LA HIPERBOLA.

Los conocimientos empíricos acerca de la medida de la extensión, vienen de la más remota antigüedad, pero fueron muy rudimentarios en sus principios.

Las transacciones comerciales, indispensables en la vida social y el esfuerzo para medir partes más o menos extensas del universo, llevaron al hombre, apenas salido de la barbarie, a crearse un embrión de Geometría.

Según Aristóteles, las matemáticas y en especial la Geometría, tuvieron origen en Egipto, no únicamente por la necesidad de medir las tierras, sino también porque la casta de los sacerdotes disponía de tiempo suficiente para dedicarse a esta clase de ocupaciones, o sea, cultivaba la Geometría no sólo en vista de sus aplicaciones, sino como ciencia pura.

Desde época muy lejana, que se remonta a más de veinte siglos antes de nuestra era, contruyeron los egipcios las grandes pirámides. Un pueblo que emprende obras de esa importancia, debe haber poseído extensos conocimientos en matemáticas prácticas y en astronomía, pues esas imponentes construcciones están perfectamente orientadas.

Nada extraño, pues, que los antiguos griegos, Tales de Mileto, Solón, Herodoto y Pitágoras, hayan ido a Egipto a iniciarse en los conocimientos geométricos alcanzados por los sabios de ese país. Pero, como la ciencia egipcia era preponderantemente empírica, no constituía una ciencia en el verdadero sentido de la palabra, pues no era un sistema lógico, basado en postulados y axiomas.

No así los griegos, eminentemente pensadores, no se contentaron con saber el "qué"; sino quisieron averiguar el "por qué", y no se dieron por satisfechos hasta obtener explicaciones racionales. En otras palabras: con los griegos empieza propiamente la geometría como ciencia.

En esta unidad, analizaremos la hipérbola, que es otra de las secciones cónicas.

Confiamos que sientas satisfacción con su lectura y aprendizaje, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS:

1.- Definir correctamente el concepto, hipérbola.

2.- Encontrar la ecuación de la hipérbola en los siguientes casos:

a) Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados y el eje focal está sobre el eje "x" y es igual a 2a.

b) Los ejes de simetría coinciden con los ejes coordenados y el eje focal está sobre el eje "y" y es igual a 2b.

3.- Calcular correctamente los elementos de una hipérbola, conocida su ecuación.

4.- Construir la curva, dada la relación de una hipérbola, así como sus asíntotas y dar su dominio y su recorrido.

5.- Encontrar el lugar geométrico de una hipérbola dada por la ecuación general:

$$A(x + D/2A)^2 - C(y + E/2C)^2 = M$$

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia el capítulo VI, de tu libro "Geometría Analítica". Te sugerimos que leas primero todo el capítulo para que, conforme vayas leyendo el capítulo, vayas haciendo todas las anotaciones que creas importantes, para luego, porceder a contestar tus objetivos.

2.- En cada sección del capítulo se exponen ejemplos ilustrativos, para que observes el procedimiento y la forma de resolver los problemas para que luego, trates de resolver las autoevaluaciones como práctica de los objetivos a resolver.

3.- Una vez que estés seguro de tus conocimientos de esta unidad, te sugerimos que resuelvas la autoevaluación del capítulo, la cual te indicará qué tan bien andas en la unidad, o bien, te indica qué objetivos debes de volver a repasar.

CAPITULO 6.

LA HIPÉRBOLA

6-1 INTRODUCCIÓN.

Otro lugar geométrico asociado con las distancias desde dos puntos fijos es la hipérbola.

La hipérbola es el lugar geométrico de todos los puntos para los cuales la diferencia de sus distancias hacia dos puntos fijos es una constante. Los puntos fijos se llaman focos de la hipérbola.

