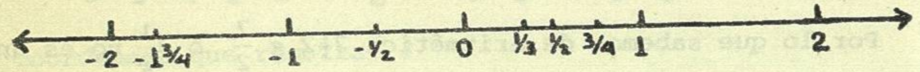
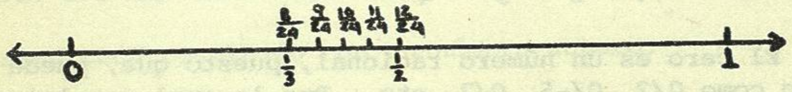
Habiendo creado los números racionales, podemos localizar nuevos puntos en la recta numérica. Por ejemplo, podemos dividir el intervalo entre dos enteros cualesquiera en mitades, terceras, cuartas partes, etc. Entonces la recta numérica se vería como sigue:

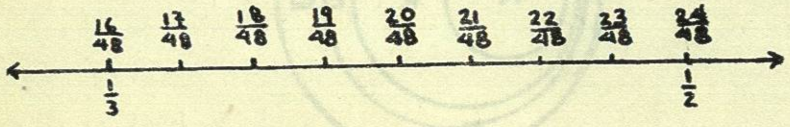


Cada número racional puede asociarse así con un punto de la recta numérica. Si localizamos más puntos, tales como quintos, sextos, séptimos, etc., los puntos correspondientes estarán cada vez más juntos. Si continuáramos haciendo esto indefinidamente veríamos que: "siempre hay un número racional entre dos números racionales cualesquiera dados no importa cuán próximos estén esos dos números. Examinemos esto con más detalle. Supongamos que escogemos dos puntos cuyas coordenadas son 1/3 y 1/2. Sabemos que 1/3 puede ser escrito como 8/24 y que 1/2 puede ser escrito como 12/24. Además cualquier número entre 8/24 y 12/24 está también entre 1/3 y 1/2. Claramente se ve, que 9/24 · 10/24 y 11/24 están entre 8/24 y 12/24. Así pues, hay cuando menos tres puntos entre 1/3 y 1/2.



Este proceso de encontrar más puntos entre dos puntos dados cuyas coordenadas son números racionales puede repetirse indefinidamente encontrando otros números racionales entre dos números racionales dados. Por ejemplo:

$$\frac{1}{3} = \frac{16}{48} \quad y \quad \frac{1}{2} = \frac{24}{48}$$



A esto le llamamos la *propiedad de densidad* del conjunto de los números racionales. Así pues, entre dos puntos dados de la recta numérica cuyas coordenadas son números racionales, no importa cuán próximos estén, hay siempre un punto cuya coordenada es un número racional.

Así como un número racional positivo puede ser designado en muchas formas, un número racional negativo tiene también diferentes designaciones. Puede considerarse como el cociente de un entero negativo y un entero positivo, o como el cociente de un entero positivo y un entero negativo. Por esta razón

$$\frac{-2}{3} = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

Pero, hasta ahora, hemos usado fracciones para representar algunos números racionales. Cuando estudiamos aritmética aprendimos cómo expresar una fracción ordinaria en forma decimal. Se hacía dividiendo el numerador por su denominador. Por ejemplo:

$$\frac{3}{11} = 11\overline{)3.000000}\quad .272727...$$

$$\frac{5}{6} = 6\overline{)5.000}\quad .833...$$

$$\frac{3}{4} = 4\overline{)3.00}\quad .75$$

Si observamos la primera fracción veremos que la representación decimal resulta una repetición "27" sin llegar a su fin. Al igual que la primer fracción, la segunda fracción también se repite el "3" indefinidamente. La tercer fracción es un número decimal exacto. De aquí podemos concluir que: "Toda decimal exacta o decimal que se repite (decimal periódica) representa un número racional".

AUTOEVALUACION 3.

