NOTA.

Si reducimos la ecuación de una elipse a su forma ordi naria, podemos determinar fácilmente su posición relativa a los ejes coordenados comparando los denominadores de los tér minos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la va riable correspondiente al eje coordenado con el cual coinci el eje mayor de la elipse.

EJEMPLO 1.

Una elipse tiene su centro en el origen y su eje mayor coincide con el eje Y. Si uno de los focos es el punto (o,3) y el semieje focal es 6, hallar las coordenadas del otro foc las longitudes de los ejes mayor y menor, la ecuación de la elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos y el dom nio y el recorrido de la relación representada por la ecua- ción.

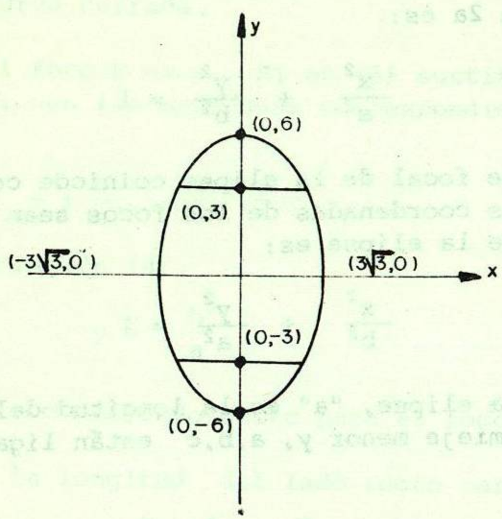

Fig. 5.

SOLUCIÓN:

Como uno de los focos es el punto (o,3), tenemos c=3, y las coordenadas del otro foco son (o,-3). Como el semieje focal es 6, a=6. Tenemos también:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$$= \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

Por tanto, las longitudes de los ejes mayor y menor son, $2a = 12$ y $2b = 6\sqrt{3}$, respectivamente.

Por el teorema 1, la ecuación de la elipse es,

$$\frac{x^2}{27} + \frac{y^2}{36} = 1$$

la longitud de cada lado recto es, $\frac{2b^2}{a} = \frac{2(27)}{6} = 9$

El lugar geométrico es representado en la fig. 5 y evidentemente el dominio y el recorrido son respectivamente, $[-3\sqrt{3}\,;\, 3\sqrt{3}]$ y $[-6;\, 6]$

EJEMPLO 2.

Construya la gráfica de la elipse, $16x^2 + 25y^2 = 400$ y dé el dominio y el recorrido de la relación, $R = \{(x,y) \mid 16x^2 + 25y^2 = 400\}$.

SOLUCIÓN:

Dividiendo ambos miembros de la ecuación dada entre 400, se obtiene la ecuación equivalente,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

y como 25 > 16, esta ecuación es de la forma,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a^2 = 25$ y $b^2 = 16$, por lo que la gráfica de la ecuación dada es una elipse con centro en el origen y con sus focos sobre el eje X.

Para esta elipse, $a=5$ y $b=4$, por lo que $c^2 = a^2 - b^2 = 25-16 = 9$ y $c=3$; entonces los vértices son, $V_1\ (5,o)$ y $V_2\ (-5,o)$; los extremos del eje menor están en $B_1(o,4)$ y $B_2(o,-4)$ y los focos son, $F_1(3,o)$ y $F_2\ (-3,o)$. Además,

$$|R_1L_1| = |R_2L_2| = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(16)}{5} = \frac{32}{5}$$

de modo que los extremos de los lados rectos son, $R_1\ (3,-16/5)$, $L_1(3,\ 16/5)$, $R_2(-3,-16/5)$, $L_2(-3,16/5)$. El lugar geométrico se encuentra en la fig. 6.

