$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$$

NOTA.

La posición de una elipse con relación a los ejes coordenados puede determinarse como se indicó en la nota de la unidad de la elipse, comparando los denominadores de los términos en x^2 y y^2. El denominador mayor está asociado a la variable correspondiente al eje coordenado con el cual coincide el eje mayor de la elipse.

Este método no es aplicable a la hipérbola, ya que podemos tener $a > b$, $a < b$ ó $a = b$. La posición de la hipérbola se determina por los signos de los coeficientes de las variables de la ecuación en forma ordinaria. La variable de coeficiente positivo corresponde al eje coordenado que contiene el eje transverso de la hipérbola.

EJEMPLO 1.

Los vértices de una hipérbola son los puntos V(o,3) y V'(0,-3), y sus focos los puntos F(0,5) y F'(0,-5). Hallar la ecuación de la hipérbola, las longitudes de sus ejes transverso y conjugado, su excentricidad, la longitud de cada lado recto y por último el dominio y el recorrido de la relación.

SOLUCIÓN:

Como los vértices y los focos están sobre el eje Y, el eje focal coincide con el eje Y. Además, el punto medio del eje transverso está, evidentemente en el origen. Por tanto, por el teorema 1, la ecuación de la hipérbola es de la forma:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

La distancia entre los vértices es $2a = 6$, longitud del eje transverso. La distancia entre los focos $2c= 10$. Por tanto, $a=3$, y $c=5$, de donde, $b^2= c^2-a^2= 25 - 9 = 16$; por tanto $b = 4$ y la longitud del eje conjugado es $2b = 8$. La ecuación de la hipérbola es entonces:

$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$$

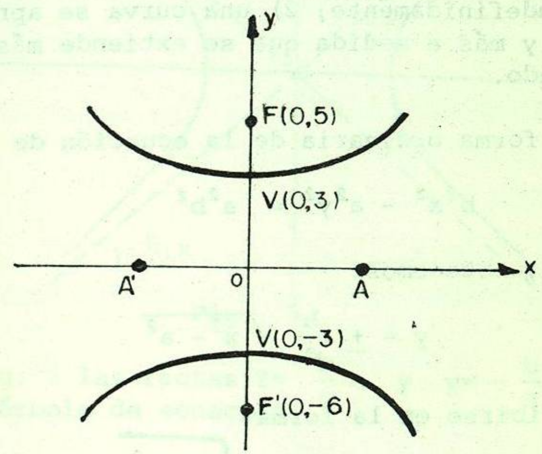

Fig. 4.

La excentricidad es, $e= c/a = 5/3$, y la longitud de cada lado recto es:

$$\frac{2b^2}{a} = \frac{2\ (16)}{3} = \frac{32}{3}$$

El lugar geométrico está representado en la fig. 4, en donde el eje conjugado está indicado por el segmento AA' del eje X. Se puede ver fácilmente de la gráfica que el dominio y recorrido de la relación son respectivamente:

$$\text{Dominio} = (-\infty;\infty)$$

$$\text{Recorrido} = (-\infty;-3] \cup [3;\infty)$$

6-4 ASÍNTOTAS DE LA HIPÉRBOLA.

Si para una curva dada, existe una recta tal que, a medida que un punto de la curva se aleja indefinidamente del origen, la distancia de ese punto a la recta decrece contínuamente y tiende a cero, dicha recta se llama asíntota de la curva.

Esta definición implica dos cosas: a) una curva que tiene una asíntota no es cerrada o de extensión finita, sino que se extiende indefinidamente; 2) una curva se aproxima a la asíntota más y más a medida que se extiende más y más en el plano coordenado.

Si de la forma ordinaria de la ecuación de la hipérbola:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

despejamos "y", obtenemos:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$$

que puede escribirse en la forma:

$$y = \pm \frac{b}{a}\, x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}$$

Frecuentemente se desea investigar lo que ocurre en una ecuación cuando una de las variables aumenta numéricamente sin límite. Si un punto de la hipérbola se mueve a lo largo de la curva de manera que su abscisa x aumenta numéricamente sin límite, el radical del segundo miembro de la ecuación de arriba se aproxima más y más a la unidad, y la ecuación tiende a la forma:

$$y = \pm \frac{b}{a}\, x$$

Como esta ecuación representa las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$, esto nos conduce a inferir, de la definición de asíntota, que la hipérbola es asíntota a estas dos rectas.