Si N representa el conjunto de los números naturales, K el conjunto de los números cardinales, Z representa el conjunto de los enteros, y Q representa el conjunto de los números racionales. ¿Cuáles de las siguientes aseveraciones son verdaderas y cuáles son falsas?

1.- $K \subset Q$ 4.- $N \subset Q$

2.- $Q \subset Z$ 5.- $Z \subset K$

3.- $Q \subset K$ 6.- $Z \subset Q$

7.- a) **¿Cuántos enteros** hay entre -3 y -2? b) ¿Cuántos números **racionales hay** entre -3 y -2?

8.- **Escribir por lo** menos 3 equivalencias que representen al **número racional** -2/5.

9.- **Encontrar uno** o más números racionales entre cada una de las siguientes parejas de números racionales 1/4 y 1/3.

10.- **Dibujar una recta** numérica y localizar en ella puntos que **correspondan** a los siguientes números racionales.

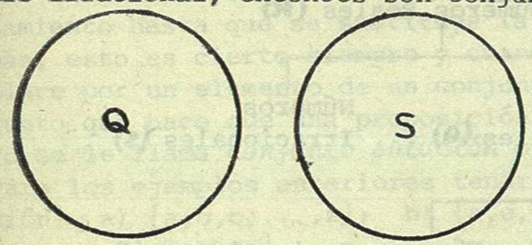
a) -3 b) $2\frac{1}{2}$ c) $-1\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{2}$ e) $3\frac{1}{4}$

El conjunto de los números irracionales. (S)

Anteriormente vimos como a todo número racional corresponde un punto en la recta numérica. Por otra parte ¿a cada punto de la recta le corresponde un número racional? La respuesta es "no". Hay muchos puntos de la recta numérica cuyas coordenadas "no" son números racionales.

Hay números cuya representación decimal no es *ni una decimal que se repite, ni una decimal exacta, ni mucho menos una fracción*. Como por ejemplo: $\sqrt{2}$, $-\sqrt{7}$, π, $\sqrt{3}$; donde el **símbolo** $\sqrt{2}$ se lee "raíz cuadrada de 2", y significa el número **positivo** que, cuando se multiplica por sí mismo, nos da **como resultado** 2. Son aproximaciones decimales de $\sqrt{2}$ los **números** 1.4, 1.414, 1.4142, 1.414214, etc. Ningún grupo de **cifras** decimales se repiten. Un número de esta clase se llama un *número irracional*.

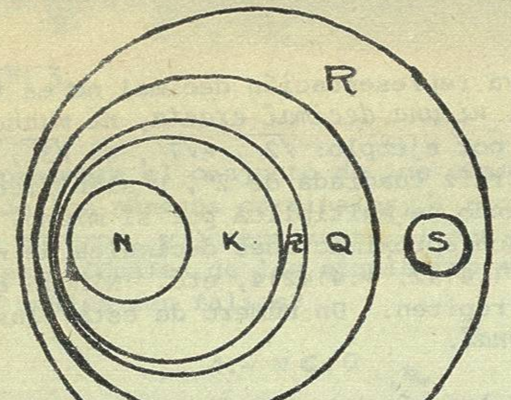
Representando a los números irracionales por medio de **diagramas** de Venn, vemos que: si todo número racional no es **número** irracional, entonces son conjuntos ajenos, es decir



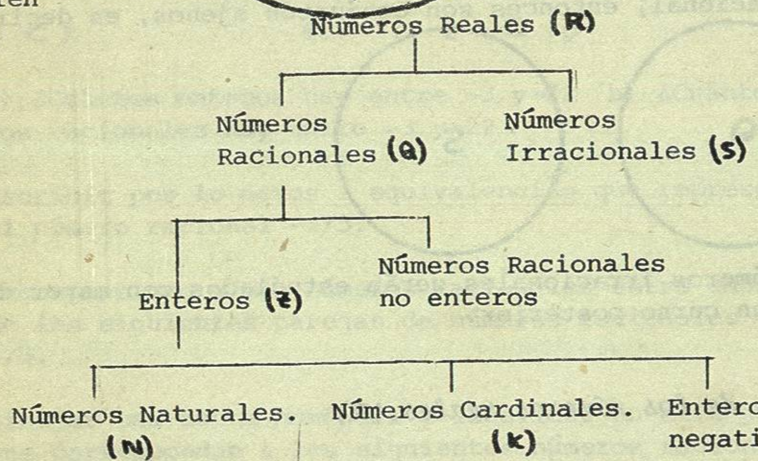
Los números irracionales serán estudiados con mayor **detalle, en un curso posterior.**