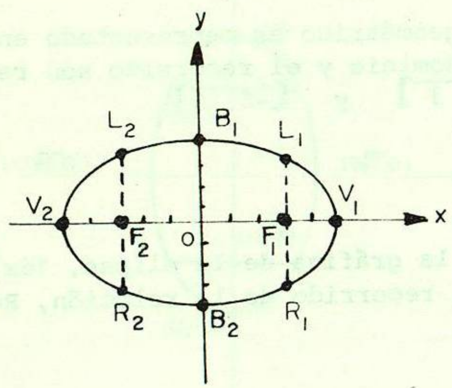

Fig. 6.

Es evidente que el dominio y el recorrido de la relación representada por la ecuación son respectivamente:

$$\text{Dominio} = [-5;\ 5]$$

$$\text{Recorrido} = [-4;\ 4]$$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Halle las coordenadas de los focos, los extremos de los ejes y los extremos de cada lado recto en los problemas siguientes. A partir de esta información bosqueje las curvas y establezca su dominio y recorrido.

1.- $\dfrac{x^2}{169} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

2.- $\dfrac{y^2}{25} + \dfrac{x^2}{16} = 1$

3.- $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

4.- $x^2 + 4y^2 = 9$

5.- $2x^2 + 3y^2 = 12$

Escriba las ecuaciones de las elipses cuyos ejes coinciden con los ejes coordenados, y que satisfacen las condiciones dadas en los siguientes problemas.

6.- Foco $(2,o)$; vértice $(5,o)$.

7.- Eje menor 12; vértice $(9,o)$.

8.- Extremo del eje menor $(5,o)$; longitud del lado recto $50/13$.

9.- Pasando a través de $(3,\sqrt{2})$ y $(\sqrt{6},\ 2)$.

5-4 ECUACIÓN DE LA ELIPSE DE CENTRO (h,k) Y EJES PARALELOS A LOS COORDENADOS.

Ahora consideraremos la determinación de la ecuación de una elipse cuyo centro no está en el origen y cuyos ejes son paralelos a los ejes coordenados. Según esto, consideremos la elipse cuyo centro está en el punto (h,k) y cuyo eje focal es paralelo al eje X, tal como se indica en la fig. 7.

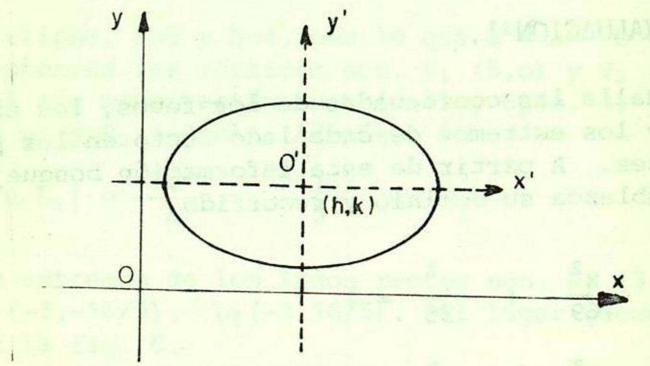

Fig. 7.

Sean 2a y 2b las longitudes de los ejes mayor y menor de la elipse, respectivamente. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen o' coincida con el centro (h,k) de la elipse, se sigue, del Teorema 1 que la ecuación de la elipse con referencia a los nuevos ejes X' y Y' está dada por:

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

De la ecuación (8) puede deducirse la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y usando las ecuaciones de transformación siguientes:

$$x = x' + h; \qquad y = y' + k$$

$$x' = x - h; \qquad y = y - k$$

si sustituimos estos valores de x' y y' en la ecuación (8) obtenemos:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \qquad (9)$$

que es la ecuación de la elipse referida a los ejes originales X y Y.

Análogamente, podemos demostrar que la elipse cuyo centro es el punto (h,k) y cuyo eje focal es paralelo al eje Y tiene por ecuación:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \qquad (10)$$

Las ecuaciones (9) y (10) se llaman, generalmente, la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Los resultados precedentes, junto con el Teorema 1, nos dan el siguiente:

TEOREMA 2.

La ecuación de la elipse de centro el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, está dada por la segunda forma ordinaria:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación está dada por la segunda forma ordinaria.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

Para cada elipse, "a" es la longitud del semieje mayor, "b" es la del semieje menor, "c" es la distancia del centro a cada foco, y a,b y c están ligadas por la relación:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

También, para cada elipse, la longitud de cada uno de sus lados rectos es $2b^2/a$.

EJEMPLO 1 .

Los vértices de una elipse tienen por coordenadas $(-3,7)$ y $(-3,-1)$ y la longitud de cada lado recto es 2. Hallar la ecuación de la elipse, las longitudes de sus ejes mayor y menor, las coordenadas de sus focos, y el dominio y el recorrido de la relación.

SOLUCIÓN:

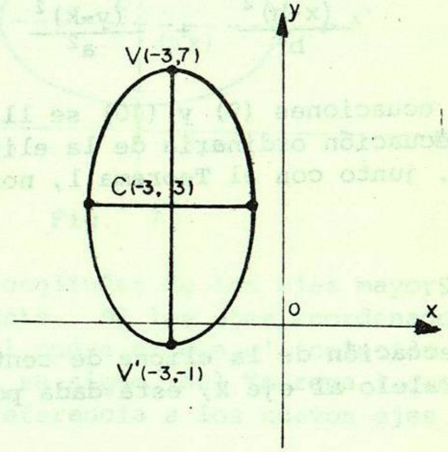

Fig. 8.

Como los vértices V y V' están sobre el eje focal y sus abscisas son ambas -3, se sigue (fig. 8) que el eje focal es paralelo al eje Y. Por tanto, por el Teorema 2, la ecuación de la elipse es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

El centro C es el punto medio del eje mayor VV', y sus coordenadas son, por lo tanto $(-3,3)$. La longitud del eje mayor VV' es 8, como se puede ver fácilmente.

Por tanto, $2a=8$ y $a=4$. La longitud del lado recto es $2b^2/a = 2$. Como $a=4$, se sigue que $2b^2 = 8$, de donde $b=2$, y la longitud del eje menor es 4. Luego, la ecuación de la elipse es:

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$$

También, $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12$, de donde $c = 2\sqrt{3}$. Por tanto, las coordenadas de los focos son:

$$F\ (-3,\ 3 + 2\sqrt{3}) \quad y$$

$$F'(-3,\ 3\ \ -2\sqrt{3})$$

El lugar geométrico de esta elipse es el representado en la fig. 8 y se puede observar claramente que el dominio y el recorrido son respectivamente:

$$\text{Dominio} = [-5;\ -1]$$

$$\text{Recorrido} = [-1;\ 7]$$

EJEMPLO 2.

Halle la ecuación de la elipse con centro en $C(-1,2)$, con un vértice en $V_1(-1,5)$ y con un foco en $F_1(-1,\ 2 + \sqrt{5})$.

SOLUCIÓN:

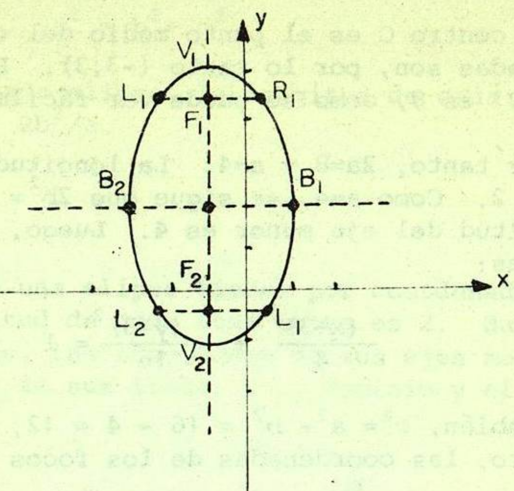

Fig. 9.

