LOS NUMEROS REALES Y LA RECTA NUMÉRICA.

INTRODUCCIÓN.

En esta unidad veremos cómo representar a los números reales a través de una recta numérica. La representación de todos los números reales por puntos sobre una línea es un concepto básico de las matemáticas.

Aprende a excelencia esta unidad, ya que al final de la misma deberás ser capaz de:

OBJETIVOS.

1.- Explicar brevemente en qué consiste el conjunto de los números reales.

2.- Explicar el significado de correspondencia biunívoca de los números reales.

3.- Encontrar correctamente las coordenadas de los números reales en la escala numérica.

4.- Explicar brevemente, los conjuntos de números racionales e irracionales, enlistando los subconjuntos de cada uno de ellos.

5.- Explicar brevemente los significados de proposición abierta, variable, dominio de la variable y conjunto solución.

6.- Encontrar correctamente el conjunto solución de cualquier proposición abierta.

7.- Localizar gráficamente el conjunto solución de cualquier proposición abierta en la escala numérica.

PROCEDIMIENTO.

1.- Estudia la lección 1 del capítulo II de tu libro de texto. Antes de empezar a contestar tus objetivos dale una leída a toda la lección.

2.- Estudia y practica tus ejemplos antes de resolver las autoevaluaciones que se incluyen en la lección, y consulta inmediatamente cualquier duda que tengas con tu maestro asesor.

3.- Al final de la unidad se incluye una autoevaluación de repaso general de la lección, misma que deberás resolver, solamente y cuando hayas termiando de resolver tus objetivos relacionados con las preguntas en que te hayas equivocado.

4.- Como requisito para tener derecho a presentar esta unidad, deberás entregar totalmente contestado el laboratorio de la unidad a tu maestro asesor.

AUTOEVALUACION.

Contesta las siguientes preguntas que hagan cierta la proposición.

1.- Otro nombre para el conjunto de números para contar es el conjunto de ______________, es decir {________________}

2.- En los números naturales no hay último o mayor número; es decir, hay un cantidad ______________ de números naturales.

3.- Al número asociado con un punto en la recta numérica se le llama su ______________.

4.- El 0 no es un número natural. Cuando consideramos el 0 junto con los números naturales, llamamos a este conjunto el de los ______________, es decir {0,1,2,3,4,...}

5.- El conjunto de los números enteros es el que tiene por subconjuntos el conjunto de los ______________, ______________ y ______________.

6.- Un número ______________ es aquel que puede escribirse en la forma a/b, en donde a y b son enteros, y $b \neq 0$.

7.- El conjunto de los números ______________ e ______________ forman el conjunto de los números reales.

8.- El conjunto de los números racionales es un subconjunto del conjunto de los ______________.

9.- ¿Cuáles de los siguientes números

$-4,\ 0,\ -1/3,\ \sqrt{5},\ 3/8,\ 2,\ \pi$

son:

a) Números naturales. b) Números enteros.
c) Números racionales. c) Números irracionales.
d) Números reales.

10.- Existen números tales como $\sqrt{2}$ ó $\sqrt{5}$ que no pueden expresarse ni como una decimal exacta ni como una decimal que se repite (periódica). A este conjunto de números se les llama el conjunto de los ______________.

11.- Los números reales son o ______________ o ______________. Es decir, el conjunto de los números reales consiste en la unión del conjunto de los ______________ y el conjunto de los __________. Expresado en símbolos:

$$\{x | x \in | R\} = \{y | y \in | Q\} \cup \{z | z \in | S\}$$

12.- El conjunto de números cardinales es ordenado; en una recta numérica cualquier número cardinal es menor que el otro si su punto correspondiente está a ______________ del otro, y es mayor que él si está su ______________.

13.- El conjunto de puntos de una recta numérica asociado con los elementos del conjunto de los números reales, recibe el nombre de ______________ de ese conjunto de números.

14.- Así pues, a todo punto de la recta numérica le corresponde un número ______________ único (racional o irracional); y recíprocamente, a cada número real se le puede asociar con un punto único de la recta numérica. Es decir están en ______________.

