LA PARABOLA.

La parábola es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo, y de una recta fija. El punto fijo se llama foco y la recta fija se llama directriz. La recta que pasa por el foco y es perpendicular a la directriz se llama eje de simetría de la parábola. La parábola es una sección cónica que se puede obtener geométricamente, mediante el corte producido en un cono circular recto por un plano paralelo a la generatriz.

Para construir la parábola por trazo contínuo, se aplica una regla a la directriz, y en el vértice de una escuadra, opuesto al cateto menor, se sujeta uno de los extremos de un cordón de longitud igual al cateto mayor; el otro extremo del cordón se fija en el foco. Después, haciendo resbalar el cateto menor de la escuadra a lo largo de la regla, se describe la curva por medio de un lápiz, aplicado contra la escuadra, cuidando de mantener el cordón bien tirante. La curva así descrita es una parábola.

Para construir la parábola por puntos, se traza primero el eje de la parábola perpendicular a la directriz, se señala el foco y se fija el vértice de la parábola en el punto medio, entre el foco y el cordón con la directriz. Se trazan luego, a la derecha del vértice, diversas perpendiculares al eje, y se les corta, tomando por el centro el foco, con arcos de radios iguales a sus respectivas distancias a la directriz. Se obtienen así puntos de la parábola, que basta unir con un trazo contínuo para obtener la curva pedida. Efectivamente, todos estos puntos equidistan del foco y de la directriz.

René Descartes inició la Geometría Analítica en 1637. Por esta razón se le suele llamar geometría cartesiana, que esencialmente no es más que un método para estudiar la geometría por medio de un sistema de coordenadas, a cual se asocia el álgebra.

Estudia cuidadosamente esta unidad ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente la parábola.

2.- Reconocer la ecuación de una parábola en los dos casos siguientes:

a) Referida a su vértice y cuyo eje de simetría coincide con un eje coordenado.

b) No referida a su vértice y cuyo eje de simetría es paralelo a un eje coordenado.

3.- Dada la ecuación de una parábola, calcular correctamente sus elementos.

4.- Establecer correctamente el dominio y el recorrido (alcance) de la relación determinada por la ecuación dada.

5.- Construir correctamente la gráfica de una parábola definida por la ecuación:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{donde } a \neq 0.$$

6.- Encontrar gráficamente la unión o la intersección de una parábola con una recta, dadas sus relaciones respectivas especificando su dominio y su recorrido o alcance.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo IV de tu libro "Geometría Analítica". Lee primero todo el capítulo, para que veas lo que vas a estudiar. Después, trata de comprender el significado del concepto parábola para que estés en condiciones de poderla definir.

Para el objetivo 2, estudia los teoremas 1 y 2 ya que son la base para este objetivo, junto con los ejemplos que se plantean, para que luego trates de resolver la autoevaluación 1.

Para el objetivo 3, estudia la sección 4-5 de tu texto y los ejemplos que ahí se resuelven. Luego resuelve los problemas de la autoevaluación 2.

Para el objetivo 4, puedes practicar con todos los ejemplos que vienen en el capítulo y con los problemas de las autoevaluaciones en general, mostrándole a tu maestro asesor la respuesta, para que estés más seguro de ella, o en caso contrario, te pueda asesorar debidamente. Te sugerimos que construyas primeramente la gráfica de la ecuación, determinando las coordenadas del vértice a partir del cual, se obtiene el dominio y el rango, utilizando la notación o los símbolos para especificar subconjuntos.

Para el objetivo 5, estudia la sección 4-6, donde encontrarás la forma de determinar los valores máximos y mínimos, para después graficar. Resuelve después la autoevaluación 3.

Para el objetivo 6, estudia los últimos ejemplos que vienen en el capítulo, para que veas cómo se grafican, sobre todo, las desigualdades, para que puedas saber cuándo el área va adentro o fuera de la ecuación. Como práctica de este objetivo, entre tus compañeros y tú pónganse problemas para que los resuelvan bajo la supervisión de su maestro asesor.

2.- Una vez que te sientas seguro de tus objetivos, resuelve la autoevaluación del capítulo, para que así compruebes tu aprendizaje logrado. Además consulta todas tus dudas con tu maestro asesor.

Para el objetivo 2, estudia los teoremas 1 y 2 ya que son la base para este objetivo, junto con los ejemplos que se plantean, para que luego trates de resolver la autoevaluación 1.

Para el objetivo 3, estudia la sección 4-5 de tu texto y los ejemplos que ahí se resuelven. Luego resuelve los problemas de la autoevaluación 2.