De los datos: $c = |CF_1| = \sqrt{5}$ y $a = |CV_1| = 3$; usando $b^2 = a^2 - c^2$, se encuentra, $b^2 = 9 - 5 = 4$, de modo que $b = 2$; como el eje mayor es vertical, el teorema 2 permite afirmar que la elipse es la gráfica de:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$$

El otro vértice está en V (-1,-1) y el otro foco es F $(-1,\ 2 - \sqrt{5})$; los extremos del eje menor son $B_1(1,2)$ y B_2 (-3, 2); la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$, igual a 8/ en este caso, por lo que los puntos extremos de los lados re tos son $R_1(1/3,\ 2 + \sqrt{5})$, $L_1(-7/3,\ 2 + \sqrt{5})$, $R_2(1/3,\ 2 - \sqrt{5})$ y L_2 $(-7/3,\ 2 - \sqrt{5})$.

El lugar geométrico de esta elipse se muestra en la fig. 9 de donde se ve fácilmente que el dominio y el recorrido so respectivamente:

$$\text{Dominio} = [-3;\ 1]$$

$$\text{Recorrido} = [-1;\ 5]$$

EJEMPLO 3.

A partir de la siguiente ecuación de una elipse, encuentre, el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje menor, las longitudes de los ejes mayor y menor así como la del lado recto, las coordenadas de los extremos de ambos la-- dos rectos y, finalmente, construya la curva y dé el dominio y su recorrido.

Ecuación: $$\frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1$$

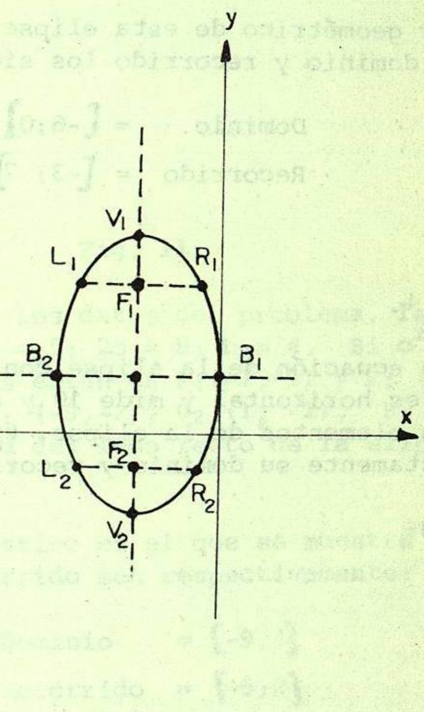

Fig. 10.

Como 25 > 9, esta ecuación es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$$

en la que $a^2 = 25$ y $b^2 = 9$; en consecuencia, la gráfica de la ecuación dada es una elipse de eje mayor vertical con centro en C(-3,2). Como a = 5, b = 3 y $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $c = \sqrt{16} = 4$, los vértices son $V_1(-3,7)$ y $V_2(-3,-3)$, los extremos del eje menor están en B_1 (o,2) y B_2 (-6,2) y los focos en F_1 (-3,6) y F_2 (-3,-2), la longitud $|RL|$ de un lado recto está dada por

$$|RL| = \frac{2b^2}{a} = \frac{2(9)}{5} = \frac{18}{5}$$

de modo que los extremos de los lados rectos son (fig.10): R_1 (-6/5, 6), L_1 (-24/5, 6), R_2 (-6/5, -2) y L_2 (-24/5, -2).

El lugar geométrico de esta elipse se muestra en la fig. 10 siendo su dominio y recorrido los siguientes:

Dominio = [-6;0]

Recorrido = [-3; 7]

EJEMPLO 4.

Halle la ecuación de la elipse con centro en (-4,-2) si su eje mayor es horizontal y mide 10 y el eje menor mide 8. Encuentre los elementos de la elipse, trace la curva y establezca correctamente su dominio y recorrido.