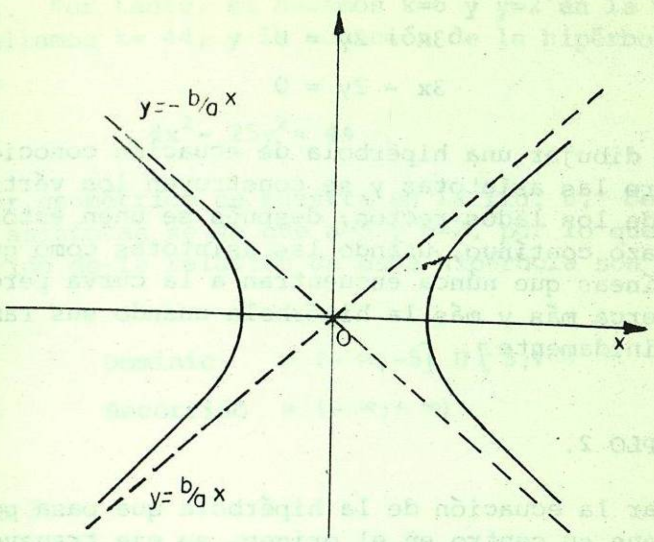

Fig. 5.

En la fig. 5 las rectas $y = \frac{b}{a}x$ y $y = -\frac{b}{a}x$ son asíntotas de la hipérbola de ecuación:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

y están representadas por las líneas interrumpidas de la figura.

Estos resultados se resumen en el siguiente:

TEOREMA 2.

La hipérbola, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, tiene por asíntotas las rectas $bx - ay = 0$ y $bx + ay = 0$.

NOTA.

Si la ecuación de una hipérbola está en su forma ordinaria, las ecuaciones de sus asíntotas pueden obtenerse reemplazando el término constante por cero y factorizando el primer miembro. Así, para la hipérbola, $9x^2 - 4y^2 = 36$ tenemos - --

$9x^2 - 4y^2 = 0$, de donde $(3x+2y)(3x-2y) = 0$, y las ecuaciones de las asíntotas son:

$$3x + 2y = 0$$
$$3x - 2y = 0$$

Para dibujar una hipérbola de ecuación conocida, se trazan primero las asíntotas y se construyen los vértices y los extremos de los lados rectos; después se unen estos puntos con un trazo contínuo, usando las asíntotas como guías, ya que son líneas que nunca encuentran a la curva pero a las cuales se acerca más y más la hipérbola cuando sus ramas se alejan indefinidamente.

EJEMPLO 2.

Hallar la ecuación de la hipérbola que pasa por el punto $(6,2)$, tiene su centro en el origen, su eje transverso está sobre el eje X, y una de sus asíntotas es la recta, $2x-5y=0$. Además, encontrar el dominio y recorrido de la relación.

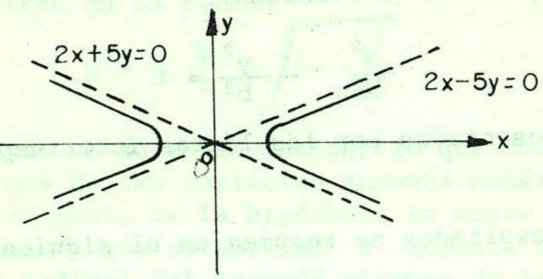

Fig. 6.

Por el teorema 2 anterior, la otra asíntota es la recta, $2x+5y=0$. Las ecuaciones de ambas asíntotas pueden obtenerse haciendo k igual a cero en la ecuación:

$$(2x-5y)(2x+5y) = k \quad \text{o sea,}$$
$$4x^2 - 25y^2 = k$$

Como la hipérbola buscada debe pasar por el punto $(6,2)$, las coordenadas de este punto deben satisfacer la ecuación de la hipérbola. Por tanto, si hacemos $x=6$ y $y=2$ en la última ecuación, hallamos $k= 44$, y la ecuación de la hipérbola que se busca es:

$$4x^2 - 25y^2 = 44$$

El lugar geométrico se muestra en la fig. 6. De la ecuación de las asíntotas se ve que $a=5$ y $b=2$, por lo que el dominio y recorrido de la relación de esta hipérbola son respectivamente:

$$\text{Dominio} = (-\infty;-5] \cup [5;+\infty)$$
$$\text{Recorrido} = (-\infty;+\infty)$$

EJEMPLO 3.

Construir la gráfica de la siguiente relación y dar su dominio y recorrido.

$$R = \{(x,y) \mid 36x^2 - 64y^2 = 2304\}$$

SOLUCIÓN:

Dividimos entre 2304 y reducimos la ecuación a:

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$$

La gráfica es una hipérbola en la que $a=8$, $b=6$ y $c = \sqrt{a^2+b^2} = 10$. Por consiguiente, los vértices son $(\pm 8,0)$ y los focos $(\pm 10,0)$. Cada lado recto tiene una longitud de $2b^2/a = 9$. Las ecuaciones de las asíntotas son, $3x-4y=0$ y $3x+4y= 0$. A partir de esta información puede trazarse la hipérbola (fig. 7).

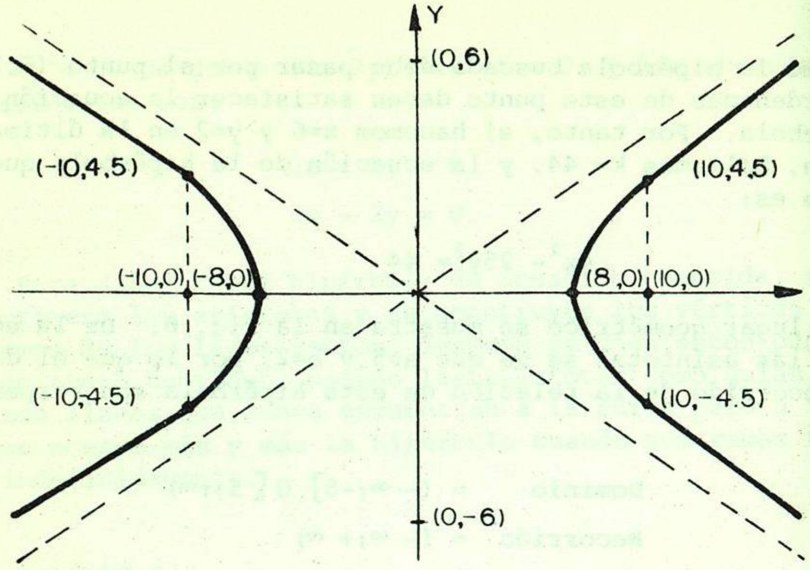

FIG.-7

El lugar geométrico de la relación se muestra en la figura en donde se observa fácilmente que el dominio y recorrido son los siguientes:

$$\text{Dominio} = (-\infty ; -8] \cup [8 ; \infty)$$
$$\text{Recorrido} = (-\infty ; \infty)$$

EJEMPLO 4.

Construya la gráfica de $16x^2 - 9y^2 - 144 = 0$ y dé el dominio y el recorrido de la relación:

$$R = \{(x,y) \mid 16x^2 - 9y^2 - 144 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

La ecuación dada es equivalente a:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

que es de la forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $a^2 = 9$, $b^2 = 16$, por lo que la gráfica de la ecuación dada es una hipérbola con centro en el origen y focos sobre el eje X. Para este hipérbola a=3, b=4, por lo que $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 16 = 25$ y c=5; entonces los vértices son $V_1(3,0)$ y $V_2(-3,0)$ y los focos están en $F_1(5,0)$ y $F_2(-5,0)$, la longitud del lado recto es, $2b^2/a = 32/3$, o sea que los extremos de los lados rectos (fig. 8) son $R_1(5,-16/3)$, $L_1(5,16/3)$, $R_2(-5,-16/3)$ y $L_2(-5, 16/3)$.

La ecuación del par de asíntotas se escribe:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 0$$

que es equivalente a:

$$y = \frac{4}{3}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{4}{3}x$$

o sea;

$$3y - 4x = 0 \quad \text{y} \quad 3y + 4x = 0$$

Estas asíntotas están representadas por la línea interrumpida de la fig. 8, en donde se muestra el lugar geométrico.

Para la relación R especificada:

$$\text{Dominio de } R = (-\infty ; -3] \cup [3 ; +\infty)$$
$$\text{Recorrido de } R = (-\infty ; +\infty)$$

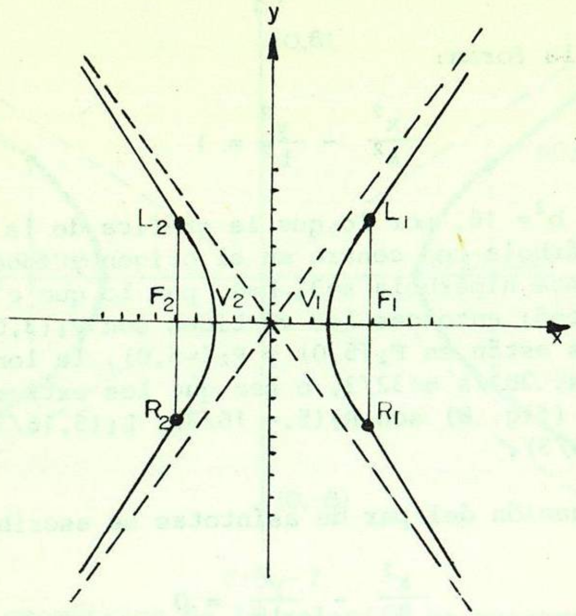

Fig. 8.

6-5 HIPÉRBOLA EQUILÁTERA O RECTANGULAR.

Consideremos la hipérbola especial cuyos ejes transvers y conjugado son de igual longitud.

Entonces a=b, y la ecuación:

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$$

toma la forma más sencilla;

$$x^2 - y^2 = a^2$$

debido a la igualdad de sus ejes, la hipérbola se llama hipé bola equilátera.

Por al teorema 2, las asíntotas de la hipérbola equilátera son las rectas:

$$x - y = 0$$

$$\text{y} \qquad x + y = 0$$

Como estas rectas son perpendiculares, resulta que las asíntotas de una hipérbola equilátera son perpendiculares entre sí. Por esta razón la hipérbola equilátera se llama también hipérbola rectangular.

AUTOEVALUACIÓN 1.

Para cada hipérbola halle las coordenadas de los vértices y los focos, la longitud de cada lado recto y las ecuaciones de las asíntotas. Trace cada curva usando las asíntotas y establezca su dominio y recorrido.

1.- $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 5.- $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$

2.- $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$ 6.- $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{16} = 1$

3.- $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ 7.- $y^2 - x^2 = 36$

4.- $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{25} = 1$ 8.- $x^2 - y^2 = 49$

Escriba las ecuaciones de las hipérbolas cuyos ejes están sobre los ejes coordenados y las cuales también satisfacen las condiciones dadas en los problemas siguientes:

9.- Vértice (4,0), extremo del eje conjugado (0,3).

10.- Foco (6,0), vértice (4,0).

11.- Foco (0,5), eje conjugado 4.

12.- Eje conjugado 6, vértice (7,0).

13.- Lado recto 5, foco (3,0)

14.- Extremo del eje conjugado (3,0), longitud del lado recto 10.

15.- Pasa a través de (6,5) y $(8, 2\sqrt{15})$.

16.- Pasa a través de $(3,\sqrt{2})$ y $(2\sqrt{3}, 2)$

6-6 SEGUNDA ECUACION ORDINARIA DE LA HIPERBOLA.

Si el centro de una hipérbola no está en el origen, pero sus ejes son paralelos a los ejes coordenados, sus ecuaciones pueden obtenerse tal como se determinaron ambas formas de la segunda ecuación ordinaria de la elipse y el procedimiento se resume en el siguiente:

TEOREMA 3.

La ecuación de una hipérbola de centro en el punto (h,k) y eje focal paralelo al eje X, es de la forma:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

Si el eje focal es paralelo al eje Y, su ecuación es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

Para cada hipérbola, "a" es la longitud del semieje transverso, "b" la del semieje conjugado, "c" la distancia del centro a cada uno de los focos y a,b,c están ligados por la relación:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

También, para cada hipérbola, la longitud de cada lado recto es $2b^2/a$, y la excentricidad "e" está dada por la relación:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a} > 1$$

EJEMPLO 1.

