Si $p < 0$, la parábola se abre hacia abajo (fig. 4-b), siendo el dominio y el recorrido los siguientes:

$$\text{Dominio} = (-\infty;\infty)$$

$$\text{Recorrido} = (-\infty;\ 0]$$

Las ecuaciones (2) y (4) se llaman a veces la primera ecuación ordinaria de la parábola. Como son las ecuaciones más simples de la parábola, nos referimos a ellas como a las formas canónicas.

Los resultados anteriores se resumen como sigue:

TEOREMA 1.

La relación de una parábola de vértice en el origen y eje de simetría sobre el eje X, es:

$$R = \{(x,y) \mid y^2 = 4px\}$$

en donde el foco es el punto (p,o) y la ecuación de la directriz es $x = -p$. Si $p > o$, la parábola se abre hacia la derecha; si $p < o$, la parábola se abre hacia la izquierda.

Si el eje de una parábola coincide con el eje Y, y el vértice está en el origen, su relación es:

$$R = \{(x,y) \mid x^2 = 4py\}$$

en donde el foco es el punto (o,p), y la ecuación de la directriz es $y = -p$. Si $p > o$, la parábola se abre hacia arriba; si $p < o$, la parábola se abre hacia abajo. En cada caso, la longitud del lado recto está dada por el valor absoluto de $4p$, que es el coeficiente del término de primer grado.

EJEMPLO 1.

Una parábola cuyo vértice está en el origen y cuyo eje coincide con el eje Y pasa por el punto (4,-2). Hallar la ecuación de la parábola, las coordenadas de su foco, la

ecuación de la directriz y la longitud de su lado recto. Trazar la gráfica correspondiente.

SOLUCIÓN:

Por el teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py \quad (4); \quad p < o$$

como la parábola pasa por el punto (4,-2), las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación (4), y tenemos:

$$16 = 4P(-2)$$

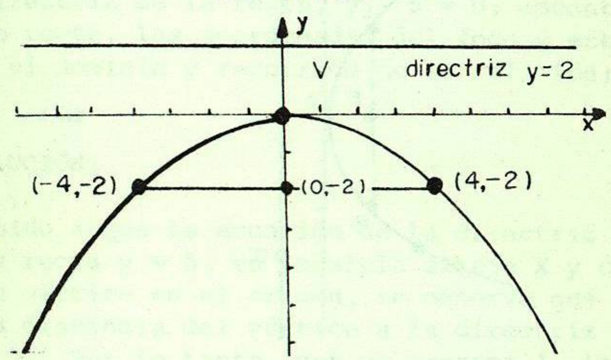

Fig. 5.

de donde, $p = -2$ y la ecuación buscada es, $x^2 = -8y$.

También por el teorema 1, el foco es el punto (o,p), o sea, $(0,-2)$; la ecuación de la directriz es:

$$y = -p$$

$$\text{o sea} \qquad y = 2$$

y la longitud del lado recto es $|4p| = 8$. En la figura 5, se ha trazado el lugar geométrico, foco, directriz y lado recto.

EJEMPLO 2.

Encuentre el vértice, el foco, los puntos extremos del lado recto y la ecuación de la directriz de la parábola, $y^2 = -8x$; construya la curva y dé el dominio y el recorrido de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid y^2 = -8x\}$$

SOLUCIÓN:

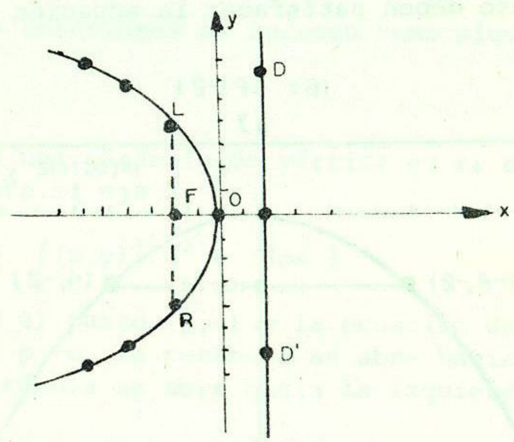

Fig. 6.

La ecuación, $y^2 = -8x$ es de la forma $y^2 = 4px$ con $p = -2$, de modo que el vértice está en el origen, el foco es $F(-2,0)$ y la ecuación de la directriz, $x = 2$. Se encuentra también que la longitud $|RL|$ del lado recto es $|4p| = |-8| = 8$, o sea que $|FL| = |FR| = 4$ y los puntos extremos del lado recto son $L(-2,4)$ y $R(-2,-4)$. Hasta aquí, sabemos que la parábola tiene su concavidad hacia la izquierda y que los puntos $O(0,0)$, $L(-2,4)$ y $R(-2,-4)$ pertenecen a la parábola.

