1-13 ALGEBRA DE CONJUNTOS.

Las operaciones de unión, intersección y de complemento entre conjuntos cumplen varias leyes, es decir, verifican ciertas identidades. Hay una rama de las matemáticas que se dedica a investigar la Teoría de Conjuntos, estudiando aquellos teoremas cuya demostración requiere de estas leyes y solo de ellas. Se dirá que las leyes de la siguiente tabla y sus consecuencias, constituyen el álgebra del conjunto.

LEYES DEL ALGEBRA DE CONJUNTOS:

1. Leyes de Idempotencia.

   $A \cup A = A$ $\qquad$ $A \cap A = A$

2. Leyes Asociativas.

   $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $\qquad$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

3. Leyes Conmutativas.

   $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ $A \cap B = B \cap A$

4. Leyes Distributivas.

   $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
   $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. Leyes de Identidad.

   $A \cup \emptyset = A$ $\qquad$ $A \cap \emptyset = \emptyset$
   $A \cup U = U$ $\qquad$ $A \cap U = A$

6. Leyes de Complemento.

   $A \cup A' = U$ $\qquad$ $(A')' = A$ $\qquad$ $A \cap A' = \emptyset$
   $U' = \emptyset$ $\qquad$ $\emptyset' = U$

7. Leyes de DeMorgan.

   $(A \cup B)' = A' \cap B'$ $\qquad$ $(A \cap B)' = A' \cup B'$

Es de notar que el concepto de "elemento" y la relación "x pertenece a A", no aparecen en ninguna parte de la tabla anterior. Aunque estos conceptos eran esenciales para el desarrollo previo de la Teoría de Conjuntos, no aparecen al investigar el álgebra de conjuntos. La relación "A es un subconjunto B", se define en esta álgebra de conjuntos por

$$A \subset B, \text{ significa que } A \cap B = A$$

Por medio de ejemplos, se demuestran tres teoremas de esta álgebra de conjuntos, es decir, se demuestran los tres teoremas siguientes que se deducen directamente de las leyes de la tabla anterior.

Demostrar: si $A \subset B$ y $B \subset C$, entonces $A \subset C$

Preposición	Justificación
a) $A = A \cap B$	a) Definición de subconjuntos.
b) $B = B \cap C$	b) Definición de subconjuntos.
c) $\therefore A = A \cap (B \cap C)$	c) Sustituyendo b) en a)
d) $A = (A \cap B) \cap C$	d) Ley asociativa.
e) $A = A \cap C$	e) Sustituyendo a) en d)
f) $\therefore A \subset C$	f) Definición de subconjuntos.

Demostrar: $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A$

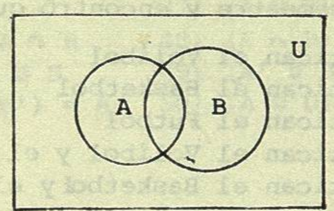
Preposición	Justificación
a) $(A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup (B \cap B')$	a) Ley distributiva.
b) Si $B \cap B' = \emptyset$	b) Ley de complemento.
c) $\therefore (A \cup B) \cap (A \cup B') = A \cup \emptyset$	c) Sustitución.
d) Si $A \cup \emptyset = A$	d) Ley de identidad.
e) $\therefore (A \cup B) \cap (A \cup B') = A$	e) Sustitución.

Demostrar: $(A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = B'$

Preposición	Justificación
a) $(A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = (A' \cap B') \cup (A'' \cap B')$	a) Ley de DeMorgan.
b) Si $A'' = A$	b) Ley de complemento.
c) $\therefore (A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = (A' \cap B') \cup (A \cap B')$	c) Sustitución.
d) $(A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = B' \cap (A' \cup A)$	d) Ley distributiva.
e) Si $A' \cup A = U$	e) Ley de complemento.
f) $\therefore (A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = B' \cap U$	f) Sustitución.
g) Si $B' \cap U = B'$	g) Ley de identidad.
h) $\therefore (A \cup B)' \cup (A' \cup B)' = B'$	h) Sustitución.

AUTOEVALUACION DE LA LECCIÓN 3.

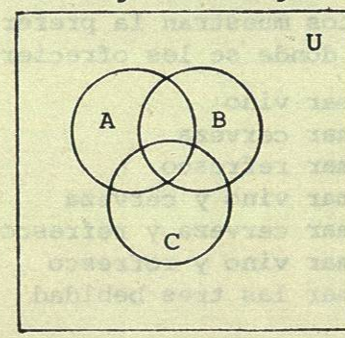
Para cada uno de los problemas del 1 al 15, haga un trazo semejante al de la siguiente figura:



y luego sombree únicamente el área que representa al conjunto indicado. En caso de que sea conjunto vacío, no sombree, y escriba por un lado su símbolo.