Para el objetivo 4, puedes practicar con todos los ejemplos que vienen en el capítulo y con los problemas de las autoevaluaciones en general, mostrándolo a tu maestro asesor la respuesta, para que estés más seguro de ella, o en caso contrario, te pueda asesorar debidamente. Te sugerimos que construyas primeramente la gráfica de la ecuación, determinando las coordenadas del vértice a partir del cual, se obtiene el dominio y el rango, utilizando la notación o los símbolos para especificar subconjuntos.

Para el objetivo 5, estudia la sección 4-6, donde encontrarás la forma de determinar los valores máximos y mínimos, para después graficar. Resuelve después la autoevaluación 3.

Para el objetivo 6, estudia los últimos ejemplos que vienen en el capítulo, para que veas cómo se grafican, sobre todo, las desigualdades, para que puedas saber cuándo el área va adentro o fuera de la ecuación. Como práctica de este objetivo, entre tus compañeros y tú pónganse problemas para que los resuelvan bajo la supervisión de su maestro asesor.

2.- Una vez que te sientas seguro de tus objetivos, resuelve la autoevaluación del capítulo, para que así compruebes tu aprendizaje logrado. Además consulta todas tus dudas con tu maestro asesor.

CAPITULO 4.

LA PARÁBOLA.

4-1 INTRODUCCIÓN.

Conforme los matemáticos estudiaban los lugares geométricos de los puntos equidistantes de dos puntos y los lugares geométricos de los puntos equidistantes de dos rectas, era natural que debieran considerar el lugar geométrico de los puntos equidistantes de un punto y una recta. Este lugar geométrico es la parábola.

Una parábola es el lugar geométrico de los puntos cuyas distancias a una recta y un punto fijo son iguales. El punto fijo se llama foco y la recta fija se llama directriz.

Se sabe que muchos objetos en movimiento describen trayectorias parabólicas. Una pelota lanzada al aire, el proyectil disparado por un cañón, la bomba que se deja caer desde un avión, un chorro de agua que sale por una manguera seguiría una trayectoria parabólica si pudiera despreciarse la resistencia del aire. Por lo tanto, al disparar una granada de artillería, si se conocen el ángulo de elevación del cañón y su velocidad inicial, es posible calcular la ecuación de su trayectoria en el aire. Entonces es posible calcular previamente a qué distancia caerá el proyectil y cuánto tiempo tardará en llegar hasta esa distancia. Haciendo variar el ángulo de elevación del cañón, puede hacerse variar la trayectoria del proyectil en el aire.

De manera semejante, puede determinarse la ecuación de la trayectoria de la bomba que se deja caer desde un avión. A partir de la ecuación, la velocidad del avión, la altura a la cual se encuentra éste y la posición del blanco, puede determinarse cuando cae la bomba.

En la actualidad, el procedimiento está tan mecanizado que el bombardeo no necesita considerar la ecuación; es más, ni siquiera necesita saber de su existencia. Sin embargo, las personas responsables de esa mecanización del procedimiento tienen que aplicar con amplitud estas ecuaciones.

La curva parabólica también es útil en la construcción de muchos objetos físicos. Frecuentemente se usa el arco parabólico en la construcción de puentes porque es más resistente que cualquier otro.

Las curvas parabólicas se usan ampliamente en la construcción de reflectores de luz, sonido y calor.

Los proyectores, faros buscadores, fanales, y las antenas de radar son ejemplos de reflectores parabólicos que se obtienen haciendo girar una parábola alrededor de su eje. La superficie así formada se llama paraboloide de revolución.

Inversamente, si rayos paralelos chocan contra una superficie parabólica, los rayos reflejados convergerán al foco de la parábola. Esta propiedad se aplica en algunos de los telescopios de reflexión. Los rayos que provienen de los cuerpos celestes son muy aproximadamente paralelos cuando pasan a través del telescopio. Estos rayos se concentran en el foco del espejo parabólico del telescopio, formando así una imagen relativamente brillante y clara.

El alumno que empieza a estudiar este libro, puede preguntarse con toda razón: ¿Qué es la Geometría Analítica? ¿Qué gano al estudiarla? Muchas famosas instituciones de enseñanza superior han reconocido los beneficios positivos que puede obtener todo aquel que estudie esta rama de las matemáticas.

El estudio de la Geometría Analítica es parte esencial de la preparación que necesita el ingeniero, hombre de ciencia, arquitecto y dibujante para tener éxito. El carpintero, maquinista, hojalatero, cantero, artista, diseñador, etc., todos aplican los principios de la Geometría Analítica en su trabajo.

4-2 LA PARÁBOLA.

La ecuación de la parábola la deduciremos a partir de su definición como el lugar geométrico de un punto que se mueve de acuerdo con una ley especificada.

Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta.

El punto fijo se llama foco y la recta fija directriz de la parábola. La definición excluye el caso en que el foco está sobre la directriz.

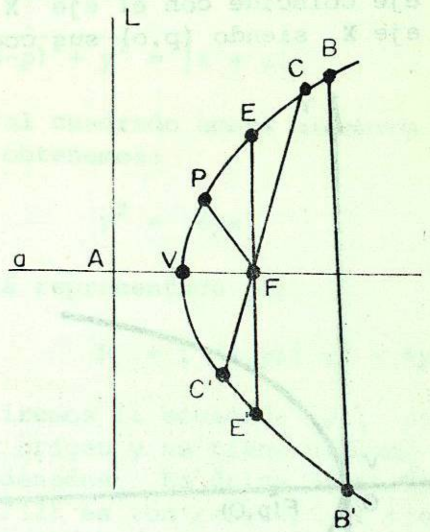


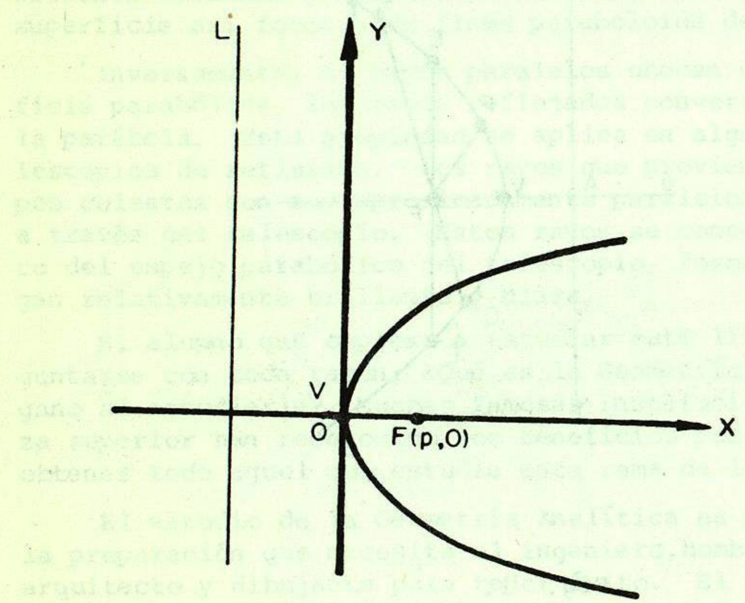
Fig. 1.

Designemos por F y "L" (fig. 1) el foco y la directriz de una parábola, respectivamente. La recta "a" que pasa por F y es perpendicular a "L" se llama eje de la parábola. Sea A el punto de intersección del eje y la directriz.

El punto V, punto medio del segmento AF, está por definición, sobre la parábola; este punto se llama vértice. El segmento de recta BB' que une a dos puntos cualesquiera diferentes de la parábola se llama cuerda. En particular, la cuerda que pasa por el foco como CC' se llama cuerda focal. La cuerda focal EE' perpendicular al eje se llama lado recto o ancho focal.

4-3 ECUACION DE LA PARABOLA CON VERTICE EN EL ORIGEN Y EL EJE DE SIMETRIA COINCIDE CON UN EJE COORDENADO.

Veremos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje coincide con uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideraremos la parábola cuyo vértice está en el origen (Fig. 2) y cuyo eje coincide con el eje X. Entonces el foco F está sobre el eje X, siendo (p,o) sus coordenadas.



X= p; p> O

FIG.— 2

Por la definición de la parábola, la ecuación de la directriz "l" es $x = -p$. Sea P (x,y) un punto cualquiera de la parábola. Por P tracemos el segmento PA perpendicular a "l". Entonces por la definición de la parábola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica:

$$|\overline{FP}| = |\overline{PA}| \qquad (1)$$

Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos tenemos de la figura 2:

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-p)^2 + y^2}$$

$$\text{y} \qquad |\overline{PA}| = |x + p|$$

por tanto, la condición geométrica (1) está expresada, analíticamente por la ecuación:

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x + p|$$

Si elevamos al cuadrado ambos miembros de esta ecuación y simplificamos, obtenemos:

$$y^2 = 4px \qquad (2)$$

cuya relación está representada por:

$$R = \{ (x,y) \mid y^2 = 4px \}$$

Ahora discutiremos la ecuación (2). Evidentemente, la curva pasa por el origen y no tiene ninguna otra intersección con los ejes coordenados. La única simetría que posee el lugar geométrico de (2) es con respecto al eje X. Despejando "y" de la ecuación (2), tenemos:

$$y = \pm 2 \sqrt{px} \qquad (3)$$

por tanto, para valores de "y" reales y diferentes de 0, p y x deben ser del mismo signo. Según esto, podemos considerar dos casos:

$$p > 0 \quad \text{y} \quad p < 0$$

Si $p > 0$, deben excluirse todos los valores negativos de x, y todo el lugar geométrico se encuentra a la derecha del eje Y. Como no se excluye ningún valor positivo de x, y com "y" puede tomar todos los valores reales, el lugar geométric de (2) es una curva abierta que se extiende indefinidamente hacia la derecha del eje Y y hacia arriba y abajo del eje relación cuyo dominio y recorrido se expresa en la forma si- guiente:

$$\text{Dominio} = [0; \infty)$$

$$\text{Recorrido} = (-\infty; \infty)$$

La gráfica de la relación representada por la ecuación (2) es la indicada en la figura 2 y se dice que la parábola se abre hacia la derecha.

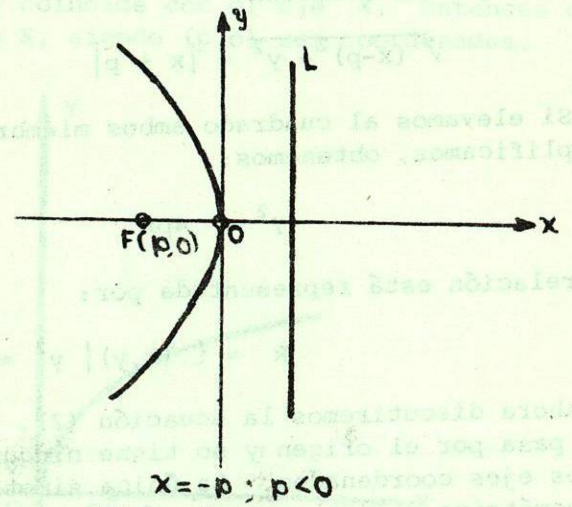


Fig. 3.

Análogamente si $p < 0$, todos los valores positivos de- ben de excluirse en la ecuación (3) y todo el lugar geométri co aparece a la izquierda del eje Y, es una curva abierta qu se extiende indefinidamente hacia la izquierda del eje Y y h cia arriba y abajo del eje X, relación cuyo dominio y recor do se expresan:

$$\text{Dominio} = (-\infty; 0]$$

$$\text{Recorrido} = (-\infty; \infty)$$

En este caso, la gráfica de la relación representada por la ecuación (2) es la indicada en la figura 3 y se dice que la parábola se abre hacia la izquierda.

Según la ecuación (3), hay dos puntos sobre la parábola que tienen abscisa igual a p; uno de ellos tiene la ordenada 2p y el otro la ordenada -2p. Como la abscisa del foco es p, se sigue que la longitud del lado recto (ancho focal) de la parábola es igual al valor absoluto de la cantidad 4p.

Si el vértice de la parábola está en el origen y su eje coincide con el eje Y, se puede demostrar análogamente, que la ecuación de la parábola es:

$$x^2 = 4py \qquad (4)$$

cuya relación se representa como $R = \{(x,y) \mid x^2 = 4py\}$ en donde el foco es el punto (o,p). Puede demostrarse fácilmente que, si $p > 0$ la parábola se abre hacia arriba (fig. 4-a), siendo el dominio y el recorrido de la relación representada por la ecuación de la parábola, los siguientes:

$$\text{Dominio} = (-\infty; \infty)$$

$$\text{Recorrido} = [0; \infty)$$

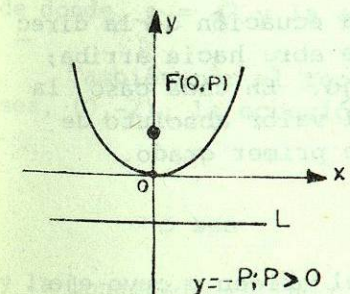


Fig. 4-a.

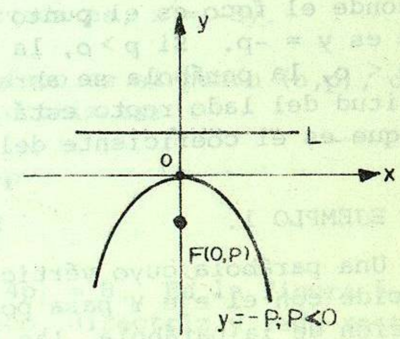


Fig. 4-b.