Una construcción mecánica de la hipérbola es la siguiente, (fig. 1). Se colocan dos chinches en una mesa de dibujo, en los puntos F_1 y F_2. Estos puntos serán los focos de la hipérbola. Átese un lápiz a una cuerda en P, de manera que la cuerda no se deslice sobre el lápiz. Pásese uno de los extremos de la cuerda por debajo de la chinche que se encuentra en F_1 y a continuación únase el otro extremo sobre la chinche en F_2. Si los dos extremos R_1 y R_2 coinciden al tirar de la cuerda desde ellos o bien desde P, de manera que R_1F_2 y R_2F_2 se alarguen o se acorten en la misma longitud, entonces PF_2 PF_1 será constante (si la cuerda se mantiene tirante). La trayectoria resultante de la hipérbola puede obtenerse invirtiendo las funciones de F_1 y F_2 .

Las aplicaciones sencillas de la hipérbola no son tan comunes como las de la parábola y la elipse. En los cursos de geometría analítica se estudian las ecuaciones para varias hipérbola.

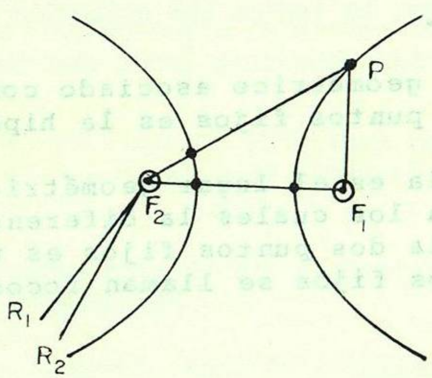

Fig. 1

Muchas leyes de la naturaleza se representan mediante ecuaciones hiperbólicas. El estudiante de física aprende que la relación entre el volumen y la presión de un gas es la - - ecuación de una hipérbola. Otras relaciones que se representan gráficamente mediante curvas hiperbólicas son, (a) distancia, velocidad tiempo; (b) área del cuadrado, su longitud, su ancho; (c) costo total, costo por artículo, número de artículos; (d) corriente, voltaje y resistencia en electricidad.

En la guerra se aplican las hipérbolas para localizar los emplazamientos escondidos de la artillería enemiga. El navegante de un avión con frecuencia usa las hipérbolas al determinar su posición. El sistema está relacionado con la recepción de señales de radio de varias estaciones radio emisoras en posiciones fijas conocidas. Observando los tiempos requeridos para recibir las señales y encontrando el punto de intersección de dos hipérbolas, obtenidas a partir de la construcción de las gráficas correspondientes a estos tiempos, el navegante puede determinar la posición del avión.

Si la hipérbola de la fig. 1 se gira alrededor de la recta F_2F_1 , se forma una superficie llamada hiperboloide de revolución. En ocasiones se usa este tipo de superficies como reflector del sonido en la forma de una cubierta para la orquesta en los grandes anfiteatros al aire libre. Si el sonido de la persona que habla o el de un conjunto musical se origina cerca del foco de la cubierta, el sonido se dirigirá hacia el auditorio que se encuentra frente a ella. El sonido se dispersará con mayor uniformidad hacia el auditorio si la cubierta tiene la forma de una paraboloide de revolución.

6-2 LA HIPERBOLA.

Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos.

La definición de la hipérbola excluye el caso en que el punto móvil se mueva sobre la recta que pasa por los focos a excepción del segmento comprendido entre ellos.

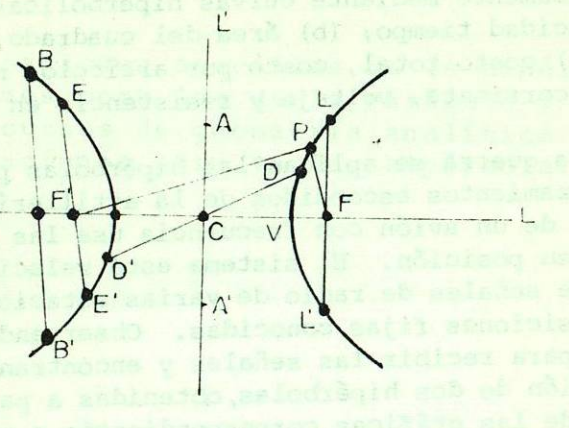

Fig. 2.

