11.- $(x-4)^2 = -6(y-4)$; V(4,4); F(4, 5/2); (1,5/2), (7, 5/2)

12.- $(y+7)^2 = 24(x+7)$; V(-7,-7); F(-1,-7); (-1,-19), (-1,5)

13.- $x^2 + 2x - 2y - 3 = 0$

14.- $y^2 - x + 2y - 2 = 0$

15.- $5x^2 + 3x - 6y - 20 = 0$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- mín (4,6)

2.- máx (-3,10)

3.- mín (-1/2, 0)

4.- máx (-3,18)

5.- mín (1/2, -19/4)

6.- mín (-2,3)

7.- máx (4,1)

8.- mín (3,0)

9.- ——

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO IV.

1.- (2)

2.- (0)

3.- (1)

4.- (2)

5.- (3)

6.- (3)

7.- (2)

8.- (0)

9.- (0)

10.- (3)

11.- (2)

LA ELIPSE.

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos tales que, la suma de las distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos del mismo plano, es contante. Los puntos fijos se llaman focos, las rectas que unen a cualquier punto de la curva con los focos se denominan radio vectores. La recta horizontal que pasa por los focos y termina en la elipse se llama díametro mayor o eje focal; la recta perpendicular en el punto medio del eje focal se denomina diámetro menor o eje no focal; la distancia entre los focos se llama - distancia focal. El punto de intersección de los ejes se llama centro de la elipse.

Para construir la elipse por trazo contínuo, se toma un cordón de longitud igual al eje focal, se fijan sus extremos en los focos y por medio de un lápiz se mantiene el cordón - tirante y se describe la curva.

La elipse es una sección cónica que se puede obtener - geométricamente, mediante el corte de un cono circular recto por un plano oblículo que no sea paralelo a la generatriz.

René Descartes, pensó la forma de aplicar el álgebra a la geometría, y la geometría al álgebra y de esta manera inventó la útil rama de las matemáticas denominada Geometría Analítica; cuyo objeto es el de estudiar las propiedades relativas a los conjuntos de puntos, entre los cuales está la elipse aquí descrita.

Estudia esta unidad ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente el concepto, la elipse.

2.- Calcular correctamente los elementos de una elipse conocida su ecuación.

3.- Encontrar la ecuación de una elipse en los siguientes casos:

a) Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados.

b) Los ejes de simetría son paralelos a los ejes coordenados.

4.- Construir la gráfica de una relación definida por la expresión general:

$$S = \{(x,y) \mid \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1\}$$

y determinar correctamente el dominio y recorrido.

5.- Describir el lugar geométrico que representa cualquier ecuación que pertenezca a la fórmula general:

$$A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo V de tu libro "Geometría Analítica". Al igual que en la unidad anterior, te sugerimos que, primero leas todo el capítulo en una forma rápida, para que puedas observar lo que vas a contestar.

2.- En cada sección del capítulo se exponen ejemplos ilustrativos, para que observes el prcedimiento, para que, luego trates de resolver las autoevaluaciones que se incluyen a lo largo del capítulo. A continuación, se dan las secciones que se proponen para los objetivos:

OBJETIVO 1. Estudia todo el capítulo para que logres comprender mejor el concepto de elipse y luego estudia la sección 5-2 para que la definas.

OBJETIVO 2. Estudia la sección 5-2 del capítulo y luego resuelve los primeros 5 problemas de la autoevaluación 2.

OBJETIVO 3. Estudia las secciones 5-3 y 5-4 del capítulo y resuelve las autoevalaciones 1 y 2.

OBJETIVO 4. Estudia los ejemplos que vienen en el capítulo para que construyas sus gráficas y luego trates de encontrar su dominio y recorrido. Para ello, te sugerimos que encuentres las coordenadas de los puntos extremos de los diámetros mayor y menor.

OBJETIVO 5. Estudia la sección 5-5 del capítulo y resuelve la autoevaluación 3. Para una mejor comprensión de este objetivo, te sugerimos que, después de que escribas la ecuación de la elipse en la forma:

$$A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M,$$

puedes hacer las siguientes observaciones:

a) *Si*, $M = 0$. La gráfica es un solo punto; o sea:

$$(-D/2A, \quad -E/2C)$$

b) *Si*, $M > 0$. La gráfica es la ecuación de la elipse que puede escribirse como:

$$\frac{(x + D/2A)^2}{M/A} + \frac{(y + E/2C)^2}{M/C} = 1$$

c) *Si*, $M < 0$. La gráfica es el conjunto vacío, puesto que no pueden existir ejes negativos, o bien, al obtener la raíz cuadrada en la ecuación, siendo M negativo, obtendríamos un número imaginario.

3.- Por último, una vez que te sientas seguro de tus objetivos, resuelve tu autoevaluación, para que así compruebes tu aprendizaje logrado. Todas tus dudas, consúltalas con tu maestro asesor.

CAPITULO 5.

LA ELIPSE.

5-1 INTRODUCCIÓN.

Recordemos que la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que se encuentran a una distancia dada de un punto fijo. Consideremos ahora un lugar geométrico asociado con las distancias a dos puntos fijos.

La elipse es el lugar geométrico de todos los puntos para los cuales la suma de sus distancias a dos puntos fijos es una constante.

Los puntos fijos se llaman focos de la elipse.

Puede obtenerse una construcción mecánica sencilla de una elipse con la ayuda de dos chinches y un trozo de cuerda (ver fig. 1). Colóquense dos chinches en una mesa de dibujo en los puntos F_1 y F_2. Estos puntos serán los focos de la elipse. A continuación tómese un trozo de cuerda cuya longitud sea mayor que la distancia $F_1 F_2$. Fíjense los extremos de la cuerda a las chinches. Colóquese un lápiz en el $F_1P F_2$ y muévase manteniendo la cuerda tirante. Entonces $F_1P + F_2P$ es constante

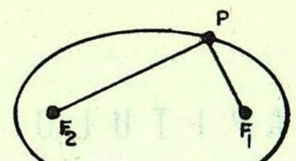

Fig. 1.

y la curva trazada será un elipse. Nuevamente, el estudiante debe descubrir las diversas formas de la elipse cuando F_1F_2 se mantiene fija y se hace variar la longitud de la cuerda.

La elipse puede construirse con regla y compás, pero en esta discusión estamos principalmente interesados en las propiedades y aplicaciones de la curva.

Frecuentemente se usa la elipse para lograr efectos artísticos. A menudo se ven formas elípticas en los jardines, paseos, albercas y en loza y muebles. En la construcción se usa el arco elíptico donde se desea lograr la belleza y los requeri-

mientos de resistencia no son críticos. El arco elíptico se considera más bello que el arco parabólico.

En las máquinas se usan engranes elípticos donde se requiere un avance lento y un retorno rápido.

Los astrónomos han demostrado que las órbitas de los planetas son elipses con el Sol en uno de los focos. Nuestra Tierra, por ejemplo, en su viaje anual alrededor del Sol recorre una trayectoria elíptica con el Sol en uno de los focos. Por lo tanto, en las diferentes estaciones del año, la distancia del Sol a la Tierra variará.

De modo semejante, la trayectoria de la Luna respecto a la Tierra es una elipse con la Tierra en uno de los focos. Las órbitas de los satélites de otros planetas también son elípticas. En la astronomía es esencial el conocimiento de las trayectorias (lugares geométricos) a lo largo de las cuales se mueven estos planetas y sus satélites. Los astrónomos pueden expresar estos movimientos mediante ecuaciones y, a partir de estas ecuaciones, predecir con un alto grado de exactitud cosas como los eclipses lunares y solares.

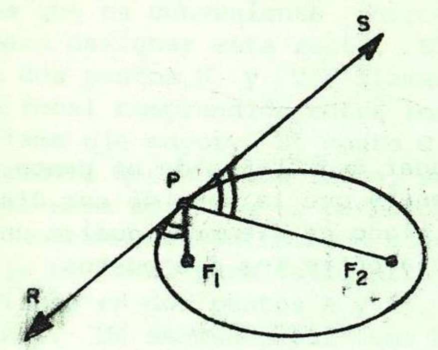

Fig. 2.

La elipse, como la parábola, tiene una propiedad geométrica que la hace útil para reflejar la luz y el sonido (ver fig. 2).

Dos rectas trazadas desde los focos F_1 y F_2 hacia cualquier punto P sobre la elipse formarán ángulos congruentes con $\angle RPF_1 \cong \angle SPF_2$. Debido a esta propiedad geométrica y a la propiedad de las superficies reflectoras mencionada en la discusión de los reflectores parabólicos, si se coloca una fuente de luz en cualquiera de los focos de una superficie elíptica, los rayos incidentes sobre de la superficie se reflejarán hacia el otro foco. En realidad, cuando se usan reflectores elípticos, la superficie reflectora es la que se obtiene al hacer girar la elipse alrededor de la recta F_1F_2. Esta superficie se denomina elipsoide de revolución.

Las ondas sonoras se reflejan en la misma forma que las ondas luminosas. Por lo tanto, si al techo de un cuarto se le da la forma de un semielipsoide, un sonido débil que se produjera en uno de los focos se escucharía con claridad en el otro foco que puede estar a una distancia considerable. Generalmente el sonido no se escucha en los otros puntos. Locales construidos de esa manera se conocen como galerías de los murmullos.

5-2 LA ELIPSE.

Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos.

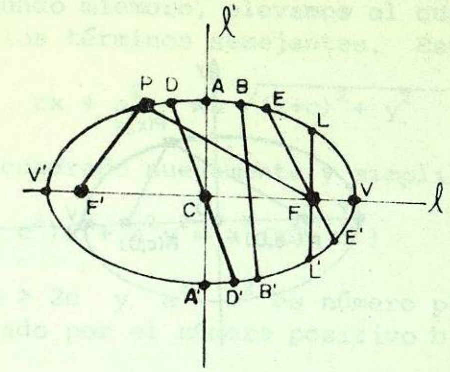

Fig. 3.

Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse. La definición de una elipse excluye el caso en que el punto móvil esté sobre el segmento que une los focos.

Designemos por F y F' (fig. 3) los focos de una elipse. La recta l que pasa por los focos tienen varios nombres; veremos que es conveniente introducir el término de eje focal para designar esta recta. El eje focal corta a la elipse en dos puntos V y V', llamados vértices. La porción del eje focal comprendida entre los vértices, el segmento VV', se llama eje mayor. El punto C del eje focal, punto medio del segmento que une los focos, se llama centro. La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal l, tiene varios nombres; encontraremos conveniente introducir el término eje no focal para designarla. El eje no focal l' corta a la elipse en dos puntos A y A', y el segmento AA' se llama eje menor. Un segmento tal como BB', que une dos puntos diferentes cualesquiera de la elipse, se llama cuerda. En particular, una cuerda que pasa por uno de los focos, tal como EE', se llama cuerda focal. Una cuerda focal tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama lado recto. Evidentemente como la elipse tiene dos focos, tiene también dos lados rectos.

5-3 ECUACIÓN DE LA ELIPSE CON CENTRO EN EL ORIGEN Y EJES D SIMETRÍA SUPERPUESTOS A LOS EJES COORDENADOS.

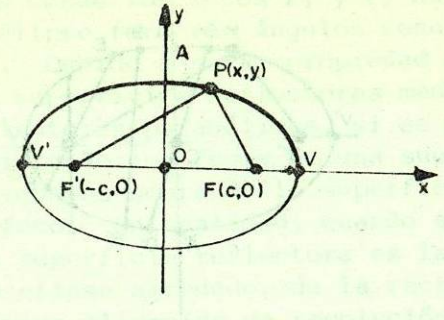

Fig. 4.

