Los símbolos $<$ y $>$ significan, respectivamente, "es menor que" y "es mayor que". Así, el conjunto consiste en todos los números enteros mayores que 3 $(x > 3)$ y menores que 8 $(x < 8)$.

Observación 2. Las llaves simbolizan un conjunto y lo que encerramos con ellas son sus elementos o una descripción de ellos.

En matemáticas generalmente se trabaja con conjuntos de números. Hay varios conjuntos que ya conoces y que tienen un símbolo especial para ser representados. Así:

N : es el conjunto de los números enteros positivos (números naturales). $N = \{1,2,3,4,5,6,7,...\}$

Z : es el conjunto de los números enteros (los negativos cero y los positivos).
$Z = \{...,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,...\}$

(En estos conjuntos, los tres puntos significan que los conjuntos contienen más elementos que aquellos que se han enlistado. Estos tres puntos son un signo para todos los elementos que no han sido incluidos, pero que podemos enlistar ya que es posible encontrar un patrón y con él conocer los elementos que son omitidos).

Ahora podemos definir mucho más conjuntos que antes de una manera simplificada. Por ejemplo, si D es el conjunto de números naturales menores que 100; este conjunto se puede obtener en la forma descriptiva a partir del conjunto N con una condición: ser menor que 100. Se puede simplificar la representación utilizando símbolos matemáticos, así:

$$D = \{x \in N \mid x < 100\}$$

Y si ahora, E es el conjunto de los números enteros mayores que -5, entonces E se puede simbolizar en la forma descriptiva como:

$$E = \{x \in Z \mid x > -5\}$$

Observación 3. Los conjuntos expresados en forma descriptiva, algunas veces, nos evita escribir conjuntos que poseen una gran cantidad de elementos.

1-3 CARDINALIDAD.

El número de elementos contenidos en un conjunto determinan la "cardinalidad" del conjunto.

En el caso del conjunto $A = \{1,3,5,7,9\}$ su cardinalidad será 5 y la expresamos así:

$$\#(A) = 5$$

que se lee: "la cardinalidad del conjunto A es igual a 5".

En el conjunto D, donde $D = \{x \in N \mid x < 100\}$, la cardinalidad será 99 y la expresamos como :

$$\#(D) = 99$$

1-4 CONJUNTOS FINITOS E INFINITOS.

Los conjuntos pueden ser "finitos o infinitos". Los conjuntos A, B, C y D enumerados anteriormente tienen una propiedad común: todos son conjuntos finitos. El término "conjunto finito" debe definirse muy cuidadosamente, aunque en nuestro caso resulta suficiente decir que un conjunto es finito si sus elementos pueden enlistarse del primero al último, es decir, si el proceso de contar los diferentes elementos del conjunto puede acabar, (o sea, si su cardinalidad es cero o bien un número natural).

Un conjunto que no es finito se dice que es infinito. Los conjuntos

$$F = \{0,1,2,3,4,5...\}$$
$$G = \{x \in N \mid x \text{ es par}\}$$
$$H = \{5,10,15,20,25...\}$$

son ejemplos de conjuntos infinitos.

1-5 CONJUNTO VACIO.

De gran utilidad en las operaciones con conjuntos es el concepto de "conjunto vacío".

El conjunto "vacío" o "nulo" es el conjunto para el cual ningún elemento satisface la condición dada, por lo tanto, carece de elementos y se representa por el símbolo $\emptyset$, o bien, { }. Los conjuntos

$$I = \{ x \in Z \mid 2 < x < 3 \}$$
$$J = \{ x \mid x \text{ es una persona viviente mayor de 200 años} \}$$
$$K = \{ x \in N \mid x < 1 \}$$

son ejemplos de conjuntos vacíos o nulos.

Observación 4. La cardinalidad de $\emptyset$ es cero, o sea que $\#(\emptyset) = 0$, por lo tanto, el conjunto vacío es un conjunto finito.

Observación 5. Conviene aclarar que los símbolos $\{0\}$ y $\{\emptyset\}$, no representan al conjunto vacío. El conjunto $\{0\}$ contiene un elemento, el número cero. El conjunto $\{\emptyset\}$ tiene también un elemento que es el conjunto vacío: es un conjunto de conjuntos.

1-6 CONJUNTO UNIVERSAL.

El "conjunto universal" es el conjunto que consiste en la totalidad de los elementos considerados para determinada operación, asunto, cuestión o especie a la que se esté haciendo referencia.

Así, el conjunto de los números enteros formará el conjunto universal cuando se discute acerca de los números impares; el conjunto de todas las letras del abecedario formará el conjunto universal cuando se discute acerca de las vocales; y la

población mundial será el conjunto universal para cualquier relación humana que se produzca.

Usualmente se reserva la letra "U" para representar el conjunto universal.

Observación 6. Es importante establecer desde un principio de la discución el conjunto universal, para eliminar posibles dudas en la definición de conjuntos.

1-7 CONJUNTOS EQUIVALENTES.

Si dos conjuntos poseen la misma cardinalidad, se dice que son "conjuntos equivalentes", ya que tienen el mismo número de elementos y puede establecerse entre ambos una correspondencia de uno a uno o biunívoca. O sea que, si A y B son dos conjuntos y $\#(A) = \#(B)$, entonces este hecho puede expresar como:

$$A \leftrightarrow B$$

(El símbolo " $\leftrightarrow$ ", se utiliza para expresar la relación de equivalencia entre dos conjuntos).

Así los conjuntos $A = \{1,3,5,7,9\}$ y $B = \{a,e,i,o,u\}$ son equivalentes $(A \leftrightarrow B)$, ya que se puede establecer la correspondencia buinívoca:

1	$\leftrightarrow$	a		3	$\leftrightarrow$	a		
3	$\leftrightarrow$	e		5	$\leftrightarrow$	e		
5	$\leftrightarrow$	i	ó	7	$\leftrightarrow$	i		etc.
7	$\leftrightarrow$	o		9	$\leftrightarrow$	o		
9	$\leftrightarrow$	u		1	$\leftrightarrow$	u		

Por lo tanto, se dice que dos conjuntos están en "correspondencia buinívoca" o de uno a uno, cuando a cada elemento de uno de los conjuntos le corresponde un elemento del otro conjunto y ningún elemento de cualquiera de los dos conjuntos deja de tener su elemento correspondiente.

1-8 CONJUNTOS IGUALES.

Se dice que el conjunto A es "igual" al conjunto B si ambos contienen exactamente los mismos elementos. Se denota la igualdad de los conjuntos A y B por:

$$A = B$$

Por ejemplo, si $L = \{1,2,3.4\}$ y $M = \{2,1,4,3\}$, entonces $L = M$, es decir, $\{1,2,3,4\} = \{2,1,4,3\}$ ya que ambos conjuntos tienen los mismos elementos. Por lo tanto, de acuerdo a la definición, el orden en que se enumeran o enlistan o describen los elementos no es importante.

Observación 7. Es muy importante hacer notar la diferencia entre conjuntos equivalentes y conjuntos iguales; dos conjuntos son equivalentes cuando tienen la misma cardinalidad - aunque sus elementos sean diferentes, mientras que dos conjuntos iguales siempre son también equivalentes, pues teniendo los mismos elementos tendrán siempre la misma cardinalidad.

Cuando dos conjuntos no son iguales, o sea que, tienen - elementos que los distinguen, entonces se dice que los conjuntos son "diferentes" ($A \neq B$). Por ejemplo, los conjuntos $\{a,b,c,d\}$ y $\{c,d,e,f\}$ son diferentes.

Cuando dos conjuntos no tienen elementos comunes, o sea que, difieren en todo, entonces se dice son conjuntos "ajenos" o "disjuntos". Por ejemplo, los conjuntos $\{x,y,z\}$ y $\{1,2,3\}$ son ajenos o disjuntos.

1-9 SUBCONJUNTOS.

Veamos estos dos conjuntos

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = \{0,1,2,3,4,5\}$$

Se observa que cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B (o sea que no hay elemento de A que no esté en B); entonces se dice que "A es un subconjunto de B". Se expresa esta relación escribiendo

$$A \subset B$$

que también se puede leer como: "A está contenido en B".

Así pues, $A \subset B$, si sólo si, $x \in A$ implica que $x \in B$.

Por ejemplo, si

$$P = \{x \in N \mid x < 7\}$$
$$Q = \{2,4,6\}$$
$$R = \{1,2,3,4,5,6\}$$

Entonces se puede afirmar que $Q \subset P$, ya que todo elemento de Q pertenece también a P. Y que también, $R \subset P$, pues cada - elemento que pertenece a R pertenece también a P. (Obsérvese en particular que $R=P$. De la misma manera se puede mostrar que todo conjunto es un subconjunto de sí mismo).

Con el concepto anterior de subconjunto se puede dar de otra manera la definición de igualdad de dos conjuntos: "dos conjuntos A y B son iguales, $A = B$. si y solo si, $A \subset B$ y $B \subset A$".

Por otra parte, si el conjunto A no es un subconjunto del conjunto B, es decir, si $A \not\subset B$, entonces esto implica que existe por lo menos un elemento del conjunto A que no es elemento del conjunto B. Por ejemplo, si $S = \{1,3,5\}$ y $T= \{0,1,2,3,4\}$ entonces se cumple que $S \not\subset T$, ya que $5 \in S$ y $5 \notin T$.

Observación 8. Los símbolos "$\subset$" y "$\not\subset$" son usados únicamente para expresar la relación entre dos conjuntos.

Observación 9. Todo conjunto A es un subconjunto de sí mismo, $A \subset A$.

Observación 10. Todo conjunto A es un subconjunto del conjunto universal U, $A \subset U$.

Observación 11. El conjunto vacío $\emptyset$, se considera un subconjunto de cualquier conjunto A, $\emptyset \subset A$.

Entonces, si quisiéramos hacer una lista de todos los subconjuntos de un conjunto, por ejemplo de $V = \{1,2,3\}$, estos resultan ser: $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{2,3\}$ $\{1,2,3\}$ y $\emptyset$. A partir de lo anterior se puede observar que hay ocho subconjuntos en V.

Del mismo modo, se puede mostrar que el conjunto vacío tiene un subconjunto (él mismo), un conjunto con un elemento tiene dos subconjuntos, un conjunto con dos elementos tiene cuatro subconjuntos, etc., o sea que, el patrón general es: un conjunto de "n" elementos tiene "2^n" subconjuntos para cualquier número natural "n"; de esta forma, un conjunto que tiene seis elementos tiene 2^6, o sea, 64 subconjuntos.

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

Definir los siguientes conceptos:

1) Cardinalidad.
2) Conjunto finito.
3) Conjunto infinito.
4) Conjunto vacío o nulo.
5) Conjunto universal.
6) Conjuntos equivalentes.
7) Conjuntos iguales.
8) Conjuntos diferentes.
9) Conjuntos ajenos.
10) Subconjuntos.

Escribir las afirmaciones siguientes en notación conjuntista:

11) "x" es elemento de "A"
12) "A" no es subconjunto de "B"
13) "B" es equivalente a "C"
14) "y" no pertenece a "D"
15) "E" está contenido en "F"
16) "G" no está contenido en "H"
17) "z" pertenece a "C"
18) "D" es un subconjunto de "E"
19) El conjunto vacío
20) "w" no es elemento de "B"

Enunciar verbalmente cada uno de los sig. conjuntos:

21) {x/x habita en E.U.A.}
22) {x/x es un número par positivo}
23) {x/x es una mujer soltera mayor de 30 años}
24) $\emptyset$
25) {x/x votó por el Lic. Miguel de la Madrid Hurtado para Presidente de México}

Escribir en forma tabular cada uno de los sig. conjuntos:

26) {x/x es una letra del abecedario}
27) {x/x es una letra de la palabra "Parangaricutirimícuaro"}
28) {x ε N / x < 1}
29) {x ε N / x > 2}
30) {x ε N / 10 < x < 20}

Decir entre las afirmaciones siguientes cuáles son verdaderas o falsas, si:

A = {0,1,2,3,4}
B = {5,6,7,8,9}
C = {1,2,3,4}
D = {5,6,7}
U = {x/x es un número}

31) 5 ε A	37) 4 $\notin$ B	43) 7 ε C	49) 6 $\notin$ D	55) C ε A
32) 0 ε Ø	38) A ε Ø	44) A $\leftrightarrow$ B	50) B $\leftrightarrow$ C	56) C $\leftrightarrow$ D
33) B $\neq$ D	39) A = B	45) A $\neq$ C	51) A $\subset$ C	57) D $\subset$ B
34) A $\not\subset$ C	40) B $\not\subset$ D	46) A $\subset$ Ø	52) Ø ε U	58) 5 $\notin$ B
35) D ε B	41) Ø ε A	47) C $\subset$ A	53) Ø $\subset$ A	59) Ø $\subset$ Ø
36) 0 $\notin$ C	42) A $\subset$ B	48) A $\subset$ U	54) U $\subset$ D	60) Ø $\subset$ U

61) Los conjuntos A y C tienen la misma cardinalidad.
62) Los conjuntos B y D no tienen la misma cardinalidad.
63) Los conjuntos A y B son ajenos.
64) Los conjuntos B y D son ajenos.
65) En el conjunto A hay exactamente 24 subconjuntos.
66) En el conjunto C hay exactamente 16 subconjuntos.
67) En el conjunto D hay exactamente 6 subconjuntos.
68) Todo subconjunto de un conjunto finito es finito.
69) Todo subconjunto de un conjunto infinito es infinito.
70) Dados dos conjuntos E y F, si E $\subset$ F y F $\subset$ E entonces E=F.

Decir si cada uno de los sig. conjuntos son finitos o infinitos:

71) {0,1,2,3,4,...}
72) {1,2,3,4,5,...,1000}
73) {x ε N /x es impar}
74) {x ε N /x < 5}
75) {x ε N /3<x<4}
76) {x ε Z /x<5}

77) {x ε Z /-3<x<3}
78) {x ε N /x es un multiplo de 5}
79) {x/x es un habitante de la Tierra}
80) {x/x es una fracción y 0<x<1}

Decir si cada una de las sig. parejas de conjuntos son equivalentes o nó:

81) {Juan, José, Pedro, Raúl} y {Irma, Leticia, Rosa, María}
82) {2,3,5,7} y {x,y,z}
83) {x ε N /x es par} y {x ε N /x es impar}
84) {x ε N /x>10} y {x ε N/x<10}
85) {x ε Z /x+1=1} y Ø

Entre los pares de conjuntos siguientes, decir cuales son iguales o diferentes y especificar aquellos conjuntos que son ajenos o disjuntos.

86) {2,4,6} y {1,3,5}
87) {1,3,5,7,9} y {x ε N/x es impar y x<10}
88) {x ε N /x+1=1} y Ø
89) {a,b,c,d} y {d,c,b,a}
90) {x ε N /4<x<9} y {4,5,6,7,8,9}

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

11) $x \in A$
12) $A \not\subset B$
13) $B \leftrightarrow C$
14) $y \notin D$
15) $E \subset F$
16) $G \not\subset H$
17) $z \in C$
18) $D \subset E$
19) $\emptyset$
20) $w \notin B$
21) El conjunto de los habitantes de E. U. A.
22) El conjunto de los números pares positivos.
23) El conjunto de las mujeres solteras mayores de 30 años.
24) El conjunto vacío.
25) El conjunto de las personas que votaron por Lic. Miguel de la Madrid para Presidente.
26) $\{a,b,c,d,\ldots x,y,z\}$
27) $\{a,c,g,i,m,n,o,p,r,t,u\}$
28) $\{\ \}$
29) $\{3,4,5,6,7,\ldots\}$
30) $\{11,12,13,\ldots 18,19\}$
31) Falsa.
32) Falsa.
33) Verdadera.
34) Verdadera.
35) Falsa.
36) Verdadera.
37) Verdadera.
38) Falsa.
39) Falsa.
40) Verdadera.
41) Falsa.
42) Falsa.
43) Falsa.
44) Verdadera.
45) Verdadera.
46) Falsa.
47) Verdadera.
61) Falsa.
62) Verdadera.
63) Verdadera.
64) Falsa.
65) Falsa.
66) Verdadera.
67) Falsa.
68) Verdadera.
69) Falsa.
70) Verdadera.
71) Infinito.
72) Finito.
73) Infinito.
74) Finito.
75) Finito.
76) Infinito.
77) Finito.

48) Verdadera.
49) Falsa.
50) Falsa.
51) Falsa.
52) Falsa.
53) Verdadera.
54) Falsa.
55) Falsa.
56) Falsa.
57) Verdadera.
58) Falsa.
59) Verdadera.
60) Verdadera.

78) Infinito.
79) Finito.
80) Infinito.
81) Equivalentes.
82) No equivalentes.
83) Equivalentes.
84) No equivalentes.
85) No equivalentes.
86) Diferentes y ajenos.
87) Iguales.
88) Iguales.
89) Iguales.
90) Diferentes.

TEORÍA DE CONJUNTOS.

(Parte II)

INTRODUCCIÓN:

Al estudiar la Teoría de Conjuntos estamos capacitándonos para comprender mejor otras ramas de las matemáticas, principalmente porque los conjuntos son utilizados directamente en muchas disciplinas: sus conceptos y operaciones son tomados para llegar a otros, para simplificar la notación y para facilitar la comprensión y las demostraciones.

Además, los conceptos matemáticos de la Teoría de Conjuntos aparecen de una manera sencilla y fácil de comprender. Así, por ejemplo, al entender el concepto de "igualdad matemática" podremos después trabajar más profunda y fácilmente con ecuaciones.

Lo que vamos a estudiar, es la manera mediante la cual, los matemáticos hablan y escriben sobre ideas que todos hemos manejado intuitivamente. No se trata pues, de comprender altas abstracciones, sino de aprender a utilizar una notación matemática para escribir sobre cosas que, de hecho, estamos acostumbrados a usar.

OBJETIVOS ESPECÍFICOS:

1.- Definir los siguientes conceptos: unión, intersección, complemento, diferencia y producto cartesiano de conjuntos.