Los focos y el punto medio de este segmento no pueden pertenecer al lugar geométrico.

El estudiante debe observar la estrecha analogía que existe entre las definiciones de la hipérbola y elipse. La analogía entre estas dos curvas se encontrará frecuentemente a medida que avancemos en nuestro estudio de la hipérbola.

En el párrafo siguiente veremos que la hipérbola consta de dos ramas diferentes, cada una de longitud infinita. En la fig. 2 se ha dibujado una porción de cada una de estas ramas; los focos están designados por F y F'. La recta "l" que pasa por los focos tiene varios nombres; como para la elipse creemos conveniente introducir el término "eje focal" para designar esta recta.

El eje focal corta a la hipérbola en dos puntos, V y V', llamados vértices. La porción del eje focal comprendido entre los vértices, el segmento VV', se llama eje transverso. El punto medio C del eje transverso se llama centro (fig. 2). La recta l' que pasa por C y es perpendicular al eje focal "l"

tiene varios nombres; nosotros, como lo hicimos para la elipse, consideraremos conveniente introducir "eje no focal" para esta recta. El "eje no focal" l' no corta a la hipérbola; sin embargo, una porción definida de este eje, el segmento AA' en la fig. 2, que tiene C por punto medio, se llama eje conjugado. La longitud del eje conjugado se dará en el siguiente párrafo. El segmento que uno dos puntos diferentes cualesquiera de la hipérbola se llama cuerda; estos puntos pueden ser ambos de la misma rama, como para la cuerda BB', o uno de una rama y el otro de la otra, como para el eje transverso VV'. En particular, una cuerda que pasa por un foco, tal como EE' se llama cuerda focal. Una cuerda focal tal como LL', perpendicular al eje focal l se llama lado recto; evidentemente, por tener dos focos, la hipérbola tiene dos lados rectos.

6-3 PRIMERA ECUACION ORDINARIA DE LA HIPERBOLA.

Consideremos la hipérbola de centro en el origen y cuyo eje focal coincide con el eje X (fig. 3).

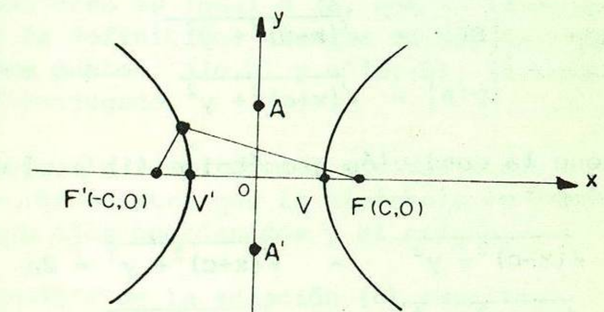

Fig. 3.

Los focos F y F' están entonces sobre el eje X. Como e centro O es el punto medio del segmento FF', las coordenadas de F y F' serán (c,o) y (-c,o), respectivamente, siendo c una constante positiva. Sea P(x,y) un punto cualquiera de la hipérbola. Entonces, por la definición de la hipérbola, el punto P debe satisfacer la condición geométrica siguiente, que expresa que el valor absoluto de la diferencia de las distancias del punto a los focos es una cantidad constante,

$$\Big|\,|FP| - |F'P|\,\Big| = 2a \qquad (1)$$

en donde "a" es una constante positiva y $2a < 2c$.

La condición geométrica (1) es equivalente a las dos re laciones,

$$|FP| - |F'P| = 2a \qquad (2)$$

$$|FP| - |F'P| = -2a \qquad (3)$$

La relación (2) es verdadera cuando P está sobre la ra izquierda de la hipérbola; la relación (3) se verifica cuand P está sobre la rama derecha.

