Una discusión semejante se aplica a la otra forma de la segunda ecuación ordinaria de la elipse. Por tanto, tenemos el siguiente:

TEOREMA 3.

Si los coeficientes A y C son del mismo signo, la relación,

$$\{(x,y) \mid Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\}$$

representa una elipse de ejes paralelos a los coordenados, o bien un punto, o no representa ningún l gar geométrico real.

EJEMPLO 1.

La relación de una elipse es:

$$\{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0\}$$

Reducir esta ecuación a la forma ordinaria y determinar las coordenadas del centro, de los vértices y de los focos; calcular las longitudes del eje mayor, del eje menor, de cada lado recto, mostrar el lugar geométrico en un diagrama y especificar el dominio y el recorrido.

SOLUCIÓN:

Vamos a reducir la ecuación dada a la forma ordinaria, completando los cuadrados. Resulta:

$$(x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6$$

y $\quad (x^2+2x+1) + 4(y^2-3y+9/4) = -6 + 1 + 9$

de donde, $\quad (x+1)^2 + 4(y - 3/2)^2 = 4$

de manera que la forma ordinaria es:

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-3/2)^2}{1} = 1$$

Las coordenadas del centro C son, evidentemente, $(-1, 3/2)$, y el eje focal es paralelo al eje X. Como $a^2 = 4$, $a=2$ y las coordenadas de los vértices V y V' son: $(1,3/2)$ y $(-3, 3/2)$, respectivamente. Como $c^2 = a^2 - b^2$, resulta, $c = \sqrt{4-1}$

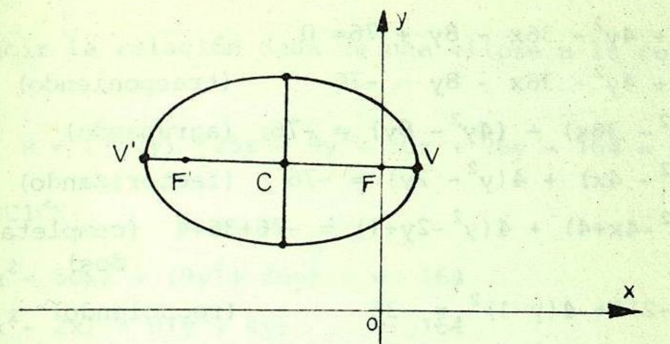

Fig. 12.

$= \sqrt{3}$, y las coordenadas de los focos F y F' son, $(-1 + \sqrt{3}, 3/2)$ y $(-1 - \sqrt{3}, 3/2)$, respectivamente. La longitud del eje mayor es $2a=4$, la del eje menor es $2b=2$, y la longitud de cada lado recto es, $2b^2/a = (2)(1)/(2) = 1$. El lugar geométrico es el que se muestra en la fig. 12 cuyo dominio y recorrido son respectivamente:

Dominio $= [-3;\ 1]$

Recorrido $= [1/2; 5/2]$

EJEMPLO 2.

Determine si la gráfica de la siguiente relación es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

$$R = \{(x,y) \mid 9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Para reducir la ecuación dada a la forma ordinaria se siguen los siguientes pasos:

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$$

$$9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y = -76 \quad \text{(trasponiendo)}$$

$$(9x^2 - 36x) + (4y^2 - 8y) = -76 \quad \text{(agrupando)}$$

$$9(x^2 - 4x) + 4(y^2 - 2y) = -76 \quad \text{(factorizando)}$$

$$9(x^2 - 4x + 4) + 4(y^2 - 2y + 1) = -76 + 36 + 4 \quad \text{(completando cuadrados)}$$

$$9(x-2)^2 + 4(y-1)^2 = -36 \quad \text{(reduciendo)}$$

de aquí se ve que $M < 0$, por lo que la gráfica de la relación dada no tiene lugar geométrico real, o sea es el conjunto vacío.

EJEMPLO 3.

Determine si la gráfica de la siguiente relación, es una elipse , un punto o el conjunto vacío.

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 5 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Para reducir la ecuación dada a la forma ordinaria se siguen los siguientes pasos:

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y + 5 = 0$$

$$x^2 + 4y^2 - 2x - 8y = -5$$

$$(x^2 - 2x) + (4y^2 - 8y) = -5$$

$$(x^2 - 2x) + 4(y^2 - 2y) = -5$$

$$(x^2 - 2x + 1) + 4(y^2 - 2y + 1) = -5 + 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + 4(y-1)^2 = 0$$

Es fácil ver que $M = 0$ y que la gráfica de esta relación es el punto $(1,1)$.

EJEMPLO 4.