Trazar la gráfica de la siguiente relación y dar su dominio y recorrido.

$$R = \{(x,y) \mid 12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Primero reducimos la ecuación a la forma ordinaria, por el método de completar cuadrados,

$$12(y^2+6y+9) - 4(x^2-4x+4) = -44 + 108 - 16$$

$$12(y+3)^2 - 4(x-2)^2 = 48$$

$$\frac{(y+3)^2}{4} - \frac{(x-2)^2}{12} = 1$$

Vemos ahora que a=2, $b=2\sqrt{3}$, $c=\sqrt{4+12} = 4$ y el centro de la hipérbola está en (2,-3). Por tanto, los extremos del eje transverso están en (2,-5) y (2,-1), y los extremos del eje conjugado en $(2-2\sqrt{3}, -3)$ y $(2+2\sqrt{3}, -3)$. Las coordenadas de los focos, a 4 unidades del centro son (2,-7) y (2, 1). La longitud de cada lado recto es $2b^2/a = 12$ y por consiguiente, los extremos de cada lado recto están a 6 unidades del foco correspondiente. Los vértices de la hipérbola, los extremos de cada lado recto y las asíntotas son suficientes para dibujar una gráfica razonablemente precisa (fig. 9). Las ecuaciones de las asíntotas, aunque no son necesarias para su trazo, son:

$$\frac{y+3}{2} + \frac{x-2}{2\sqrt{3}} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{y+3}{2} - \frac{x-2}{2\sqrt{3}} = 0$$

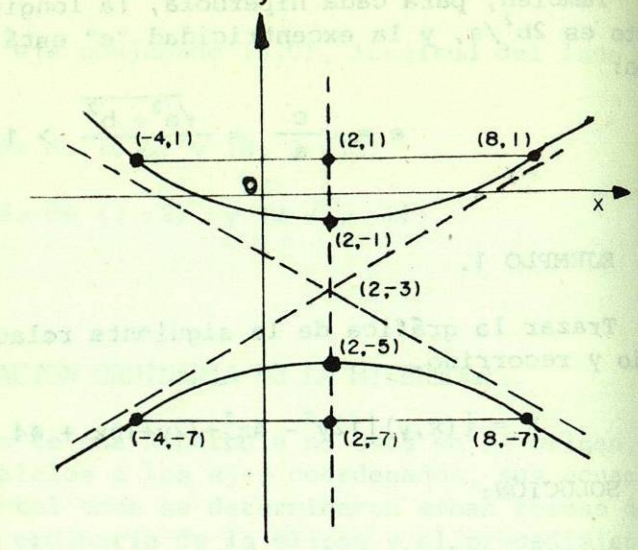

Fig. 9.

El lugar geométrico es el representado en la fig. 9 de donde se puede ver fácilmente que el dominio y el recorrido de la relación son los siguientes:

$$\text{Dominio} = (-\infty\ ;\ \infty)$$

$$\text{Recorrido} = (-\infty\ ;-5]\ \cup\ [-1;\ \infty)$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Reduzca las ecuaciones siguientes a la forma ordinaria. En cada una halle las coordenadas del centro, los vértices los focos. Trace el lugar geométrico de cada ecuación y es- blezca su dominio y recorrido.

1.- $9x^2 - 16y^2 - 54x - 63 = 0$

2.- $21x^2 - 4y^2 + 84x - 32y - 64 = 0$

3.- $5y^2 - 4x^2 - 30y - 32x = 99$

4.- $2x^2 - 3y^2 - 8y + 6x - 1 = 0$

Escriba las ecuaciones de las hipérbolas que satisfacen las condiciones dadas en los siguientes problemas.

5.- Centro (1,3), vértice (4,3), extremo del eje conjugado (1,1).

6.- Vértice (-4,0), focos (-5,0) y (1,0).

7.- Extremos del eje conjugado (3,-1) y (3,5), foco (-1,2).

8.- Vértices (-1,3) y (5,3), longitud del eje conjugado 6.

9.- Un punto se mueve de modo que la diferencia de sus distancias desde (-4,3) y (4,3) es numéricamente igual a 6. Halle la ecuación de su trayectoria.

6-7 LUGAR GEOMÉTRICO DE LA RELACIÓN DE UNA HIPÉRBOLA CUYA ECUACIÓN PERTENECE A LA FÓRMULA GENERAL: $A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$.

TEOREMA 4.

Si los coeficientes A y C difieren en el signo, la ecuación:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

representa una hiperbola de ejes paralelos a los coordenados, o un par de rectas que se cortan.

La ecuación anterior puede escribirse en la forma equivalente:

$$A(x + D/2A)^2 + C(y + E/2C)^2 = M$$

donde $$M = D^2/4A + E^2/4C - F$$

Entonces:

a) Si $M = 0$, la gráfica está formada por dos rectas que se cortan.

b) Si $M \neq 0$, la gráfica es una hipérbola con centro en $(-D/2A, -E/2C)$; su eje transverso es horizontal si M/A es positivo y M/C negativo, y vertical en caso contrario.

EJEMPLO 1.

Encontrar el lugar geométrico de la siguiente relación y dar su dominio y recorrido.

$$R = \{(x,y) \mid 9x^2 - 4y^2 - 54x + 8y + 113 = 0\}$$

SOLUCIÓN:

Vamos a reducir la ecuación anterior a la forma ordinaria completando los cuadrados. Entonces,

$$9(x^2 - 6x) - 4(y^2 - 2y) = -113$$

y $\quad 9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 - 2y + 1) = -113 + 81 - 4$

de donde $\quad 9(x-3)^2 - 4(y-1)^2 = -36$

de manera que la forma ordinaria es:

$$\frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-3)^2}{4} = 1$$

que es la ecuación de una hipérbola cuyo centro C es el punto $(3,1)$ y cuyo eje focal es paralelo al eje Y (fig. 10).

Como $a^2 = 9$, $a=3$, y las coordenadas de los vértices V y V' son $(3, 1+3)$ y $(3, 1-3)$ o sea, $(3,4)$ y $(3,-2)$ respectivamente. Como $c^2 = a^2 + b^2$, $c = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$, y las coordenadas de los focos F y F' son, $(3, 1+\sqrt{13})$ y $(3, 1-\sqrt{13})$ respectivamente. La longitud del eje transverso es $2a = 6$, la del eje conjugado es $2b=4$ y la de cada lado recto es $2b^2/a = 8/3$. La

excentricidad es $e = c/a = \sqrt{13}/3$.

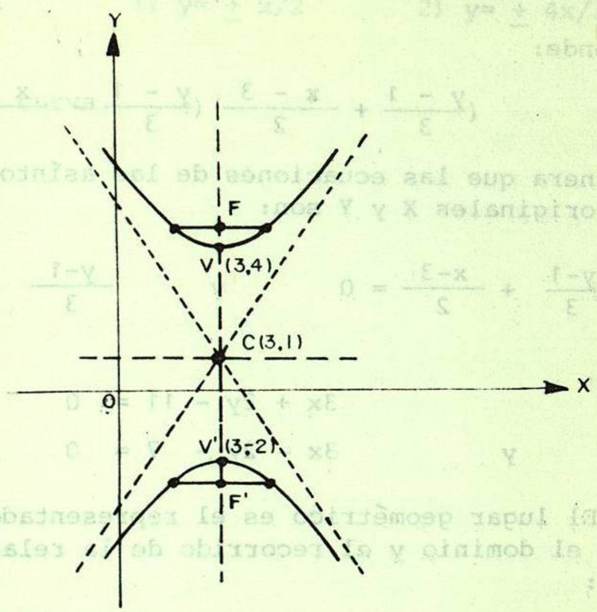

Fig. 10.

Para obtener las ecuaciones de las asíntotas, aplicaremos el teorema 2, teniendo en cuenta que el centro de la hipérbola es el punto $(3,1)$ y no el origen. Si los ejes coordenados son trasladados de manera que el nuevo origen sea el centro $C(3,1)$ la ecuación de la hipérbola toma la forma:

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 1$$

de modo que las ecuaciones de las asíntotas referidas a los nuevos ejes se obtienen de la relación:

$$\frac{y'^2}{9} - \frac{x'^2}{4} = 0$$

Pero esta última relación al ser referida a los ejes originales X y Y, toma la forma: