SOLUCIÓN:

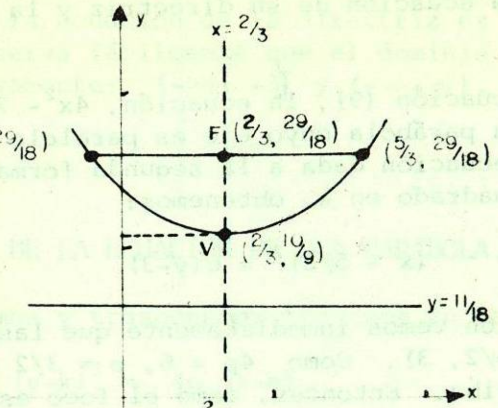


Fig. 13.

Dividiendo la ecuación dada entre 3, queda:

$$x^2 - \frac{4}{3}x - 2y + \frac{8}{3} = 0$$

y completando el cuadrado en $x$ se tiene:

$$(x - \frac{2}{3})^2 = 2(y - \frac{10}{9})$$

Por tanto, el vértice está en $V(2/3, 10/9)$ y $|4p| = 2$ en donde $p = 1/2$ y la parábola abre sus brazos hacia arriba. La ecuación del eje de simetría es, $x = 2/3$ y las coordenadas del foco son, $F(2/3, 10/9 + 1/2)$ ó $F(2/3, 29/18)$.

La ecuación de la directriz es, $y = 10/9 - 1/2 = 11/18$ si la longitud del lado recto es $|4p| = 2$, entonces los puntos extremos de dicho lado recto son respectivamente, $(-1/3, 29/18)$ y $(5/3, 29/18)$. De la fig. 13, el dominio y el recorrido son respectivamente, $(-\infty; \infty)$ y $[10/9; \infty)$.



AUTOEVALUACIÓN 2.

Escriba la ecuación de la parábola, en forma ordinaria que satisface las condiciones dadas.

1.- $V(0,3)$, $F(4,3)$

2.- $V(2,3)$, $F(6,3)$

3.- $V(3,3)$, $F(-3,3)$

4.- $V(-1,-2)$, lado recto 12, se abre hacia abajo.

5.- $V(2,1)$, extremos del lado recto, $(-1,-5)$ y $(-1,7)$

Exprese las ecuaciones de las parábolas siguientes en forma ordinaria. En cada caso encuentre las coordenadas del vértice del foco y de los extremos del lado recto. Bosqueje la curva.

6.- $y^2 - 8x + 8 = 0$

7.- $y^2 + 12x - 48 = 0$

8.- $x^2 + 4x - 16y + 4 = 0$

9.- $y^2 - 8y + 6x + 16 = 0$

10.- $y^2 + 4y + 8x - 28 = 0$

11.- $x^2 - 8x + 6y - 8 = 0$

12.- $y^2 + 14y - 24x - 119 = 0$

Encuentre la ecuación de la parábola en forma general.

13.- V(-1, -2); eje vertical, pasa a través de (3,6).

14.- Eje horizontal, pasa a través de (1,1), (1,-3) y (-2,0).

15.- Eje vertical, pasa a través de (-1, -3), (1, -2) y (2,1).

## 4-6 LA FUNCION CUADRATICA.

La forma, $ax^2 + bx + c$, en donde a, b y c son constantes y $a \neq 0$, se llama función cuadrática de x o trinomio de segundo grado, y puede ser investigada por medio de la relación:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (10)$$

La ecuación (10) se representa gráficamente por una parábola cuyo eje es paralelo o coincide con el eje Y. Por tanto las propiedades analíticas de la función cuadrática pueden estudiarse convenientemente por medio de las propiedades geométricas de la parábola (10).

Si reducimos la ecuación (10) a la segunda forma ordinaria de la ecuación de la parábola, completando al cuadrado en x, obtenemos:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{1}{a}\left(y + \frac{b^2}{4a} - c\right)$$





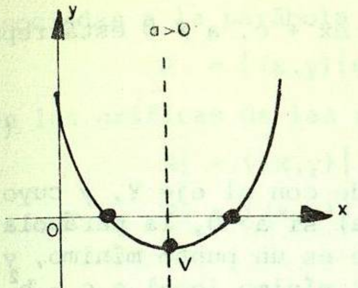


Fig. 14-a.

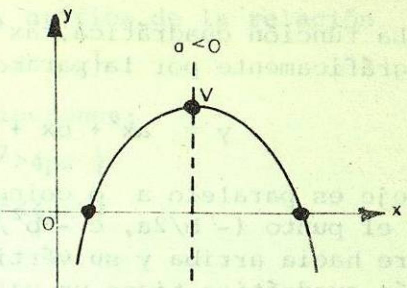


Fig. 14-b.

que es la ecuación de una parábola cuyo eje es paralelo a o coincide con el eje Y, y cuyo vértice es el punto $(-b/2a, c - b^2/4a)$. Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (fig. 14-b).

Un punto de una curva contínua cuya ordenada sea algebraicamente mayor que la de cualquiera de los puntos vecinos a él se llama punto máximo de la curva. Análogamente, un punto cuya ordenada sea algebraicamente menor que la de - - cualquiera de los puntos vecinos a él se llama punto mínimo de la curva. Evidentemente, si $a > 0$ (fig. 14-a), la parábola (10) tiene un solo punto mínimo, el vértice V. De manera semejante $a < 0$ (fig. 14-b), la parábola (10) tiene un único máximo, el vértice V.

La interpretación analítica es bien obvio. Como las coordenadas del vértice V de la parábola son $(-b/2a, c-b^2/4a)$, se sigue que si $a > 0$ la función cuadrática tiene, para $x = -b/2a$, un valor mínimo igual a $c - b^2/4a$ y si $a < 0$ tiene, para $x = -b/2a$ un valor máximo igual a $c - b^2/4a$.

Resumimos estos resultados en el siguiente:

TEOREMA 3.

La función cuadrática, $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ está representada gráficamente por la parábola:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (10)$$

cuyo eje es paralelo a o coincide con el eje Y, y cuyo vértice es el punto $(-b/2a,\ c - b^2/4a)$ si $a > 0$, la parábola (10) se abre hacia arriba y su vértice es un punto mínimo, y la función cuadrática tiene un valor mínimo igual a $c - b^2/4a$ cuando $x = -b/2a$.

Si $a < 0$, la parábola (10) se abre hacia abajo y su vértice es un punto máximo y la función cuadrática tiene un valor máximo igual a $c - b^2/4a$ cuando $x = -b/2a$.

## AUTOEVALUACION 3.

Encuentre las coordenadas del punto mínimo y máximo de la gráfica de cada una de las siguientes funciones y comprobar el resultado gráficamente.

1.- $y = x^2 - 8x + 10$

2.- $y = 1 - 6x - x^2$

3.- $y = 4x^2 + 4x + 1$

4.- $y = 9 - 6x - x^2$

5.- $y = 3x^2 - 3x - 4$

6.- $y = 4x^2 + 16x + 19$

7.- $y = 24x - 3x^2 - 47$

8.- $y = x^2 - 6x + 9$

9.- $y = 4x - 2x^2 - 5$





## 4-7 INTERSECCION DE UNA PARABOLA CON UNA RECTA.

Asociadas a la parábola R, gráfica de la relación

$$R = \{(x,y) \mid y^2 = 4px\}$$

existen las gráficas de las relaciones:

$$R_1 = \{(x,y) \mid y^2 > 4px\}$$

$$R_2 = \{(x,y) \mid y^2 < 4px\}$$

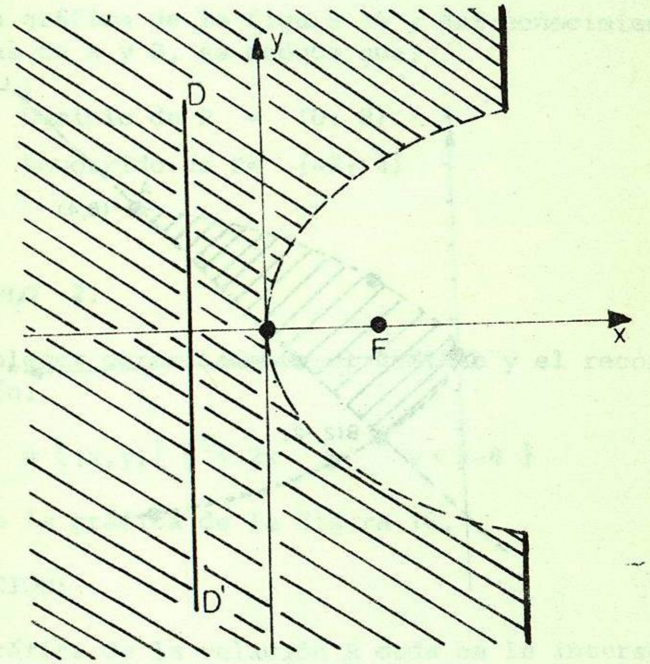


Fig. 15.

La gráfica de $R_1$ está formada por todos los puntos del plano exteriores a la parábola R representados por el área sombreada de la fig. 15.

Análogamente, la gráfica de $R_2$ está formada por todos los puntos del plano interiores a la parábola R representados por el área no sombreada de la fig. 15.

EJEMPLO 1.

Construya la gráfica de la siguiente relación,

$$R = \{(x,y) \mid y^2 < 2x \quad y \quad y > x - 4\}$$

y establezca correctamente su dominio y recorrido.

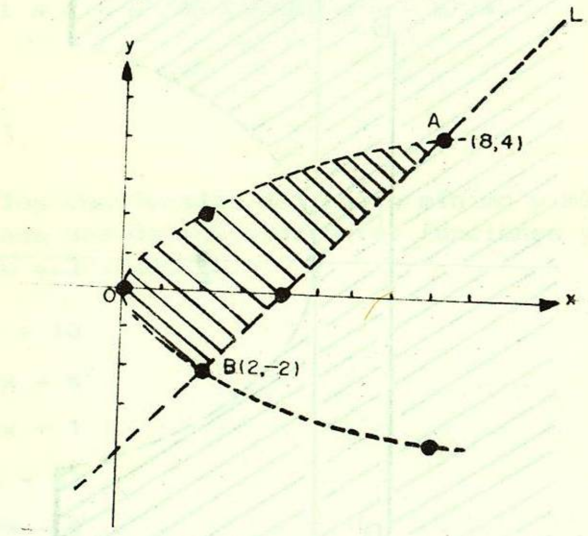


Fig. 16.

SOLUCIÓN:

La gráfica de la relación R dada arriba, es la intersección entre las dos desigualdades de la relación. O sea que, la gráfica de R es la intersección de las gráficas de:





$$R_1 = \{(x,y) \mid y^2 < 2x\}$$

$$\text{y} \quad R_2 = \{(x,y) \mid y > x - 4\}$$

Como la gráfica de $R_1$ consta de todos los puntos interiores a la parábola y la de $R_2$ está formada por los puntos que están por arriba de la recta L (fig. 16), se concluye que la gráfica de R es el conjunto de los puntos comunes a las de $R_1$ y $R_2$, que es la parte sombreada en la fig. 16. Los puntos de intersección A y B entre la recta y la parábola se determinan resolviendo simultáneamente sus ecuaciones.

De la gráfica de la figura 16 y del conocimiento de las coordenadas de A y B, se deduce que:

Dominio de R = (0; 8)

Recorrido de R= (-2; 4)

**EJEMPLO 2.**

Establecer correctamente el dominio y el recorrido de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid y^2 < 2x \quad y \quad y < x - 4\}$$

utilizando la gráfica de la figura 16.

SOLUCIÓN:

La gráfica de la relación R dada es la intersección de las gráficas de:

$$R_1 = \{(x,y) \mid y^2 < 2x\}$$

$$R_3 = \{(x,y) \mid y < x - 4\}$$

como la gráfica de $R_1$ consta de todos los puntos interiores a la parábola y la de $R_3$ está formada por los puntos que están por abajo de la recta L (fig. 16), se concluye que la gráfica de R en este ejemplo es el conjunto de los puntos comunes a las de $R_1$ y $R_3$, que es la parte no sombreada en la figura 16. De dicha figura se obtiene:

Dominio de R = $(2;\infty)$

Recorrido de R= $(-\infty;\infty)$

Se puede observar de la figura 16 que las gráficas de la parábola y de la línea recta están trazadas con línea punteada. Esto significa que sus relaciones respectivas son desigualdades y por tanto, el dominio y el recorrido se encierran en paréntesis circular.





## AUTOEVALUACION DEL CAPITULO IV.

A partir de la relación de la siguiente parábola, encuentra lo siguiente:

$$R = \{(x,y) \mid x^2 = -16y\}$$

1.- Determine las coordenadas del vértice.

0) (0,4) 1) 4,0) 2) (0,0)
3) 2,2)

2.- Determine las coordenadas del foco.

0) (0,-4) 1) (-4,0) 2) (4,0)
3) (0,4)

3.- Encuentre la ecuación de la directriz.

0) $x = 4$ 1) $y = 4$ 2) $x = -4$
3) $y = 0$

4.- Identifique el eje de simetría:

0) Simétrica respecto a y = 4.
1) Simétrica respecto a eje X.
2) Simétrica respecto a eje Y.
3) Simétrica respecto a x = 4.

5.- Dé el dominio.

0) $(0;\ \infty)$ 1) $(0;0)$ 2) $(0;\ -\infty)$
3) $(-\infty;\ \infty)$

6.- Dé el recorrido.

0) $(-\infty;\ \infty)$ 1) $[\infty;\ 0)$ 2) $(\infty;\ 0]$
3) $(-\infty;\ 0]$

Encuentre las ecuaciones de las parábolas de vértice en el origen, que satisfacen la siguiente condición:

7.- Pasa por el punto (2,4) y tiene su foco en el eje X.

0) $y^2 = 4x$ 1) $x^2 = 8y$ 2) $y^2 = 8x$
3) $y^2 = 2x$

8.- Tiene como directriz la recta, $x - 3 = 0$.

0) $y^2 = -12x$ 1) $x^2 = -12y$ 2) $x^2 = -4y$
3) $y^2 = 12x$

9.- A partir de la definición de la parábola, encuentra la ecuación de la parábola de foco (0,-5) y directriz y=3.

0) $x^2+16y+16=0$ 1) $x^2 + 16 = 1$ 2) $y^2 + 16$
3) $y^2 + 16x + 16 = 0$

A partir de la siguiente relación, contesta lo siguiente:

$$R = \{(x,y) \mid y^2 < 4x \quad y \quad y > x-3\}$$

10.- Dé el dominio.

0) (0; 6) 1) (-1; 8) 2) (-2; 9)
3) (0; 9)

11.- Dé el recorrido.

0) (-1; 1) 1) (0; -1) 2) (-2; 6)
3) (-4; 8)



RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO IV.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- F(1,0); lado recto en (1,-2), (1,2); directriz x= -1.

2.- F(0, -5/2); lado recto en, (-5,-5/2),(5, -5/2), directriz y= 5/2

3.- F(-3/4, 0); lado recto en, (-3/4, -3/2), (-3/4, 3/2); directriz 4x = 3

4.- $y^2 = 12x$

5.- $y^2 = 24x$

6.- $x^2 = -12y$

7.- $3x^2 + 16y = 0$

8.- $y^2 = -x$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $(y-3)^2 = 16x$

2.- $(y-3)^2 = 16(x - 2)$

3.- $(y-3)^2 = -24 (x - 3)$

4.- $(x + 1)^2 = -12 (y + 2)$

5.- $(y-1)^2 = -12 (x - 2)$

6.- $y^2 = 8 ( x-1)$; V(1,0) F(3,0); (3,-4), (3,4)

7.- $y^2 = -12 (x-4)$; V(4,0) F(1,0); (1,-6), (1,6)

8.- $(x+2)^2 = 16y$; V(-2,0) F(-2,4); (-10,4), (6,4)

9.- $(y-4)^2 = -6x$; V(0,4), F(-3/2, 4); (-3/2, 1), (-3/2,7)

10.- $(y+2)^2 = -8(x-4)$; V(4,-2); F(2,-2); (2,-6), (2,2)

11.- $(x-4)^2 = -6(y-4)$ ; V(4,4) ; F(4, 5/2) ; (1,5/2) , (7, 5/2)

12.- $(y+7)^2 = 24(x+7)$ ; V(-7,-7) ; F(-1,-7) ; (-1,-19) , (-1,5)

13.- $x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

14.- $y^2 - x + 2y - 2 = 0$

15.- $5x^2 + 3x - 6y - 20 = 0$

AUTOEVALUACIÓN 3.

| | |
|---|---|
| 1.- mín (4,6) | 6.- mín (-2,3) |
| 2.- máx (-3,10) | 7.- máx (4,1) |
| 3.- mín (-1/2, 0) | 8.- mín (3,0) |
| 4.- máx (-3,18) | 9.- —— |
| 5.- mín (1/2, -19/4) | |

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO IV.

| | |
|---|---|
| 1.- (2) | 7.- (2) |
| 2.- (0) | 8.- (0) |
| 3.- (1) | 9.- (0) |
| 4.- (2) | 10.- (3) |
| 5.- (3) | 11.- (2) |
| 6.- (3) | |





4o. SEMESTRE. ÁREA II. UNIDAD XIII.

## LA ELIPSE.

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos tales que, la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos del mismo plano, es contante. Los puntos fijos se llaman focos, las rectas que unen a cualquier punto de la curva con los focos se denominan radio vectores. La recta horizontal que pasa por los focos y termina en la elipse se llama díametro mayor o eje focal; la recta perpendicular en el punto medio del eje focal se denomina díametro menor o eje no focal; la distancia entre los focos se llama - distancia focal. El punto de intersección de los ejes se llama centro de la elipse.

Para construir la elipse por trazo contínuo, se toma un cordón de longitud igual al eje focal, se fijan sus extremos en los focos y por medio de un lápiz se mantiene el cordón - tirante y se describe la curva.

La elipse es una sección cónica que se puede obtener - geométricamente, mediante el corte de un cono circular recto por un plano oblícuto que no sea paralelo a la generatriz.

René Descartes, pensó la forma de aplicar el álgebra a la geometría, y la geometría al álgebra y de esta manera inventó la útil rama de las matemáticas denominada Geometría Analítica; cuyo objeto es el de estudiar las propiedades relativas a los conjuntos de puntos, entre los cuales está la elipse aquí descrita.

Estudia esta unidad ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente el concepto, la elipse.