Consideremos la elipse de centro en el origen y cuyo e focal coincide con el eje X (fig. 4) Los focos F y F' est sobre el eje X. Como el centro O es el punto medio del se mento FF', las coordenadas de F y F' serán, por ejemplo, (c,o) y (-c, o), respectivamente, siendo c una constante p sitiva. Sea P(x,y) un punto cualquiera de la elipse. Por definición de la curva, el punto P debe satisfacer la condi ción geométrica,

$$|\overline{FP}| + |\overline{F'P}| = 2a \qquad (1)$$

en donde "a" es una constante positiva mayor que"c".

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos tenem

$$|\overline{FP}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$|\overline{F'P}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada an líticamente por la ecuación:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (2)$$

Para simplificar la ecuación (2), pasamos el segundo radical al segundo miembro, elevamos al cuadrado, simplificamos y agrupamos los términos semejantes. Esto nos da,

$$cx + a^2 = a\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

elevando al cuadrado nuevamente y simplificando obtenemos:

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad (3)$$

Como $2a > 2c$ y $a^2 - c^2$ es número positivo que puede ser reemplazado por el número positivo b^2, es decir,

$$b^2 = a^2 - c^2 \qquad (4)$$

si en (3) reemplazamos $a^2 - c^2$ por b^2, obtenemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

y dividiendo por a^2b^2, se obtiene finalmente

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (5)$$

Por tanto, el punto P está sobre la elipse cuya ecuación está dada por (5).

Por ser "a" y "-a" las intersecciones con el eje X, las coordenadas de los vértices V y V' son (a,o) y (-a,o), res-- pectivamente, y la longitud del eje mayor es igual a 2a, la constante que se menciona en la definición de la elipse. Las intersecciones con el eje Y son "b" y "-b". Por tanto, las coordenadas A y A' del eje menor son (o,b) y (o,-b), respectiva-- mente y la longitud del eje menor es igual a 2b.

Por la ecuación (5) vemos que la elipse es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y al origen.

Si de la ecuación (5) despejamos"y", obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \qquad (6)$$

Por tanto, se obtienen valores reales de "y" solo para valores de x en el intervalo,

$$-a \leq x \leq a$$

Si de la ecuación (5) despejamos x, obtenemos:

$$x = \pm \frac{b}{a} \sqrt{b^2 - y^2}$$

de manera que se obtienen valores reales de x, solo para valores de "y" dentro del intervalo,

$$-b \leq y \leq b$$

de aquí se deduce que la elipse está limitada por el rectángulo cuyos lados son las rectas $x = \pm a$, $y = \pm b$. Por tanto, la elipse es una curva cerrada.

La abscisa del foco F es c. Si en (6) sustituímos x por este valor, se obtienen las ordenadas correspondientes que son:

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - c^2}$$

de donde, por la relación (4),

$$y = \pm \frac{b^2}{a}$$

por tanto, la longitud del lado recto para el foco F es $\frac{2b^2}{a}$.

Análogamente, la longitud del lado recto para el foco F' es $2b^2/a$.

Consideremos ahora el caso en que el centro de la elipse está en el origen, pero su eje focal coincide con el eje Y. Las coordenadas de los focos son entonces (o,c) y (o,-c). En este caso por el mismo porcedimiento empleado para deducir la ecuación (5), hallamos que la ecuación de la elipse es,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \qquad (7)$$

en donde "a" es la longitud del semieje mayor, "b" la longitud del semieje menor, y $a^2 = b^2 + c^2$.

Las ecuaciones (5) y (7) se llaman, generalmente, primera ecuación ordinaria de la elipse y son las ecuaciones más simples.

Los resultados anteriores se pueden resumir en el siguiente,

TEOREMA 1.

La ecuación de una elipse de centro en el origen, eje focal el eje X, distancia focal igual a 2c y cantidad constante igual a 2a es:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal de la elipse coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (o,c) y (o,-c), la ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, "a" es la longitud del semieje mayor, "b" la del semieje menor y, a,b,c están ligados por la relación,

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También para cada elipse, la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$.