Observación 15. De acuerdo a los conceptos anteriores de unión e intersección, se verifican las siguientes propiedades:

$$\text{xi) } (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$
$$\text{xii) } (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$
$$\text{xiii) } A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$\text{xiv) } A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

"COMPLEMENTO"

El "complemento" de un conjunto A es el conjunto de elementos que no pertenecen al conjunto A, es decir, es el conjunto formado por los elementos que le faltan al conjunto A para completar el conjunto universal U. El complemento de un conjunto A en relación con el conjunto universal, se expresa como

$$A'$$

que se lee "complemento de A" o "A complemento". En la notación descriptiva de conjuntos, el complemento de un conjunto A esta dado por:

$$A' = \{x/x \notin A\}$$

El conjunto A' contiene a todos los elementos de U que no están en A. El conjunto A' depende no solamente del conjunto A sino también del conjunto que se ha escogido como U; si U cambia, A' también cambia. Se debe comprender que, por definición, el complemento de un conjunto es también un conjunto.

Por ejemplo, suponiendo que el conjunto universal sea el abecedario, es decir, $U = \{a,b,c,d,e,f,\ldots,y,z\}$ y dado $A = \{a,b,c,d\}$, entonces

$$A' = \{e,f,g,h,i,\ldots,y,z\}$$

O si se supone que el conjunto universal es el de los números naturales, $U = \{1,2,3,\ldots\}$ y $F = \{2,4,6,\ldots\}$, o sea los números pares, entonces

$$F' = \{1,3,5,\ldots\}$$. que son los impares

Observación 16. Las propiedades que se establecen en seguida, resultan directamente de la definición, del complemento de un conjunto:

$$\text{xv) } (A')' = A$$
$$\text{xvi) } A \cup A' = U$$
$$\text{xvii) } A \cap A' = \emptyset$$
$$\text{xviii) } U' = \emptyset \quad y \quad \emptyset' = U$$
$$\text{xix) } (A \cup B)' = A' \cap B'$$
$$\text{xx) } (A \cap B)' = A' \cup B'$$

"DIFERENCIA"

La "diferencia" de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto A, pero no al conjunto B, es decir, es el conjunto resultante de quitar del conjunto A los elementos que tenga el conjunto B. Se expresa la diferencia de A y B por

$$A - B$$

que se lee "A diferencia B" o simpliemente "A menos B". La diferencia de A y B se puede también definir en notación descriptiva como

$$A - B = \{x | x \in A \;\; y \;\; x \notin B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{a,b,c,d\}$ y $B = \{c,d,e,f\}$, entonces A - B es el conjunto de elementos que pertenecen a A, pero no a B, o sea,

$$A - B = \{a,b\}$$

es decir, al conjunto A se le han quitado los elementos de B. Mientras que,

$$B - A = \{e,f\}$$

o sea, B-A es el conjunto de elementos que pertenecen a B, pero no a A.

Observación 18. Con el concepto anterior de diferencia de conjuntos se puede dar de otra manera la definición de "complemento de A": el complemento del conjunto A es la diferencia del conjunto universal U y del conjunto A, o sea,

$$A' = U - A$$

Observación 19. Los conjuntos (A-B), (B-A) y ($A \cap B$) son mutuamente conjuntos ajenos, es decir, la intersección de dos cualesquiera de ellos es conjunto vacío.

Observación 20. Las propiedades que se establecen en seguida, resultan directamente de la definición de la diferencia de conjuntos:

xxi) $(A-B) \subset A$
xxii) $A - A = \emptyset$
xxiii) $A - \emptyset = A$
xxiv) $\emptyset - A = \emptyset$
xxv) $A - U = \emptyset$
xxvi) $A - B = A \cap B'$
xxvii) $A - (B \cap C) = (A-B) \cup (A-C)$
xxviii) $A - (B \cup C) = (A-B) \cap (A-C)$

Observación 21. Las operaciones de unión, intersección, complemento y diferencia tienen otras propiedades sencillas cuando uno de los conjuntos de que se trata está contenido en el otro, o sea que, un conjunto es un subconjunto de otro. A partir de las definiciones anteriores, se pueden demostrar las siguientes propiedades:

xxix) Si $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$
xxx) Si $A \subset B$, entonces $A \cap B = A$
xxxi) Si $A \subset B$, entonces $B' \subset A'$
xxxii) Si $A \subset B$, entonces $A - B = \emptyset$
xxxiii) Si $A \subset B$, entonces $A \cup (B-A) = B$

"PRODUCTO CARTESIANO"

Intuitivamente, una "pareja ordenada" consta de dos elementos, por ejemplo, "x" y "y"; que en el par de designan como primero y segundo elementos respectivamente. Un par ordenado se simboliza por

$$(x,y)$$

Dos parejas ordenadas (x,y) y (a,b) son iguales si, y solamensi, $x=a$ y $y=b$.

Por ejemplo, las parejas ordenadas (1,2) y (2,1) son diferentes. El conjunto $\{1,2\}$ no es una pareja ordenada, pues los elementos 1 y 2 no se distinguen. Y puede haber parejas ordenadas que tengan iguales el primero y el segundo elementos tales como, (0,0), (3,3) y (4,4).

Dados dos conjuntos A y B , se le llama "producto cartesiano" de A y B al conjunto de todas las parejas ordenadas (x,y) con $x \varepsilon A$ y $y \varepsilon B$. Se expresa como

$$A \times B$$

que se lee "A por B". En notación descriptiva se define por

$$A \times B = \{(x,y)/x \varepsilon A,\ y \varepsilon B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{4,5\}$; entonces el producto conjunto es

$$A \times B = \{(1,4),(1,5),(2,4),(2,5),(3,4),(3,5)\}$$

(nótese que, $BxA = \{(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$)

En el caso del producto cartesiano de un conjunto A por sí mismo se usa la notación $AxA= A^2$, o sea, si $C= \{6,7,8\}$, entonces, $C^2= \{(6,6),(6,7),(6,8),(7,6),(7,7),(7,8),(8,6),(8,7),(8,8)\}$

Observación 22. Si el conjunto A tiene "n" elementos y el conjunto B tiene "m" elementos, entonces el conjunto producto AxB tiene nxm elementos. Si uno de los conjuntos A o B es vacío, entonces AxB es vacío. Y, en fin, si uno de los dos

A o B es infinito y el otro no es vacío, entonces AxB es infinito.

Observación 23. El producto cartesiano de dos conjuntos no es conmutativo, es decir, que

$$A \times B \neq B \times A$$

a menos que $A = B$, o que uno de los factores sea vacío.

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

Definir los siguientes conjuntos usando la notación descriptiva:

1) $A \cup B$ 2) $A \cap B$ 3) A' 4) $A - B$ 5) $A \times B$

Si: $A = \{0,1,2,3\}$
$B = \{4,5,6\}$
$C = \{1,2,3,4,5,6,7\}$
$U = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ (conjunto universal)

encuentra los elementos de cada uno de los sig. conjuntos:

6) $A \cup B$
7) $A \cup C$
8) $B \cup C$
9) $A \cap B$
10) $A \cap C$
11) $B \cap C$
12) A'
13) B'
14) C'
15) $(B')'$
16) $A - B$
17) $C - B$
18) $A - C$
19) $C - C$
20) $(A \cup B)'$
21) $(B \cap C)'$
22) $(A - B)'$
23) $A \cup B'$
24) $A' \cup C$
25) $B' \cap C$
26) $A \cap (B \cap C)$
27) $(A \cap C) \cup B$
28) $(A \cap B) \cup C'$
29) $A - (C - B)$
30) $A \cap (C - B)$
31) $(A \cup C) \cap (B \cap C)$
32) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$
33) $(A \cup B) \cup (B \cup C)$
34) $(A \cap C) \cup (B \cap C)$
35) $(A' - B)'$
36) $A' - (B \cap C)$
37) $(A' \cap B') - C$
38) $(A \cap B') \cup C'$
39) $(A \cap B)' \cap C'$
40) $(A' \cap B) \cup C'$
41) $A' \cap (B \cup C)$
42) $A \cup (B \cup C)'$
43) $A' \cup (B' \cap C')$
44) $(A-C)' \cap B'$
45) $C' \cap (A' \cup B')$
46) $(A - B)' \cap (C - B)$
47) $(A - B) \cup (C - B)'$
48) $C' \cap (A \cup B)'$
49) $(A \cap B') \cap U$
50) $(A' \cup B) \cap \emptyset$
51) $A \cup (B' \cap C')$
52) $A \times B$
53) $B \times A$
54) A^2
55) B^2

Decide si cada una de las siguientes afirmaciones son ve daderas o falsas: (Se puede considerar que los conjuntos A, B C y U son los mismos que para los problemas anteriores).

56) $(A \cup B) \subset A$
57) $(B \cap C) \subset C$
58) $(A - C) \subset (A \cup C)$
59) $(C - A) \subset A'$
60) $A \cup B = B \cup A$
61) $A \cup A = U$
62) $A \cup \emptyset = \emptyset$
63) $A \cup U = A$
64) $A \cap A = A$
65) $A \cap \emptyset = A$
66) $A \cap A' = U$
67) $\emptyset' = U$
68) $(A \cup B)' = A' \cap B'$
69) $(A \cap B)' = A' \cap B'$
70) $U - A = A'$
71) $A-B = A \cap B'$
72) $(A')' = \emptyset$
73) $A \cap C = A - C$
74) $B - B = \emptyset$
75) $A - C = C - A$
76) $A' - C' = C - A$
77) $A \cup B = (A' \cap B')'$
78) $A - C' = A \cap C$
79) $(A - B) \cap B = \emptyset$
80) $(A \cap B) \cup B = B$
81) $(C - A) \cap (A - C) = \emptyset$
82) $A \cup (B - C) = (A \cup B) - C$
83) $A \cup (B \cup C) \neq (A \cup B) \cap C$
84) $A - (B \cap C) = (A-B) \cap (A-C)$
85) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
86) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
87) Si $B \subset C$, entonces $B \cup C=C$
88) Si $B \subset C$, entonces $B \cap C=C$
89) Si $B \subset C$, entonces $B' \subset C'$
90) Si $B \subset C$, entonces $B-C=B$
91) Si $B \subset C$, entonces $B \cup (C-B)=C$
92) Si $A \cap B=\emptyset$, entonces $A \subset B'$
93) Si $A \cap B=\emptyset$, entonces $A' \cap B=B$
94) Si $A \cap B=\emptyset$, entonces $A \cup B'=B$
95) Si $A \cap B=\emptyset$, entonces $A - B=\emptyset$

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 2.

1) $\{x/x \in A \text{ o } x \in B\}$
2) $\{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$
3) $\{x/x \notin A\}$
4) $\{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$
5) $\{(x,y)/x \in A \text{ y } y \in B\}$
6) {0,1,2,3,4,5,6}
7) {0,1,2,3,4,5,6,7}
8) {1,2,3,4,5,6,7}
9) $\emptyset$
10) {1,2,3}
11) {4,5,6}
12) {4,5,6,7,8,9}
13) {0,1,2,3,7,8,9}
14) {0,8,9}
15) {4,5,6}
16) {0,1,2,3}
17) {1,2,3,7}
18) {0}
19) $\emptyset$
20) {7,8,9}
21) {0,1,2,3,7,8,9}
22) {4,5,6,7,8,9}
23) {0,1,2,3,7,8,9}
24) {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
25) {1,2,3,7}
26) $\emptyset$
27) {1,2,3,4,5,6}
28) {0,8,9}
29) {0}
30) {1,2,3}
31) {4,5,6}
32) $\emptyset$
33) {0,1,2,3,4,5,6,7}
34) {1,2,3,4,5,6}
35) {0,1,2,3,4,5,6}

36) {7,8,9}
37) {8,9}
38) {0,1,2,3,8,9}
39) {0,8,9}
40) {0,4,5,6,8,9}
41) {4,5,6,7}
42) {0,1,2,3,8,9}
43) {0,4,5,6,7,8,9}
44) {1,2,3,7,8,9}
45) {0,8,9}
46) {7}
47) {0,1,2,3,4,5,6,8,9}
48) {8,9}
49) {0,1,2,3}
50) Ø
51) {0,1,2,3,8,9}
52) {(0,4),(0,5),(0,6),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5) (2,6), (3,4),(3,5),(3,6)}
53) {(4,0),(4,1),(4,2),(4,3),(5,0),(5,1),(5,2),(5,3),(6,0), (6,1),(6,2),(6,3)}
54) {(0,0),(0,1),(0,2),(0,3),(1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(2,0), (2,1),(2,2),(2,3),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)}
55) {(4,4),(4,5),(4,6),(5,4),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)}
56) F
57) V
58) V
59) V
60) V
61) F
62) F
63) F
64) V
65) F
66) F
67) V
68) V
69) F
70) V
71) V
72) F
73) F
74) V
75) F
76) V
77) V
78) V
79) V
80) V
81) V
82) F
83) F
84) F
85) V
86) V
87) V
88) F
89) F
90) F
91) V
92) V
93) V
94) V
95) F

TEORIA DE CONJUNTOS.

(PARTE III)

INTRODUCCION:

La Matemática es un cuerpo altamente organizado de conocimiento que usa el concepto de conjunto como uno de sus vehículos primarios para organización. El conjunto es una abstracción que permite una sistematización más eficiente y presentación de los elementos en un curso de matemáticas.

El concepto de conjunto es de alguna manera intuitivo. Generalmente, un conjunto se considera como una colección de objetos o cosas llamados elementos. Se puede pensar de un conjunto como un club de reglas de membrecía y miembros que se - llaman elementos. Por ejemplo, para pertenecer al conjunto de números mayores que cuatro, un elemento debe primero ser un número y segundo, tener un valor o magnitud mayor que cuatro. El tamaño de cualquier conjunto se determina por el número de miembros o elementos. El conjunto de los números naturales menores que cuatro tiene exactamente tres miembros y se llama un conjunto finito. El conjunto de los números naturales más grandes que cuatro tiene una lista indefinida de miembros y se dice que es infinita en tamaño.

Las varias relaciones que pueden existir entre los conjuntos pueden ilustrarse por medio de un diagrama de Venn. El diagrama de Venn es un esquema que representa a los conjuntos como sub-regiones de una región geométrica. Fue empleado por el Logista inglés John Venn (1834-1883) y se usarán en esta - unidad III para ayudar al entendimiento conceptual de las operaciones con conjuntos. Con el objeto de emplear el diagrama