15.- En cambio, para los números racionales y la recta numérica no se puede establecer la correspondencia biunívoca, pues, aún cuando existen infinidad de fracciones entre dos enteros consecutivos (propiedad de densidad), sin embargo hay "huecos" entre las coordenadas racionales que son presisamente el conjunto de ______________.

16.- Una ______________ es el enunciado de que dos expresiones numéricas designan el mismo número.

17.- A una igualdad se le llama también una ______________.

18.- Los símbolos de relación de orden son ________ y ______. Con relación a la recta numérica, un número es menor que (____) otro si en la recta numérica está a la izquierda del otro. Un número es ________________ (____) otro si está a la derecha del segundo número.

19.- En la recta numérica todos los números a la izquierda de uno en particular son ______________ y hacia la derecha son ______________.

20.- Una ______________ es una proposición que contiene una o más variables.

21.- Una ______________ es un símbolo, generalmente una letra, que ponemos en lugar del nombre de uno cualquiera de los elementos de un conjunto dado.

22.- Cualquier conjunto cuyos elementos pueden ser usados para sustituir a una variable, se llama ______________.

23.- El conjunto sustitución para una variable se llama ______________ de la variable.

24.- El ______________ de una proposición abierta es el subconjunto de la variable que hace cierta la proposición.

25.- La ______________ del conjunto solución de una proposición abierta en una variable es el conjunto de todos los puntos en la recta numérica cuyas coordenadas son los números que hacen cierta la proposición.

Colocar los símbolos "=", ">" ó "<", en el lugar del signo de interrogación (?) de tal manera que hagan cierta la proposición.

26.- -8 ? 8

27.- 3 ? -3

28.- 0 ? 5

29.- 9 ? -3

30.- -7 ? -1

31.- -1 ? 0 ? 3

32.- -1 ? -3 -5

Sea $-4 < x < 3$. Bajo esta proposición, contesta lo si--guiente:

33.- ¿Cuántos números naturales satisfacen esta desigualdad?

34.- ¿Cuántos números enteros satisfacen esta desigualdad?

35.- ¿Cuántos números reales satisfacen esta desigualdad?

Expresar en palabras, cada uno de los siguientes conjun-tos:

36.- $\{x|x + 3 = 10, x \varepsilon N\}$

37.- $\{z|2z - 3 \geq 5, z \varepsilon Z\}$

38.- $\{y|4 \geq y \geq 2, y \varepsilon S\}$

NÚMEROS REALES.

LECCIÓN 1.

2-1 EVOLUCIÓN DE LOS NUMEROS REALES.
(R) Y LA RECTA NUMÉRICA.

Vamos a tratar en esta sección que el estudiante vea más claramente el desarrollo del conjunto de los números Reales. Supondremos que es cierto lo què vamos a ver y más delante - daremos propiedades y demostraciones.

Los números Naturales (N). *(Enteros positivos)*

Como ya se vió, los números naturales nacieron de la idea de contar. Fueron los pirmeros números y podemos agregar siempre 1 a cualquier número natural y se obtiene el siguien te, o sea, el número que le sigue inmediatamente. Representa remos al conjunto de los número naturales como:

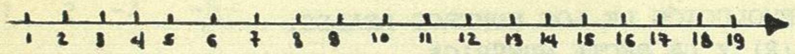
$$N = \{ 1,2,3,4,... \} .$$

Los puntos suspensivos indican que hay un número infini-to de números naturales.

Al contar los estudiantes de un salón de clases, no se señala al primer estudiante diciendo: "este es el estudiante "0". El cero no es un número para contar, y por lo tanto el "0" no pertenece al conjunto de números naturales, tal como lo definimos. Para incluir al o con el conjunto de números naturales, formamos un nuevo conjunto que lo definimos como el conjunto de los números cardinales. De tal suerte que:

(K) El conjunto de los números cardinales $=\{0,1,2,3,...\}$
o bien, $N \subset K$ *(Enteros no negativos)*

Representación gráfica de los números naturales. Cuando pensamos en números, encontramos útil asociarlos con puntos en una recta. Para ello escogemos dos puntos convenientes sobre la recta y le ponemos al punto de la izquierda el número 1 y al punto de la derecha el número 2; y luego usando la distancia entre 1 y 2 como unidad de medida marcamos la línea recta indefinidamente.