Reducir la relación dada de una elipse a la forma ordinaria.

$$R = \{(x,y) \mid 25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

$$(25x^2 - 50x) + (9y^2 + 36y) = 164$$

$$25(x^2 - 2x) + 9(y^2 + 4y) = 164$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 164 + 25 + 36$$

$$25(x^2 - 1) + 9(y^2 + 2) = 225$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

Centro en $(1,-2)$, vértices $(1,3)$ y $(1,-7)$; focos en $(1,2)$ y $(1,-6)$.

AUTOEVALUACION 3.

En cada uno de los ejercicios siguientes determine si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o el conjunto vacío; si la gráfica es una elipse, dé el centro, los focos, los vértices, los extremos del eje menor y la longitud y extremos de los lados rectos y finalmente, construya la curva y de el dominio y recorrido.

1.- $4x^2 + 9y^2 - 8x + 18y + 12 = 0$

2.- $9x^2 + 25y^2 + 18x - 50y - 191 = 0$

3.- $x^2 + 2y^2 - 10x + 12y + 43 = 0$

4.- $4x^2 + 3y^2 + 16x - 6y + 31 = 0$

5-6 EXCENTRICIDAD DE UNA ELIPSE.

Un elemento importante de una elipse es su excentricidad que se define como la razón c/a y se representa usualmente por la letra e.

$$e = c/a$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

Como $c < a$, la excentricidad de una elipse es menor que la unidad.

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPITULO V.

A partir de la relación dada de una elipse, encuentra lo siguiente:

$$R = \{(x,y) \mid 9x + 25y = 225\}$$

1.- Las coordenadas del centro.

0) (5,3) 1) (0,0) 2) (1,1)
3) (25,9)

2.- Las coordenadas de los vértices.

0) (0,5) y (0,-5) 1) (0,3) y (0,-3)
2) (5,0) y (-5,0) 3) (3,0) y (-3, 0)

3.- Los focos.

0) (0,3) y (0,-3) 1) (3,0) y (-3,0)
2) (4,0) y (-4,0) 3) (0,4) y (0,-4)

4.- Los puntos extremos del eje menor.

0) (0,3) y (0,-3) 1) (4,0) y (-4,0)
2) (3,0) y (-3,0) 3) (0,4) y (0,-4)

5.- La longitud de los lados rectos.

0) 18/25 1) 18/5 2) 5/18
3) 25/18

6.- El dominio.

0) [-3;3] 1) [-5;5] 2) (-5;0)
3) (0;5)

7.- El recorrido.

0) $[-5;\ 5]$ 1) $(0,3)$ 2) $(0,-3)$
3) $[-3;\ 3]$

8.- Construya la curva.

Los vértices de una elipse son los puntos (1,-6) y (9, -6) y la longitud de cada lado recto es 9/2. Hallar:

9.- La ecuación de la elipse.

0) $\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{25} = 1$ 1) $\frac{(x+4)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{36} = 1$

2) $\frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y+6)^2}{9} = 1$ 3) $\frac{(x-3)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{9} = 1$

10.- La excentricidad.

0) $\sqrt{5}/2$ 1) $7/4$ 2) $\sqrt{7}/2$
3) $\sqrt{7}/4$

11.- Las coordenadas de sus focos.

0) $(5-\sqrt{7},\ -6)$ y $(5+\sqrt{7},\ -6)$
1) $(2+\sqrt{7},\ 1)$ y $(2-\sqrt{7},\ 1)$
2) $(5,\ -3)$ y $(8,\ -3)$
3) $(\sqrt{7},\ -6)$ y $(-\sqrt{7}\ ,\ -6)$

12.- Encuentra la ecuación de la elipse con centro en el origen, que satisface la siguiente condición:
El eje menor mide 12 y uno de los focos está en (8,0).

0) $x^2+y^2=10$ 1) $6x^2+10y^2=100$ 2) $36x^2+100y^2=3600$
3) $36x^2+100y^2=36$

A partir de la siguiente relación, encuentra lo siguiente:

$$R = \{(x,y) \mid 36x^2+27y^2=972\}$$

13.- El dominio.

0) $[-3\sqrt{3};\ 3\sqrt{3}]$ 1) $(-6;6)$
2) $[-6\sqrt{3};\ 6\sqrt{3}]$ 3) $(6,0)$

14.- El recorrido.

0) $[6;0]$ 1) $[0;6]$ 2) $[6;\ 0]$
3) $[-6;6]$

En cada uno de los siguientes problemas determine si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o el conjunto vacío.

15.- $4x^2+9y^2-8x+18y+12=0$

0) $(1,-1)$ 1) $4(x-1)^2+9(y+1)^2=1$
2) Conjunto vacío.

16.- $x^2+2y^2-10x+12y+43=0$

0) Conjunto vacío. 1) $(x-5)^2+2(y+3)^2=1$
2) $(5,-3)$

17.- $4x^2 + y^2 - 8x + 4y + 22 = 0$

0) Conjunto vacío. 1) $4(x-1)^2 + (y+2)^2 = 14$

2) $(1,-2)$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DEL CAPÍTULO V.

AUTOEVALUACIÓN 1.

1.- $F(\pm 12,0)$, $V(\pm 13,0)$, $B(0,\pm 5)$; $(12,\pm 25/13)$, $(-12,\pm 25/13)$

2.- $F(0,\pm 3)$, $V(0,\pm 5)$, $B(\pm 4,0)$; $(\pm 16/5, -3)$, $(\pm 16/5, 3)$

3.- $F(\pm\sqrt{5}, 0)$, $V(\pm 3,0)$, $B(0,\pm 2)$; $(-\sqrt{5}, \pm 4/3)$, $(\sqrt{5}, \pm 4/3)$

4.- $F\left(\pm \frac{3\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, $V(\pm 3,0)$, $B(0,\pm 3/2)$; $\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}, \pm 3/4\right)$, $\left(-\frac{3\sqrt{3}}{2}, \pm 3/4\right)$

5.- $F(\pm\sqrt{2}, 0)$, $V(\pm\sqrt{6},0)$, $B(0,\pm 2)$; $(\sqrt{2}, \pm 2/3\sqrt{6})$, $(-\sqrt{2}, \pm 2/3\sqrt{6})$

6.- $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$

7.- $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

8.- $\frac{y^2}{169} + \frac{x^2}{25} = 1$

9.- $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$

AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{(y-4)^2}{16} = 1$ $C(5,4)$; $V'(0,4)$, $V(10,4)$; $F'(2,4)$, $F(8,4)$, $B'(5,0)$, $B(5,8)$

2.- $\dfrac{(y+3)^2}{3} + \dfrac{(x-4)^2}{2} = 1$ C(4,-3), L'(4, -3 - $\sqrt{3}$)

V'(4,-3+ $\sqrt{3}$); F'(4,-4), F(4,-2); B'(4- $\sqrt{2}$,-3), B(4+ $\sqrt{2}$,
-3)

3.- $\dfrac{(x+2)^2}{100} + \dfrac{(y-2)^2}{36} = 1$ C(-2,2), V'(-12,2), V(8,2)

F'(-10,2), F(6,2); B'(-2,-4), B(-2,8)

4.- $\dfrac{(x+2)^2}{289} + \dfrac{(y+3)^2}{225} = 1$ C(-2,-3); V'(-19,-3), V(15,
-3); F'(-10,-3), F(6,-3); B'(-2,-13), B(-2,12)

5.- $\dfrac{(x-5)^2}{4} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$

6.- $\dfrac{(x+1)^2}{13} + \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

7.- $\dfrac{x^2}{36} + \dfrac{(y-3)^2}{20} = 1$

AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Elipse: $\dfrac{(x-1)^2}{1/4} + \dfrac{(y+1)^2}{1/9} = 1$; centro (1,-1)

Vértices: $V_1(1/2,-1)$, $V_2\ (3/2, -1)$

Focos: $F_1(1 - \sqrt{5}/6, -1)$, $F_2(1+ \sqrt{5}/6, -1)$

Eje menor: $B_1(1, -2/3)$, $B_2(1, - 4/3)$

Lado recto: Longitud 4/9

: Extremos $(1- \sqrt{5}/6, - 7/9)$, $(1- \sqrt{5}/6,-11/$

$(1+ \sqrt{5}/6, - 7/9)$, $(1+ \sqrt{5}/6,-11/$

2.- Elipse: $\dfrac{(x+1)^2}{25} + \dfrac{(y-1)^2}{9} = 1$; centro (-1,1)

Vértices: $V_1(-6,1)$, $V_2(4,1)$

Focos: $F_1(-5,1)$, $F_2(3,1)$

Eje menor: $B_1(-1,4)$ $B_2(-1,-2)$

Lado recto: Longitud 18/5

Extremos (-5, 14/5), (-5, -9/5)

(3, 14/5), (3, -9/5)

3.- Elipse punto (5, -3)

4.- Conjunto vacío, $4(x+2)^2 + 3(y-1)^2 = -12$

AUTOEVALUACIÓN DEL CAPÍTULO V.

1.- 1	10.- 3
2.- 2	11.- 0
3.- 3	12.- 2
4.- 0	13.- 0
5.- 1	14.- 3
6.- 1	15.- 1
7.- 3	16.- 2
8.- -	17.- 0
9.- 2	