El conjunto de los números reales. (R)

El conjunto de números racionales junto con el conjunto de números irracionales componen el conjunto de los números **reales.** Así, pues, el conjunto de números racionales y el **conjunto de** números irracionales son subconjuntos del conjunto **de los** números reales. El diagrama que nos muestra lo anterior, es el siguiente



o bien



Podemos resumir todo lo anterior a esta sección como sigue:

1) Los números que pueden expresarse como decimales se llaman *números reales*.

2) Un número real cuya representación decimal es una decimal periódica o decimal exacta se le denomina número racional.

3) Un número real cuya representación decimal no tiene una parte que se repita periódicamente se llama número irracional.

2-2 PROPOSICIONES ABIERTAS Y VARIABLES.

Consideremos las siguientes proposiciones.

a) __________ es una letra del abecedario.

b) __________ es una vocal.

c) __________ es un mes del año.

Los anteriores ejemplos son *proposiciones abiertas*. Se les llama así porque no está expresado completamente el pensamiento hasta que se sustituye la "___" por un nombre. Además, esto es cierto siempre y cuando a la "___" se le reemplace por un elemento de un conjunto particular. A este conjunto que hace que una proposición sea un enunciado verdadero se le llama *conjunto solución* o *conjunto de soluciones*. Para los ejemplos anteriores tendríamos como conjunto solución: a) {a,b,c,...,z}; b) {a,e,i,o,u}; c) {Enero, Febrero,..., Diciembre}.

Consideremos ahora el siguiente ejemplo: ___ >2. En vez de usar "___", los matemáticos hacen uso de una letra. Si usamos la letra "x", la proposición abierta viene siendo $x>2$.

Si convenimos en que "x" va a ser sustituída por un elemento del conjunto de los números naturales, entonces cualquier elemento del subconjunto infinito {3,4,5 ...} del conjunto de los números naturales hará que la proposición sea cierta. Así, el conjunto solución para la proposición abierta $x>2$ es {3,4,5,...}.

En este caso "x" representa cualquier número natural del 3, 4, 5... La letra "x" cuando se usa en esta forma, se denomina una variable y el conjunto del cual podemos seleccionar un elemento para que la proposición abierta sea verdadera se llama conjunto de sustitución o *dominio de la variable*.

EJEMPLO:

Encuentre el conjunto solución que haga verdadera a la proposición abierta $x \neq 2$; siendo el dominio de la variable el conjunto de los números naturales.

Solución:

El conjunto solución de la proposición abierta $x \neq 2$ es

$$\{1,3,4,5,6,7,\ldots\}$$

EJEMPLO:

Encuentre el conjunto solución que haga verdadera a la proposición abierta $n+4 = 7$; siendo el conjunto sustitución o dominio de la variable de los números irracionales.

Solución:

El conjunto solución de la proposición abierta $n+4 = 7$ es $\emptyset$, puesto que no existe un número irracional que sumado con 4 nos de 7.

En el caso de que en este último ejemplo nos dijeran que el dominio de la variable fuera el conjunto de los números racionales o enteros, el conjunto solución sería $\{3\}$. ¿Podrías decir para qué otro dominio de n el conjunto solución es $\emptyset$?

Cabe hacer las siguientes observaciones:

a) *Una variable* es un símbolo que colocamos en lugar del nombre de cualquier elemento de un conjunto de sustitución.

b) *Una proposición abierta* es una proposición que contiene una o más variables.

c) *El conjunto solución* de una proposición abierta es el subconjunto del dominio de la variable que hace cierta la proposición.

AUTOEVALUACION 4.

En cada uno de los problemas siguientes se da una proposición abierta y el dominio de la variable. Hallar el conjunto solución de cada una de las proposiciones abiertas.

1.- $x+2 = 8$; $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

2.- $x-3 = 1$; $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$

3.- $2x+7 = 15$; $\{2,4,6,8\}$

En cada una de las proposiciones abiertas que siguen, reemplácese la variable por el número indicado y diga si es verdadera o falsa la proposición.

4.- $x+6 = 10$; para x es 4.

5.- $2(n+3)<20$; para $n=7$

6.- $24 \nless 3y+5$; para $y = 6$

Hallar los conjuntos solución de cada una de las siguientes proposiciones abiertas si a) el dominio es el conjunto de los números enteros positivos, b) el dominio es el conjunto de los números irracionales y c) el dominio es el conjunto de los números naturales pares.

7.- $x+4<7$

8.- $p+3>p+2$

9.- $x+12=2x+6$

10.- $3x+5>17$

2-3 GRÁFICAS DE CONJUNTOS DE SOLUCIONES.

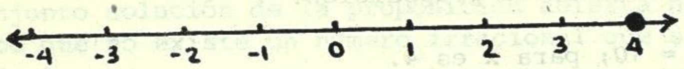
En una sección anterior hemos visto la forma de construir la gráfica de un conjunto de números. En esta sección veremos un método usado para el dibujo de las gráficas del conjunto solución de proposiciones abiertas. Consideremos los ejemplos siguientes:

EJEMPLO:

Dibujar la gráfica del conjunto solución de la siguiente proposición abierta $y=4$; siendo el dominio de la variable el conjunto de los números racionales.

Solución:

Vemos que el conjunto solución de esta proposición abierta es $\{4\}$. Para dibujar la gráfica de este conjunto solución trazamos una recta numérica y localizamos en ella el número 4.



(Q)

EJEMPLO:

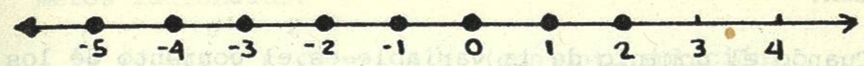
Dibujar la gráfica del conjunto solución de la siguiente proposición abierta $2+y<5$; siendo el dominio de la variable el conjunto de los números enteros.

Solución:

Vemos que el conjunto solución de esta proposición abierta es

$$\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

para dibujar la gráfica de este conjunto solución trazamos una recta numérica y localizamos en ella las coordenadas de los puntos que pertenezcan al conjunto solución.



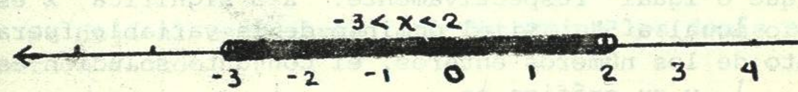
(Z)

EJEMPLO:

Dibujar la gráfica del conjunto solución de la siguiente proposición abierta $-3<x<2$; siendo el dominio de x el conjunto de los números reales.

Solución:

La gráfica de esta proposición abierta consiste en todos los números que están entre -3 y 2, o sea que, el conjunto solución gráficamente es:



(R)

La circunferencia en -3 y 2 indica que estos puntos no están incluidos en la gráfica.

Si observamos detenidamente los ejemplos anteriores, vemos que, es muy importante conocer la clasificación de los números reales para dar correctamente el conjunto solución a través del dominio de la variable. Veámoslo más detenidamente a través del siguiente ejemplo.

EJEMPLO:

Dibujar la gráfica de la siguiente proposición si a) el dominio de la variable es el conjunto de los números enteros y b) el dominio de la variable es el conjunto de los números reales.

$$1 < x < 2$$