Por la fórmula de la distancia entre dos puntos, tenem

$$|FP| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$|F'P| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

de manera que la condición geométrica (1) está expresada ana líticamente por:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a \qquad (4)$$

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = -2a \qquad (5)$$

correspondiendo las ecuaciones (4) y (5) a las relaciones (2) y (3), respectivamente.

Por el mismo procedimiento usado al transformar y simplificar la ecuación para la elipse, podemos demostrar que las ecuaciones (4) y (5) se reducen cada una a:

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2) \qquad (6)$$

Por ser $c > a$, $c^2 - a^2$ es un número positivo que podemos designar por b^2. Por tanto, sustituyendo en la ecuación (6) la relación:

$$b^2 = c^2 - a^2 \qquad (7)$$

obtenemos, $\quad b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$

que puede escribirse en la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (8)$$

Luego, la ecuación (8) es la ecuación de la hipérbola.

Estudiemos ahora la ecuación (8); las intersecciones con el eje X son a y -a. Por tanto, las coordenadas de los vértices V y V' son (a,o) y (-a,o) respectivamente, y la longitud del eje transverso es igual a 2a, que es la constante que interviene en la definición. Aunque no hay intersecciones con el eje Y, dos puntos, A(o,b) y A'(o,-b), se toman como extremos del eje conjugado.

Por tanto, la longitud del eje conjugado es igual a 2b. La ecuación (8) muestra que la hipérbola es simétrica con respecto a ambos ejes coordenados y el origen.

Despejando "y" de la ecuación (8), resulta:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \qquad (9)$$

Por tanto, para que los valores de "y" sean reales, x está restringida a variar dentro de los intervalos $x \geq a$ y $x \leq -a$. De aquí que ninguna porción del lugar geométrico - -

aparece en la región comprendida entre las rectas $x=a$ y $x=-a$.

Despejando x de la ecuación (8), se obtiene:

$$x = \pm \frac{a}{b} \sqrt{y^2 + b^2} \tag{10}$$

de la cual vemos que "x" es real para todos los valores reales de "y".

Según esto, las ecuaciones (9) y (10), juntos, con la simetría del lugar geométrico, muestran que la hipérbola no es una curva cerrada sino que consta de dos ramas diferentes, una de las cuales se extiende indefinidamente hacia la derecha, arriba y abajo del eje X, y la otra se extiende indefinidamente hacia la hizquierda y por arriba y debajo del eje X.

De los resultados anteriores se deduce que si

$$R = \{(x,y) \mid b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2\}$$

entonces dominio de $R = (-\infty;-a] \cup [a;+\infty)$ y recorrido de $R= (-\infty; +\infty)$.

La hipérbola (8) no tiene asíntotas verticales ni horizontales. En el siguiente párrafo veremos, sin embargo, que la curva tiene dos asíntotas oblicuas.

De la ecuación (9) y de la relación (7), hallamos que la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$.

Como para la elipse, la excentricidad "e" de una hipérbola está definida por la razón c/a. Por tanto, de (7), tenemos:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} \tag{11}$$

como $c > a$, la excentricidad de una hipérbola es mayor que la unidad.

Si el centro de la hipérbola está en el origen pero su eje focal coincide con el eje Y, hallamos, análogamente, que la ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \tag{12}$$

Las ecuaciones (8) y (12) son las más simples de esta curva y las llamaremos primera ecuación ordinaria de la hipérbola.

Los resultados precedentes se resumen en el siguiente:

TEOREMA 1.

La ecuación de la hipérbola de centro en el origen, eje focal coincidente con el eje X, y focos los puntos (c,o) y (-c,o), es:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal coincide con el eje Y, de manera que las coordenadas de los focos sean (o,c) y (o,-c), entonces la ecuación es:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, "a" es la longitud del semieje transverso, "b" la del semieje conjugado, c la distancia del centro a cada foco, y, a,b,c están ligados por la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada uno de sus lados rectos es, $2b^2/a$, y la excentricidad "e" está dada por la relación: