# TEORÍA DE CONJUNTOS.

## (Parte I).

## INTRODUCCION.

Es maravilloso ser el creador, el inventor, de un nuevo ingenio tal como la televisión. Es aún más interesante crear una nueva idea. Pocos matemáticos han originado una idea de tanto alcance como lo hizo el matemático alemán George Cantor, quien vivió de 1845 a 1918. Cuando tenía 30 años, enunció una nueva teoría matemática, la teoría de los conjuntos. Como sucede a menudo con las nuevas ideas y sus creadores, los colegas de Cantor se mofaron de él, quienes encontraron las ideas revolucionarias e inaceptables. Una de las críticas más fuertes a su teoría, se refirió al proceso matemático que él seguía para llegar al concepto de infinito.

El carácter moderado de Cantor, le impidió polemizar en apoyo de su teoría. La oposición llegó a ser tan fuerte que la Universidad de Berlín rechazó su contrato. Sin embargo, Cantor vivió para ver que los matemáticos de todo el mundo reconocían su trabajo.

El gran avance de las matemáticas en este siglo descansa en los fundamentos que estableció este genio brillante. En esta unidad I empezaremos a familiarizarnos con algunas de las ideas básicas y más sencillas de esta teoría. Un estudio completo de la teoría se llevará a cabo en cursos universitarios, cuando se haya alcanzado la madurez necesaria. A medida que se progresa en este campo de estudios se aprecia mejor la verdad de las palabras de Cantor: La esencia de las matemáticas radica en su libertad.

Al término de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS ESPECÍFICOS.

1.- Aplicar correctamente el lenguaje simbólico que se re-- quiere en el trabajo y estudio de la teoría de conjun-- tos.

2.- Discriminar entre una lista de conjuntos dados aquellos que estén bien definidos.

3.- Transformar conjuntos en la forma descriptiva a la forma tabular y viceversa.

4.- Definir y determinar la cardinalidad de un conjunto.

5.- Definir conjunto finito e infinito; y distinguirlos a partir de una lista de conjuntos dados.

6.- Definir conjunto vacío y conjunto universal; y dar ejemplos que los muestren.

7.- Definir conjuntos equivalentes, conjuntos iguales, conjuntos diferentes, conjuntos ajenos y subconjuntos; y distinguirlos a partir de una lista de parejas de con-- juntos dados.

8.- Enlistar todos los subconjuntos de un conjunto dado.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Para el objetivo 1 estudia la lista de símbolos adjun-- tos a la lección 1 del capítulo I para que puedas familiarizarte con los símbolos utilizados en la teoría de conjuntos y procura memorizarla. Con dichos símbolos lo que se persigue básicamente es representar las ideas con sencillez, claridad y exactitud. Resuelve también los problemas del 11 al 20 de la autoevaluación de la lección 1.



2.- Para el objetivo 2 estudia la sección 1-1 de tu texto, donde se aclara que, aunque no hay una definición formal de conjunto, se puede decir que un conjunto está bien definido, cuando se puede decidir qué elementos pertenecen a dicho conjunto y cuáles no.

3.- Para el objetivo 3 estudia la sección 1-2 de tu texto y resuelve los problemas del 21 al 30 de la autoevaluación de la lección 1. Un conjunto puede especificarse dando una lista de sus elementos (forma tabular) o bien, enunciando alguna propiedad común a todos sus elementos (forma descriptiva).

4.- Para el objetivo 4 estudia la sección 1-3 de tu texto y resuelve los problemas 61 y 62 de la autoevaluación de la lección 1. La cardinalidad de un conjunto está determinado por el número de elementos contenidos en ese conjunto.

5.- Para el objetivo 5 estudia la sección 1-4 de tu texto y resuelve los problemas del 71 al 80 de la autoevaluación de la lección 1. Si los elementos de un conjunto pueden enlistarse del primero al último decimos que el conjunto es finito, de otro modo el conjunto es infinito.

6.- Para el objetivo 6 estudia las secciones 1-5 y 1-6 de tu texto. El conjunto que no tiene elementos es llamado conjunto vacío y se denota por $\emptyset$. Y el conjunto que consiste en la totalidad de los elementos bajo consideración en una discusión particular es llamado conjunto universal y se representa comúnmente mediante la letra U.

7.- Para el objetivo 7 y 8 estudia las secciones 1-7, 1-8 y 1-9 de tu texto y resuelve los problemas del 1 al 10, del 31 al 70 y del 81 al 90 de la autoevaluación de la lec-- ción 1. Se dice que dos conjuntos: son equivalentes si tienen la misma cardinalidad, dos conjuntos son iguales si tienen exactamente los mismos elementos, son diferentes si tienen elementos que los distinguen, son ajenos si no tienen ningún elemento en común y se dice que un con-- junto es un subconjunto de otro si cada elemento del primero es también elemento del segundo conjunto.

8.- Una vez que creas dominar tus objetivos comenta la unidad con tus compañeros más aventajados, para que entre todos tengan un mejor aprendizaje. Consulta tus dudas con tu maestro asesor:

9.- Como ritmo de trabajo te sugerimos el siguiente:

| | |
|---|---|
| 1er. día | Objetivos 1, 2 y 3 |
| 2o. día | Objetivos 4, 5 y 6 |
| 3er. día | Objetivos 7 y 8 |
| 4o. día | Resolución del Laboratorio. |

10.- Como requisito para tener derecho a presentar la unidad I, deberás entregar a tu maestro asesor, el laboratorio de esta unidad resuelto correctamente.



**AUTOEVALUACIÓN.**

**1.- Conjuntos que tienen tantos elementos que el proceso de contarlos nunca llega a su fin.**

**0) Ajenos. 1) Finitos. 2) Equivalentes.**
**3) Infinitos.**

**2.- Conjunto que consta de la totalidad de los elementos considerados para determinada operación, es el conjunto:**

**0) Infinito. 1) Finitos. 2) Universal.**
**3) Vacío.**

**3.- Convierte el conjunto {x/x es entero par y 6 < x <12} a la forma tabular.**

**0) {6,8,10,12} 1) {8,10} 2) {2,4,14,16,18}**
**3) {2,4,6,8,10}**

**4.- Determina la cardinalidad del conjunto {1,2,4,5,6}**

**0) 1 1) 6 2) 4**
**3) 5**

**Escribe las siguientes afirmaciones usando la simbología adecuada.**

**5.- "x" no es elemento de B.**

**0) $x \neq B$ 1) $x \not\subset B$ 2) $x \nmid 6$**
**3) $x \notin B$**

**6.- "A" es subconjunto de B.**

**0) $A \neq B$ 1) $A \subset B$ 2) $A \supset B$**
**3) $A \in B$**

Si A = {1,2,3,4} ; B = {1,2,3} ; C = {a,b,c} ; decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

7.- $\{1,2,3\} \subset A$

0) Verdadera. 1) Falsa.

8.- $B \in A$

0) Verdadera. 1) Falsa.

9.- $B \not\subset A$

0) Verdadera. 1) Falsa.

Entre los pares de conjunto siguietes, determina cuáles son iguales o diferentes.

10.- $\{x/x$ es un entero y $2 < x < 6\}$ y $\{3,4,5\}$

0) Iguales. 1) Diferentes.

11.- $\{x/x$ es un entero y $0 < x < 5\}$ y $\{0,1,2,3,4,5\}$

0) Iguales. 1) Diferentes.

12.- {1,2,3,4,5...} y {2,4,6,8,10...}

0) Iguales. 1) Diferentes.

Determina si los pares de conjuntos siguientes son equivalentes o no.

13.- $\{x/x$ es vocal del abecedario$\}$ y {0,1,2,3,4}

0) Equivalentes. 1) No equivalentes.

14.- {a,b,c} y {x,y,z}

0) Equivalentes. 1) No equivalentes.

Determina si los siguientes conjuntos son finitos o infinitos.



15.- {0,1,2,3,4,5,6,...,99,100}

0) Finitos. 1) Infinitos.

16.- $\{x/x$ es un entero positivo y $x > 10\}$

0) Finitos. 1) Infinitos.

Determina si los siguientes conjuntos son ajenos o nó.

17.- {x,y,z} y {a,b,c}

0) Ajenos. 1) No ajenos.

18.- {1,2,3} y {3,4,5}

0) Ajenos. 1) No ajenos.

**LISTA DE SÍMBOLOS:**

| | |
|---|---|
| $\in$ | es elemento de |
| $\notin$ | no es elemento de |
| $\mid$ | tal que |
| N | conjunto de los números naturales |
| Z | conjunto de los números enteros |
| $>$ | es mayor que |
| $<$ | es menor que |
| $\ngtr$ | no es mayor que |
| $\nless$ | no es menor que |
| $=$ | igual a |
| $\neq$ | es diferente |
| # | cardinalidad de |
| $\emptyset$ | conjunto vacío |
| U | conjunto universal |
| $\leftrightarrow$ | es equivalente a |
| $\subset$ | es subconjunto de |
| $\not\subset$ | no es subconjunto de |
| $\cup$ | unión |
| $\cap$ | intersección |
| $'$ | complemento |
| $-$ | diferencia |
| x | producto cartesiano |



# TEORÍA DE CONJUNTOS.

## LECCIÓN 1.

### 1-1 CONCEPTO DE CONJUNTO.

Como se hace con una nueva asignatura, empezaremos el estudio de las matemáticas discutiendo los términos técnicos - nuevos que debemos introducir. Nuestra intuición nos dice que cada uno de estos términos tendrá una definición, pero más tarde encontraremos que las posteriores definiciones se ten-drán que apoyar en las primeras y esto nos puede llevar a un círculo vicioso, en el que no aclararemos la verdadera significación de los conceptos.

El único camino para evitar estas definiciones circulares en matemáticas o en otras asignaturas, es el de tomar un pequeño número de palabras como "indefinibles"; y todas las demás palabras matemáticas se definirán en función de ellas. No es fácil decidirse y escoger entre las palabras que se van a dejar como indefinibles o como definidas, y después definir éstas en función de las primeras. Como se puede escoger de muchas maneras, la elección la debemos hacer teniendo en cuenta principalmente la sencillez y la elegancia.

Para empezar vamos a introducir un término que satura todas las matemáticas; es el concepto de "conjunto".

Todos estamos acostumbrados a tratar con conjuntos, por ejemplo, escribimos usando un conjunto de letras llamado abecedario, efectuamos operaciones de conteo y medición usando un conjunto de números, participamos deportiva y socialmente en conjuntos llamados equipos o clubes, hablamos del conjunto de artículos de la Constitución Mexicana, del conjunto de estudiantes de la U.A.N.L., de colecciones de estampillas, etc.

sin embargo, el significado del término "conjunto" no es fácil de explicar o de entender.

Aunque intuitivamente podemos considerar un "conjunto" como una colección o agregado de objetos o ideas de cualquier especie, siempre y cuando éstos estén claros como para decidir si pertenecen o nó al conjunto; sin embargo, esta considera-- ción es vaga y no se puede aceptar como una definición formal. Por lo tanto, el concepto de "conjunto" es una noción primiti- va que no puede definirse empleando palabras más simples, o sea, "conjunto" es un término "indefinible".

## 1-2 NOTACIÓN DE CONJUNTOS.

Los objetos o ideas que forman un conjunto se denominan "elementos" del conjunto. Por ejemplo, todos los profesores de la preparatoria forman un conjunto, y un profesor de mate- máticas de la misma es un elemento que pertenece a dicho con-- junto. En cambio, un agricultor, la letra b y el número 3, no son elementos del conjunto de profesores de la preparatoria.

Para describir un conjunto, normalmente se emplean llaves a fin de encerrar los elementos pertenecientes a él, por ejem- plo, un conjunto de cinco elementos formado por los números: 1,3,5,7 y 9, se escribe como:

$$\{1,3,5,7,9\}$$

(Los elementos de un conjunto son separados por comas y no se puede escribir un mismo elemento repetidas veces). Usualmen- te, los conjuntos son nombrados por medio de letras mayúsculas, de esta manera el conjunto anterior puede ser escrito como:

$$A = \{1,3,5,7,9\}$$

(Aquí la letra A está empleada como un nombre para el conjunto) En este conjunto, se puede ver que el número 5 es un elemento del conjunto A y este hecho se puede expresar como:

$$5 \in A$$

(El símbolo $\in$ , se utiliza para expresar: "es elemento de", o bien, "pertenece a"). Por el contrario, se puede ver, también,



que el número 4 no es un elemento del conjunto A, entonces és- to se expresa así:

$$4 \notin A$$

(Es costumbre en matemáticas poner una línea oblicua "/" ta-- chando un símbolo, para indicar lo opuesto o la negación del significado del símbolo).

Observación 1. Los símbolos " $\in$" y "$\notin$" son usados úni- camente para expresar la relación que hay de un elemento a un conjunto; y no la relación de un conjunto a un elemento, o en- tre dos conjuntos, o entre dos elementos.

Un conjunto puede determinarse de dos formas distintas: una sería enumerando o enlistando todos sus elementos, a esta forma se le llama "tabular" o "por extensión", o bien, enun-- ciando alguna propiedad que deban de tener todos y cada uno de los elementos del conjunto dado, a esta forma se le llama "descriptiva" o "por comprensión"; en esta forma se emplea una letra minúscula, (no importa que letra se utilice) que por lo general es "x" y que representa un elemento cualquiera del con junto, para enunciar la propiedad de todos los elementos del conjunto.

Ejemplos:

Si B es el conjunto formado por las vocales del abeceda- rio, entonces:

$B = \{a,e,i,o,u\}$ —— forma tabular
$B = \{x \mid x \text{ es vocal del abecedario}\}$ ——forma descriptiva

Este conjunto B expresado en forma descriptiva, se lee como: "B es el conjunto formado por equis, tal que, equis es vocal del abecedario". Téngase en cuenta que la barra vertical, - "|", cuando está entre llaves, se lee: "tal que" o "tales que".

Si C es el conjunto formado por los números enteros mayo- res que 3 y menores que 8, entonces:

$C = \{4,5,6,7\}$ —— forma tabular
$C = \{x \mid x \text{ es entero y } 3<x<8\}$ —— forma descriptiva