1) $A \cup B$	6) $B - A$	11) $A' \cup B'$
2) $A \cap B$	7) $A' - B$	12) $A' \cap B'$
3) $(A \cup B)'$	8) $A - B'$	13) $(A \cap B) \cup B'$
4) $(A \cap B)'$	9) $A' \cap B$	14) $(A \cup B) \cap B'$
5) $A - B$	10) $A \cup B'$	15) $(A \cup B) \cap (A \cap B)'$

Para cada uno de los problemas del 16 al 30, haga un trazo semejante al de la siguiente figura



y luego sombree únicamente el área que representa al conjunto indicado. En caso de que sea conjunto vacío, no sombree, y escriba por un lado su símbolo.

16) $A \cup (B \cup C)$
17) $A \cap (B \cap C)$
18) $(A \cap C) \cup B$
19) $A \cup (B \cap C)$
20) $(A \cap B) \cup (A \cap C)$
21) $A - (B \cup C)$
22) $(A \cap B) - C$
23) $(A' \cup B')' \cup C$
24) $A' \cap (B \cap C)$
25) $(A \cap C') \cup B$
26) $(A' \cap B) \cup C$
27) $(A' \cap B') \cap C$
28) $(A \cap C') \cap B$
29) $(A \cap B') \cap C$
30) $(A' \cap C') \cap B$

La coordinación de Deportes de la escuela investigó a 100 alumnos de primer semestre y encontró que

a 34 alumnos practican el Volibol
a 45 alumnos practican el Basketbol
a 60 alumnos practican el Futbol
a 13 alumnos practican el Volibol y el Basketbol
a 19 alumnos practican el Basketbol y el Futbol
a 18 alumnos practican el Volibol y el Futbol
y a 7 alumnos practican los tres deportes

31) ¿Cuántos estudiantes practican el Volibol y ninguno de los otros dos?
32) ¿Cuántos estudiantes no practican ninguno de estos tres deportes?
33) ¿Cuántos estudiantes practican el Futbol pero ninguno de los otros dos deportes?
34) ¿Cuántos estudiantes practican el Volibol y el Basketbol pero no el Futbol?
35) ¿Cuántos estudiantes no practican el Basketbol?

Los siguientes datos muestran la preferencia de 100 personas en una fiesta en donde se les ofrecieron bebidas

a 45 les gusta tomar vino
a 50 les gusta tomar cerveza
a 35 les gusta tomar refresco
a 12 les gusta tomar vino y cerveza
a 13 les gusta tomar cerveza y refresco
a 11 les ugsta tomar vino y refresco
y a 5 les gusta tomar las tres bebidad

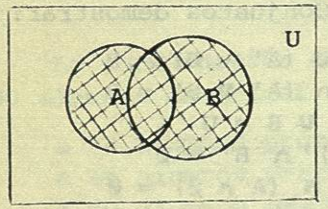
¿A cuántas de estas personas les gusta?
36) Ninguna de las tres bebidas.
37) El vino pero no la cerveza.
38) Cualquiera pero no los refrescos.

39) Únicamente la cerveza.
40) Únicamente los refrescos.

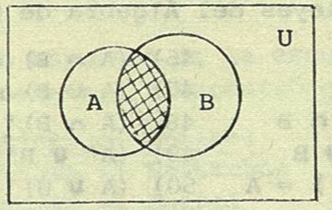
Utilizando las leyes del Álgebra de Conjuntos demostrar:

41) $A \cap (A \cup B) = A$
42) $A \cup (A \cap B) = A$
43) $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$
44) $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
45) $(A \cap B) \cup (A \cap B') = A$
46) $(A \cap B) \cup (A' \cap B) = B$
47) $(A \cup B) \cap (A' \cup B) = B$
48) $(A \cap B)' \cup B = U$
49) $(A' \cup B')' \cap B' = \emptyset$
50) $(A \cup U)' \cap (A \cap \emptyset)' = \emptyset$

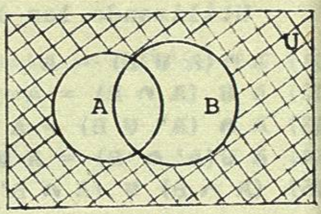
RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 3.



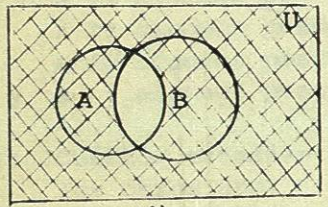
1)



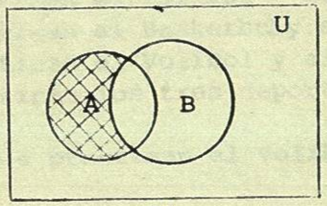
2)



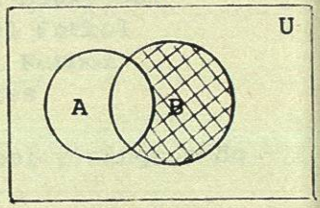
3)



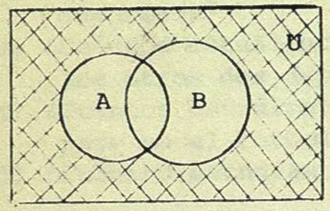
4)



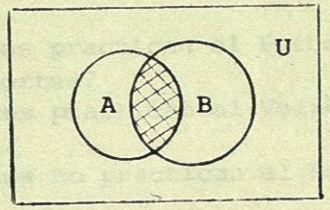
5)



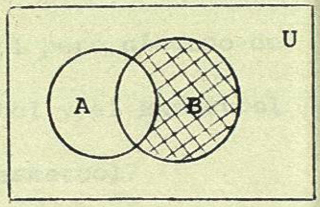
6)



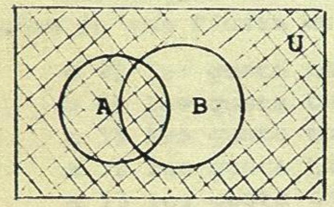
7)



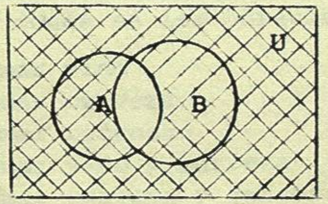
8)



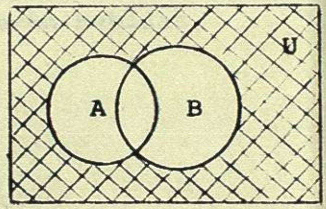
9)



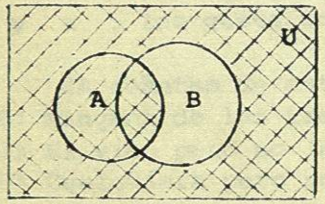
10)



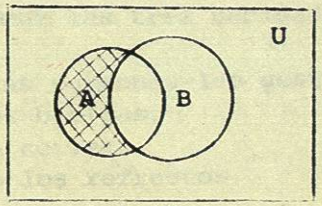
11)



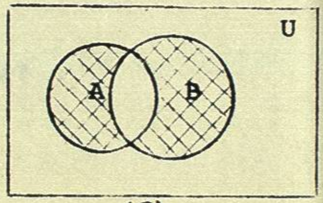
12)



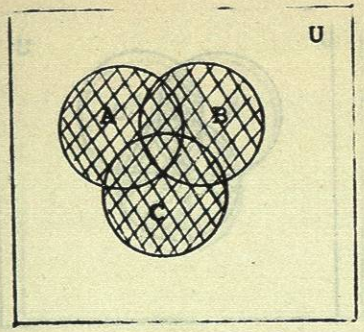
13)



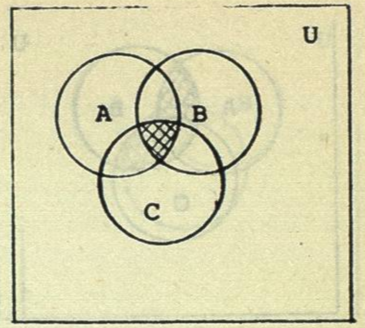
14)



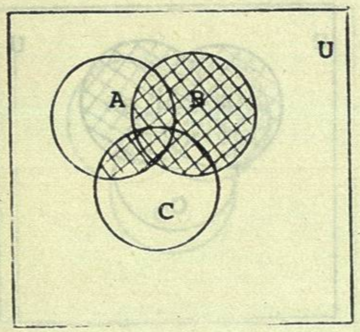
15)



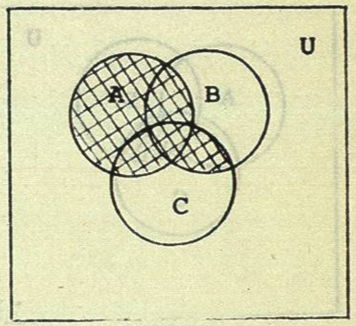
16)



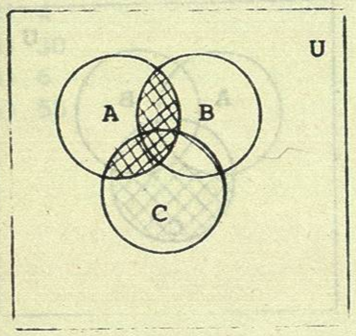
17)



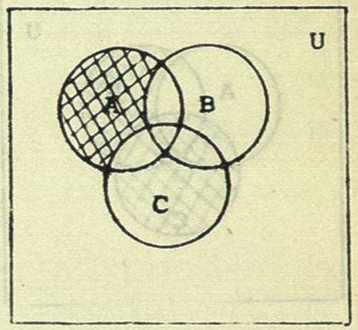
18)



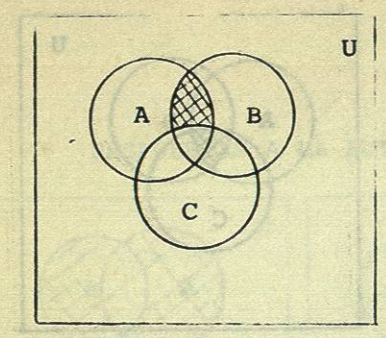
19)



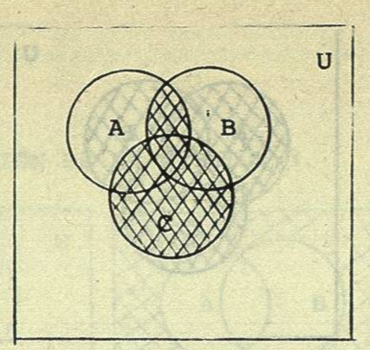
20)



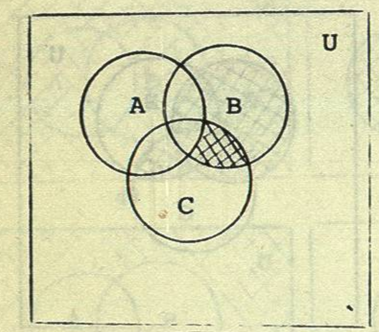
21)



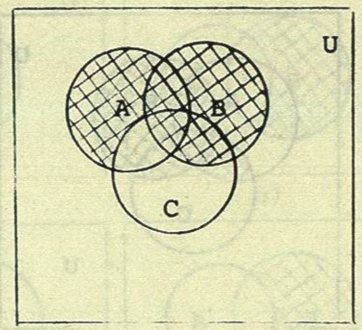
22)



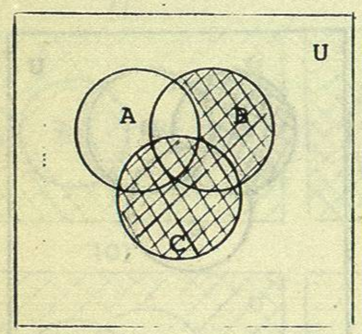
23)



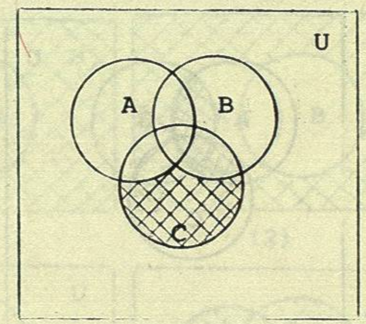
24)



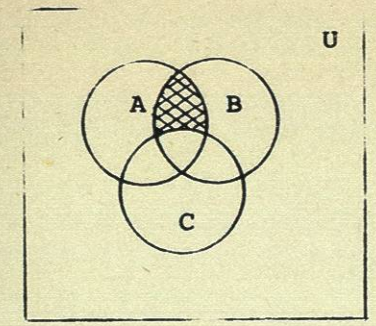
25)



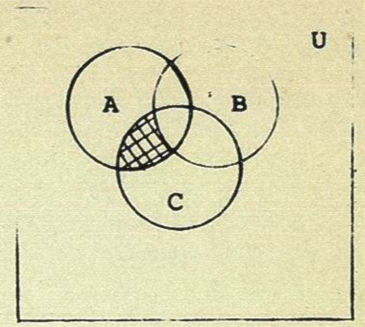
26)



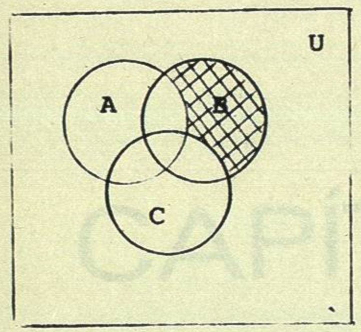
27)



28)



29)



30)

31) 10
32) 4
33) 30
34) 6
35) 55

36) 1
37) 33
38) 64
39) 30
40) 16