Para obtener puntos adicionales haga uso de la ecuación de la curva; por ejemplo, si $x = -4$ se obtiene $y^2 = 32$ y si $x = -6$, $y^2 = -48$, de donde se ve que los puntos $(-4, 4\sqrt{2})$, $(-4, -4\sqrt{2})$, $(-6, 4\sqrt{3})$ y $(-6, -4\sqrt{3})$ pertenecen a la parábola, la cual se muestra en la figura 6. En esta figura se ve claramente que:

$$\text{Dominio de } R = (-\infty; 0]$$

$$\text{Recorrido de } R = (-\infty; \infty)$$

Esta parábola es simétrica respecto al eje X, pero no lo es respecto al eje Y ni respecto al origen.

EJEMPLO 3.

Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen y directriz de la recta, $y - 5 = 0$, encontrar la longitud del lado recto, las coordenadas del foco y establecer correctamente el dominio y recorrido de la relación; trazar la curva.

SOLUCIÓN:

Debido a que la ecuación de la directriz es, $y - 5 = 0$, o sea la recta $y = 5$, es paralela al eje X y como la parábola tiene su vértice en el origen, se observa que el valor absoluto de la distancia del vértice a la directriz y al foco es igual a 5. Por lo tanto, por el teorema 1, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$x^2 = 4py \quad (4); \qquad p < o$$

El eje de simetría de la parábola coincide con el eje Y las cordenadas del foco son: $F(0, -5)$, la ecuación de la parábola es: $x^2 = 4(-5)y = -20y$ por lo que la longitud del lado recto es, $|-20| = 20$ y paralelo al eje X cortando a la parábola en los puntos $(-10,-5)$ y $(10, -5)$.

De la figura 7 es fácil observar que el dominio y recorrido son: $(-\infty;\infty)$ y $(-\infty; 0]$ respectivamente.

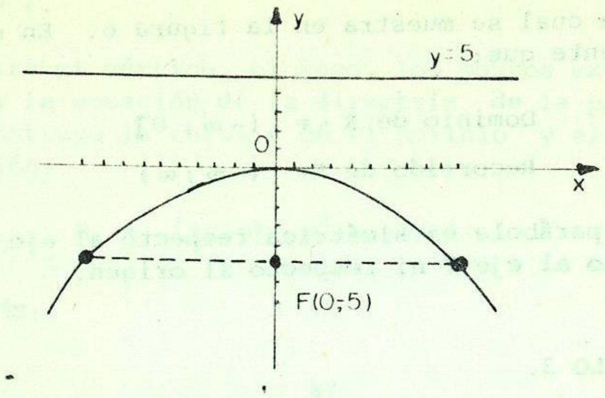

Fig. 7.

EJEMPLO 4.

Hallar la ecuación de la parábola de vértice en el origen que satisface la siguiente condición: con foco en la parte positiva del eje Y y lado recto de longitud 8. Construya la curva y dé el dominio y recorrido de la relación así como la ecuación de la directriz.

SOLUCIÓN:

La longitud del lado recto es igual a $4p = 8$; por lo que $p = 2$; el foco está en la parte positiva del eje Y y a una distancia p del vértice (0,0). Las coordenadas del foco son F(0,2) y la ecuación de la directriz es, $y= -2$ por lo que la parábola abre sus ramas hacia arriba y por el teorema 1 su ecuación es:

$$x^2 = 4py; \quad p > o$$

$$\text{o sea} \quad x^2 = 4\ (2)y$$
$$= 8y$$

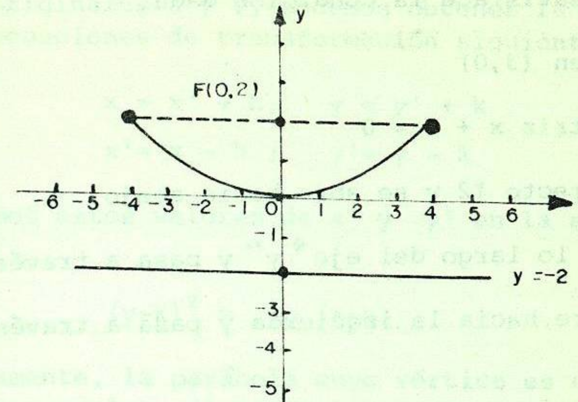

Fig. 8.

Los extremos del lado recto tocan la curva en los puntos cuyas coordenadas son, (-4,2) y (4,2). El dominio y recorrido se obtiene fácilmente del lugar geométrico de la curva en la figura 8.

Dominio $= (-\infty\,;\infty)$

Recorrido $= [0\;;\infty)$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Encontrar las coordenadas del foco, las coordenadas de los extremos del lado recto y la ecuación de la directriz de cada parábola. Bosqueje la cruva.

1.- $y^2 = 4x$

2.- $x^2 = -10y$

3.- $y^2 + 3x = 0$

Escriba la ecuación de la parábola con vértice en el origen y que satisface la condición dada.

4.- Foco en (3,0)

5.- Directriz $x + 6 = 0$

6.- Lado recto 12 y se abre hacia abajo.

7.- Eje a lo largo del eje "y" y pasa a través de (4,-3).

8.- Se abre hacia la izquierda y pasa a través de (-1,-1).

4-4 ECUACIÓN DE UNA PARÁBOLA DE VÉRTICE EN (h, k) Y EJE PARALELO A UN EJE COORDENADO.

Frecuentemente necesitaremos obtener la ecuación de una parábola cuyo vértice no esté en el origen y cuyo eje sea paralelo, y no necesariamente coincidente a uno de los ejes coordenados. De acuerdo con esto, consideraremos la parábola, (fig. 9) cuyo vértice es el punto (h,k) y cuyo eje es paralelo al eje X. Si los ejes coordenados son trasladados de tal manera que el nuevo origen O' coincida con el vértice (h,k), se sigue por el teorema 1 que la ecuación de la parábola de referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por:

$$y'^2 = 4px' \qquad (5)$$

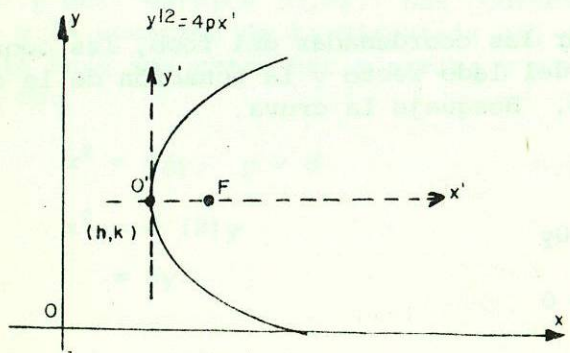

Fig. 9.

en donde las coordenadas del foco F son (p, o) referido a los nuevos ejes. A partir de la ecuación de la parábola referida a los ejes originales X y Y, podemos obtener la ecuación (5) usando las ecuaciones de transformación siguientes:

$$x = x' + h; \quad y = y' + k$$

de donde, $\quad x' = x - h \; ; \quad y' = y - k$

si sustituimos estos valores de x' y y' en la ecuación (5), obtenemos:

$$(y-k)^2 = 4p\,(x-h) \qquad (6)$$

Análogamente, la parábola cuyo vértice es el punto (h,k) y cuyo eje es paralelo al eje Y tiene por ecuación:

$$(x-h)^2 = 4p\,(y-k) \qquad (7)$$

en donde $|p|$ es la longitud de aquella porción del eje comprendida entre el foco y el vértice.

Las ecuaciones (6) y (7) se llaman generalmente, segunda ecuación ordinaria de la parábola.

Los resultados anteriores, junto con los obtenidos en el teorema 1, conducen al siguiente:

TEOREMA 2.

La ecuación de una parábola de vértice (h, k) y eje paralelo al eje X, es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

siendo $|p|$ la longitud del segmento del eje comprendido entre el foco y el vértice.

Si $p > o$, la parábola se abre hacia la derecha y el dominio y recorrido son respectivamente, $[h;\infty)$ y $(-\infty;\infty)$.

Si $p < o$, la parábola se abre hacia la izquierda y el do- minio y recorrido son respectivamente, $(-\infty ; h]$ y $(-\infty ; \infty)$.

Si el vértice es el punto (h, k) y el eje de la parábo- la es paralelo al eje Y, su ecuación es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

Si $p > o$, la parábola se abre hacia arriba y su dominio y recorrido son respectivamente, $(-\infty ; \infty)$ y $[k ; \infty)$.

Si $p < o$, la parábola se abre hacia abajo y su dominio y recorrido son respectivamente, $(-\infty ; \infty)$ y $(-\infty ; k]$.

EJEMPLO 1.

Hallar la ecuación de la parábola cuyo vértice es el punto (3,4) y cuyo foco es el punto (3,2). Hallar también la ecuación de su directriz, la longitud del lado recto, el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN:

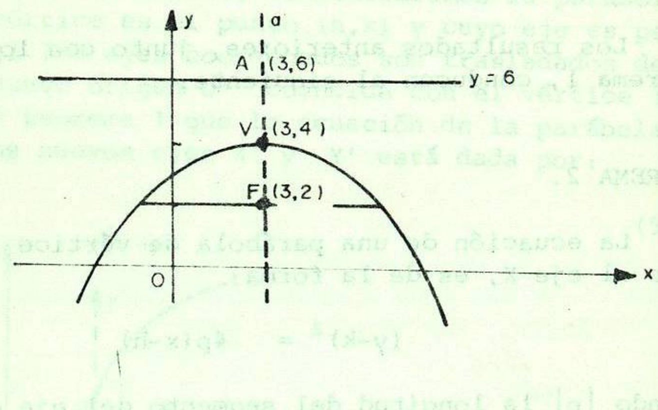

Fig. 10.

Como el vértice V y el foco F de una parábola están sobre su eje, y como en este caso cada uno de estos puntos tiene la misma abscisa 3, se sigue que el eje "a" es paralelo al eje Y, como se indica en la figura 10. Por tanto, por el teorema 2, la ecuación de la parábola es de la forma:

$$(x-h)^2 = 4p(y-k)$$

como el vértice V es el punto (3,4), la ecuación puede escribirse:

$$(x-3)^2 = 4p(y-4)$$

Ahora bien, $|p| = |\overline{FV}| = |4-2| = 2$. Pero, como el foco F está abajo del vértice V, la parábola se abre hacia abajo y p es negativo. Por tanto, $p = -2$ y la ecuación de la parábola es:

$$(x-3)^2 = -8(y-4)$$

y la longitud del lado recto es 8.

Designemos por A el punto en que el eje "a" corta la directriz 1. Como V (3,4) es el punto medio del segmento AF, se sigue que las coordenadas de A son (3,6). Por tanto, la ecuación de la directriz es $y = 6$.

De la figura 10, fácilmente se observa que el dominio y el recorrido son respectivamente, $(-\infty ; \infty)$ y $(-\infty ; 4]$.

EJEMPLO 2.

Encuentre la ecuación de la parábola cuyos extremos de su lado recto son los puntos (3,1) y (3,5) si su foco está a la derecha del vértice. Encuentre también la ecuación de la directriz, las coordenadas del foco, el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN:

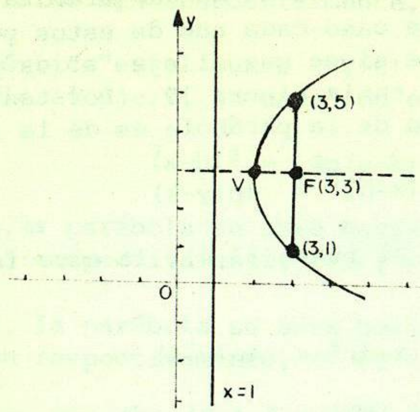

Fig. 11.

Observamos de los datos del problema que los extremos del lado recto de la parábola tienen ambos abscisa 3. Si el foco de la parábola está a la derecha del vértice la parábola abre sus brazos hacia la derecha. El foco se encuentra localizado exactamente a la mitad de la longitud del lado recto, por lo que sus coordenadas son F(3,3).

Si la longitud del lado recto es (5-1) = 4, entonces $|4p| = 4$ y por lo tanto $p = 1$. El vértice C está en (2,3) y la ecuación de la directriz es, $x = 1$ (fig. 11). El dominio es, $[2;\infty)$ y el recorrido es, $(-\infty,+\infty)$.

EJEMPLO 3.