SOLUCIÓN:

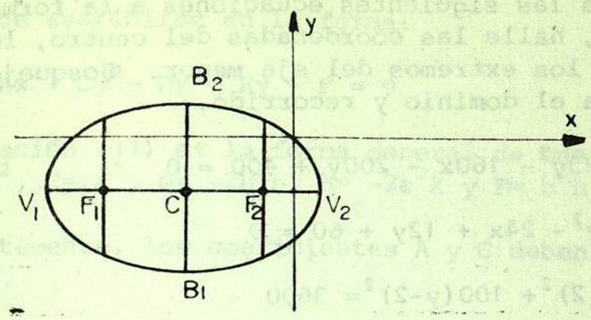

Fig. 11.

De acuerdo con los datos del problema, la elipse es horizontal y 2a = 10; a = 5; 2b = 8; b = 4. Si $c^2 = a^2 - b^2$, c=3. Por tanto, los focos están en F_1(-7,-2) y F_2 (-1,-2) y los vértices están en V_1 (-9,-2), V_2 (1, -2), B_1 (-4,-6), B_2 (-4,2). La longitud del lado recto de la elipse es $2b^2/a$ = 32/5.

El lugar geométrico es el que se muestra en la fig. 11 cuyo dominio y recorrido son respectivamente:

Dominio = [-9;1]

Recorrido = [-6;2]

AUTOEVALUACION 2.

Reduzca las siguientes ecuaciones a la forma ordinaria. En cada una, halle las coordenadas del centro, los vértices, los focos y los extremos del eje menor. Bosqueje cada curva y establezca el dominio y recorrido.

1.- $16x^2 + 25y^2 - 160x - 200y + 400 = 0$

2.- $3x^2 + 2y^2 - 24x + 12y + 60 = 0$

3.- $36(x + 2)^2 + 100(y-2)^2 = 3600$

4.- $225(x+2)^2 + 289(y+3)^2 = 65025$

Escriba la ecuación de la elipse que satisface las condiciones en cada problema. Bosqueje la curva.

5.- Centro (5,1), vértice (5,4), extremo del eje menor (3,1).

6.- Extremos del eje menor (-1,2) y (-1,-4), foco (1,-1).

7.- Un punto se mueve de modo que la suma de sus distancias desde (-4,3) y (4,3) es 12. Halle la ecuación de su trayectoria.

5-5 LUGAR GEOMETRICO DE LA RELACION DE UNA ELIPSE CUYA ECUACION PERTENECE A LA FORMA GENERAL: $A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$.

Consideremos ahora la ecuación de la elipse en la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \tag{9}$$

Si quitamos denominadores, desarrollamos, trasponemos y ordenamos términos, obtenemos:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2hx - 2a^2ky + b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2 = 0$$

la cual puede escribirse en la forma:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \tag{11}$$

La ecuación (11) es la forma general de una elipse en donde, $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$ y $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$.

Evidentemente, los coeficientes A y C deben de ser del mismo signo.

Recíprocamente, consideremos una ecuación de la forma (11) y reduzcámosla a la forma ordinaria (9) completando cuadrados. Obtenemos:

$$A\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2 + C\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = M \tag{12}$$

donde,

$$M = \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} - F$$

entonces:

a) Si $M = 0$, la gráfica es un solo punto, $(-D/2A, -E/2C)$ llamado usualmente una elipse punto.

b) Si $M > 0$, la ecuación (12) puede escribirse,

$$\frac{(x + D/2A)^2}{M/A} + \frac{(y + E/2C)^2}{M/C} = 1 \tag{13}$$

que es la ecuación de una elipse con centro en $(-D/2A, -E/2C)$; el eje mayor es horizontal o vertical según que M/A sea mayor que M/C o viceversa.

c) Si $M < 0$, la gráfica no representa ningún lugar geométrico real y por lo tanto es el conjunto vacío.