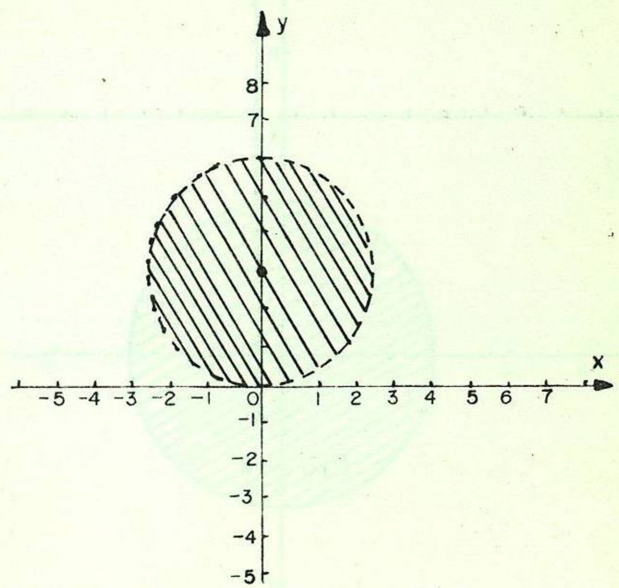

Fig. 11