Establezca la ecuación de la parábola cuyo vértice está en (-3,4) y cuyo foco es (-5,4); halle las coordenadas de los extremos del lado recto, la ecuación de la directriz, construya la curva y dé el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN:

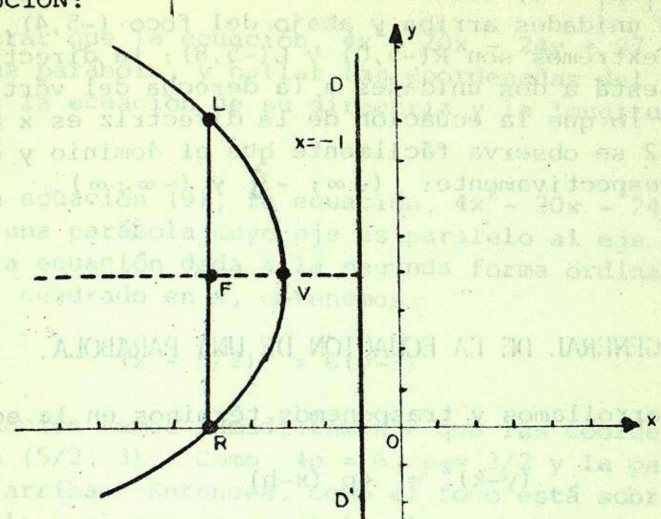

Fig. 12.

Como el vértice y el foco de una parábola están sobre su eje, y como en la parábola dada, estos puntos tienen la misma ordenada 4, se deduce que el eje es horizontal como se ve en la fig. 12. Entonces por el teorema 2 la ecuación buscada es de la forma:

$$(y-k)^2 = 4p\ (x-h)$$

como p siempre es igual a $\overline{VF}$, en este caso se tiene:

$$p = -5 - (-3)$$

$$= -2$$

y haciendo $h = -3$, $k = 4$ y $p = -2$ se obtiene:

$$(y-4)^2 = -8\ (x+3)$$

como ecuación.

Como $|2p| = 4$, los extremos del lado recto están respectivamente 4 unidades arriba y abajo del foco $(-5,4)$, o sea que dichos extremos son $R(-5,0)$ y $L(-5,8)$; la directriz es vertical y está a dos unidades a la derecha del vértice $(-3,4)$, por lo que la ecuación de la directriz es $x = -1$. De la figura 12 se observa fácilmente que el dominio y el recorrido son respectivamente: $(-\infty; -3]$ y $(-\infty; \infty)$.

4-5 FORMA GENERAL DE LA ECUACION DE UNA PARABOLA.

Si desarrollamos y trasponemos términos en la ecuación,

$$(y-k)^2 = 4p\ (x-h)$$

obtenemos:

$$y^2 - 4px - 2ky + k^2 + 4ph = 0$$

puede escribirse en la forma:

$$Ay^2 + Dx + Ey + F = 0;\ A \neq 0,\ D \neq 0 \qquad (8)$$

donde $A \neq 0$, $D = -4p$, $E = -2k$, $F = k^2 + 4ph$.

Recíprocamente, completando el cuadrado en y, podemos demostrar que una ecuación de la forma (8), representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje X o superpuesto a él.

Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la parábola,

$$(x-h)^2 = 4p\ (y-k)$$

Por tanto, la gráfica de

$$Bx^2 + Dx + Ey + F = 0, \qquad (9)$$

en que $B \neq 0$ y $E \neq 0$ es una parábola de eje paralelo al eje Y o superpuesto a él.

EJEMPLO 1.

Demostrar que la ecuación, $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola, y hallar las coordenadas del vértice y del foco, la ecuación de su directriz y la longitud de su lado recto.

Por la ecuación (9), la ecuación, $4x^2 - 20x - 24y + 97 = 0$ representa una parábola cuyo eje es paralelo al eje Y. Si reducimos la ecuación dada a la segunda forma ordinaria, completando el cuadrado en x, obtenemos:

$$(x - 5/2)^2 = 6(y-3)$$

de esta ecuación vemos inmediatamente que las coordenadas del vértice son $(5/2, 3)$. Como $4p = 6$, $p = 3/2$ y la parábola se abre hacia arriba. Entonces, como el foco está sobre el eje de la parábola y el eje es paralelo al eje Y, se sigue que las coordenadas del foco son: $(5/2, 3 + 3/2)$, o sea, $(5/2, 9/2)$. La ecuación de la directriz es, $y = 3 - 3/2$, o sea, $y = 3/2$ y la longitud del lado recto es $|4p| = 6$. Se recomienda al alumno que dibuje la figura correspondiente a este ejemplo.

EJEMPLO 2.

Encuentra el vértice, el foco y los extremos del lado recto de la parábola representada por la ecuación:

$$3x^2 - 4x - 6y + 8 = 0$$

construya la curva, dé las ecuaciones de la directriz y del eje. Establezca correctamente su dominio y recorrido.