La flecha indica que "una cantidad infinita de puntos podemos asociar con los números naturales. Esta recta, cuyos puntos los hemos asociado con números, se le llama *recta numérica o escala numérica.* Así tenemos que: a) al número asociado con un punto en particular se le llama *coordenada* de dicho punto; y b) al punto asociado con un número se le llama *gráfica* de ese número.

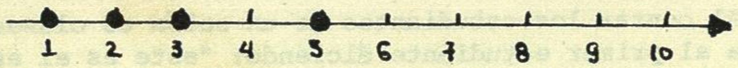
Como todo número natural puede asociarse con un punto de una recta numérica, esto nos permite localizar elementos del conjunto de números naturales sobre una recta numérica y viceversa, el conjunto de puntos asociados con los elementos de un conjunto de números forma la *gráfica del conjunto.*

EJEMPLO:

Dado $A = \{1,2,3,5\}$, dibujar la gráfica de A. $(A \in N)$

Solución:

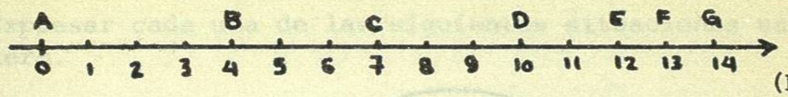
Dibujamos una escala numérica.



Sobre la recta numérica dibujamos los elementos del conjunto y marcamos los puntos localizados en esta forma. Nótese que solamente marcamos los puntos asociados con elementos del conjunto.

AUTOEVALUACION 1.

1.- Dar las coordenadas de los puntos siguientes:



(K)

a) F b) C c) E

2.- Bajo la recta numérica anterior contesta lo siguiente:

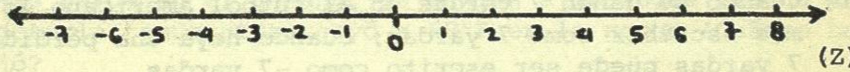
a) Dar la coordenada del punto medio entre A y B.

b) Dar las coordenadas de los números cardinales a la izquierda de D.

c) Dar las coordenadas de los números cardinales entre A y D que son múltiplos de 4.

El conjunto de los números enteros. (Z)

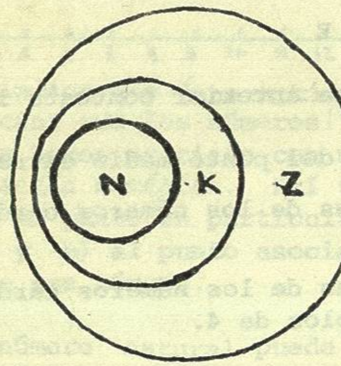
Hasta ahora hemos estudiado el conjunto de los números cardinales, que incluyen los números naturales y 0. Sabemos que este conjunto puede ser asociado con los puntos de una recta, llamada la recta numérica. Hemos considerado la recta numérica como partiendo de 0 y extendiéndose hacia la derecha indefinidamente. Claramente, una recta se extiende indefinidamente hacia la izquierda. Para ello seguiremos el mismo esquema anterior. Usando el intervalo de 0 a 1 como intervalo unitario, marcamos



(Z)

puntos igualmente espaciados a lo largo de la recta de la izquierda. Al primer punto le denominamos -1, al segundo -2, etc., donde el símbolo "-1" se lee "1 negativo" etc. Así pues, la coordenada del punto 4 a la izquierda de 0 es el "4 negativo" o -4. Hemos creado entonces un nuevo conjunto que con los cardinales forman el conjunto de los números enteros.

Así, el conjunto de los números enteros está formado por el conjunto de los números cardinales, junto con el conjunto $\{-1,-2,-3,\ldots\}$, o sea $= \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$ es decir, $(N \subset K) \subset Z$. Representado por diagramas tendríamos que



Usaremos la letra Z para simbolizar el conjunto de los números enteros. Los enteros a la izquierda del 0 se llaman *enteros negativos* y los de la derecha del 0 son llamados enteros positivos.

El conjunto de los números enteros se usa a menudo para indicar cosas opuestas. Por ejemplo:

a) Sacar del banco \$10 podemos escribirlo como -10 pesos; un depósito de \$10 como 10 pesos.

b) Cuando se ganan 7 yardas en el futbol americano lo podemos escribir como 7 yardas; cuando haya una pérdida de 7 yardas puede ser escrito como -7 yardas.

AUTOEVALUACION 2.

Expresar cada una de las siguientes situaciones usando un entero.

1.- Una pérdida de 12.

2.- 200 pies arriba del nivel del mar.

3.- Un beneficio de \$15

4.- Un gasto de \$8

En las siguientes parejas de puntos ¿cuál punto queda a la derecha del otro sobre la recta numérica?

5.- 10, -4

6.- 3, 6

7.- -2, -4

8.- -4, 0

9.- 9, 4

10.- 1, -2

11.- Cierto día de invierno la temperatura subió a 20° de -2° ¿Cuál fue la temperatura final?

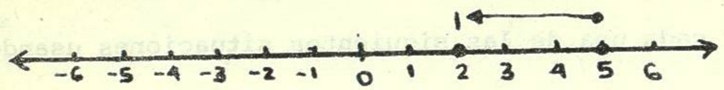
12.- Al acercarse la primavera, la temperatura subió un día de -10° a 35°. ¿Cuántos grados subió?

13.- Más tarde en el verano, la máxima a mediodía fue de 84°F, pero la temperatura cayó a 68°F en la noche ¿Cuánto bajó?

Usar la recta numérica para efectuar las operaciones siguientes; en cada caso dar la coordenada del punto que resulta.

EJEMPLO:

Comenzar en 5 y moverse 3 unidades a la izquierda



coordenada que resulta: 2

14.- Empezar en 0 y moverse 3 unidades a la izquierda.

15.- A partir del -1, moverse 3 unidades a la izquierda.

16.- Comenzar en 2 y moverse 2 unidades a la derecha, y después 5 unidades a la derecha.

17.- A partir del 5, moverse 3 unidades a la izquierda y después 4 unidades a la izquierda.

En los problemas siguientes considérense los depósitos al banco como enteros positivos y los retiros como negativos, las temperaturas bajo cero como cantidades negativas y las temperaturas sobre cero como positivas, las medidas sobre el suelo o nivel del mar como positivas y las medidas bajo el suelo o nivel del mar como negativas.

Exprésese cada resultado con un número entero.

18.- Un poste de 32 pies de longitud sobresale del suelo 12 pies. Si el poste se introduce 5 pies más, expresa la parte que sobresale y la enterrada.

19.- Se depositan \$17 y \$15 y se sacan \$8

20.- Se retiran \$23 y \$19 y se depositan \$25

El conjunto de los números racionales. (Q)

Consideremos la siguiente división

$$\frac{7}{2} =$$

Por lo que sabemos de aritmética $7 \div 2 = \frac{7}{2}$ ó $3\frac{1}{2}$ no es un número natural, ni tampoco un número entero. Para poder expresar la división de un entero por otro entero (excepto cero) fue necesario crear un nuevo conjunto de números, llamado el conjunto de los números racionales. Definimos un número racional como: "un número que puede escribirse en la forma a/b, donde a y b son enteros y $b \neq 0$. Así pues, nuestro nuevo sistema de números incluye elementos como los siguientes:

$$\frac{3}{2}\ ;\ -\frac{4}{7}\ ;\ 1;\ 0;\ 5\frac{1}{2} \text{ o } \frac{11}{2}\ ;\ 0.7 \text{ ó } \frac{7}{10}$$

Un número racional puede ser expresado por un número infinito de formas equivalentes. Por ejemplo:

$$4 = \frac{4}{1} = \frac{8}{2} = \frac{12}{3} = \frac{16}{4}$$

El cero es un número racional, puesto que, puede ser escrito como 0/2, 0/-5, 0/7, etc. Por lo cual concluimos que: "el conjunto de los enteros, los números naturales y cardinales están incluidos en el conjunto de los números racionales". Es decir $[(N \subset K) \subset Z] \subset Q$, o bien expresado por medio de diagramas, queda: