AUTOEVALUACION 4.

1.- $\{6\}$

2.- $\{4\}$

3.- $\{4\}$

4.- V

5.- F

6.- V

7.- a) $\{1,2,\}$ c) $\{2\}$

8.- Cualquier número para a), b) y c)

9.- a) $\{6\}$, b) $\emptyset$, c) $\{6\}$

10.- a) $\{5,6,7...\}$,
c) $\{6,8,10...\}$

AUTOEVALUACION 5.

5.- Falso.

6.- Falso.

7.- Verdadero.

8.- Verdadero.

9.- $\{x \mid x = 3,\ x \in N\}$

10.- $\{x \mid -4 < x < 1,\ x \in Z\}$

11.- $\{x \mid x \geq -2,\ x \in R\}$

12.- $\{x \mid -1 < x < 6,\ x \in Z\}$

13.- 1) $\{x \mid x = 6,\ x \in K\}$

2) $\{x \mid x < 5,\ x \in K\}$

3) $\{x \mid 2x \leq 8,\ x \in K\}$

4) $\{x \mid x \neq 4,\ x \in K\}$

EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES.

INTRODUCCION.

Hemos analizado en forma más bien breve diversos conjuntos de números. Nuestra intención en la presente unidad es presentar el sistema de los números reales como un sistema lógico deductivo, esto es, dar algunas ideas no sólo de la naturaleza de los números mismos sino que también de las operaciones con estos números y de las propiedades que ellas poseen. Como en todo sistema deductivo, enunciaremos nuestros postulados y definiciones y bosquejaremos demostraciones para los teoremas más importantes, dejando otras como ejercicios al estudiante.

Si recordamos los métodos de demostración de la Geometría de la escuela secundaria, un hecho resalta, cada demostración incluye una hipótesis y una conclusión, siguiendo ésta de la hipótesis mediante un proceso de razonamiento lógico. Para convencernos de la verdad de nuestra conclusión debemos suponer que la hipótesis es verdadera o bien, haber demostrado ésta previamente. Esta hipótesis, a su vez, debe haberse establecido a partir de hechos comprobados con anterioridad. Este eslabonamiento no puede continuarse indefinidamente y debe haber un punto de partida. Es en este punto en que, en un sistema deductivo, nosotros decimos: "Suponemos que ciertos hechos son verdaderos". Este comienzo debe consistir de una cierta cantidad de palabras no definidas y de un conjunto de proposiciones no demostradas. En seguida, a medida que pasamos de una proposición a otra, seguimos reglas bien precisas. Estas leyes básicas de razonamiento, utilizadas intuitivamente por todos nosotros, rara vez se enuncian. Una de estas leyes expresa que toda proposición es, o bien verdadera, o bien falsa.

En las secciones 2-8 y 2-9 se da el listado de los otros axiomas de los números reales considerados como los axiomas de campo y de orden. Copia los axiomas en tu cuaderno, tratando de explicar con tus propias palabras lo que significa cada uno y tratando de recordarlos por los números, ya que más adelante los usaremos en las demostraciones de teoremas, indicando nada más su número (Cap.3). Te recomendamos que: 1) copies en tu cuaderno todas las definiciones y 2) enlistes las propiedades de igualdad y de campo de los números reales.

2.- Las autoevaluaciones que se incluyen en el material de estudio se componen de dos partes. La primera parte consta de preguntas acerca del material expuesto, con el fin de que el estudiante recuerde lo más importante y que comprenda mejor lo que estudió. La segunda parte lo componen problemas donde el alumno debe ser capaz de aplicar los conocimientos adquiridos.

3.- El ritmo de trabajo para esta unidad es el siguiente:

1er. día - Estudiar las secciones 2-4 y 2-5, copiar las definiciones y propiedades de igualdad y contestar la Autoevaluación 1.

2o. día - Estudiar las secciones 2-6 y 2-7, copiar proposiciones y contestar la Autoevaluación 2.

3er. día - Estudiar las secciones 2-8 y 2-9 enlistando los axiomas de campo y de orden y resolver las autoevaluaciones 3 y 4.

4o. día - Repaso.

4.- Como práctica de esta unidad resuelve el Laboratorio asignado por tu maestro asesor.

NÚMEROS REALES.

LECCIÓN 2.

2-4 LOS NÚMEROS REALES; UN SISTEMA DEDUCTIVO.

El conjunto de los números reales(R) es la colección de **números que se ha utilizado durante muchos años.** Cuando era **niño, primero empezó a contar, y así se familiarizó** con los **números naturales (N)** {1, 2, 3...} . Así mismo aprendió a - **sumar y multiplicar pares de números naturales.**

Luego, al trabajar con la suma de pares de números naturales, digamos m y n, se descubrió que no siempre era posible **encontrar en los números naturales** un número que al ser sumado a m **diese el número n.** Por ejemplo, no hay número natural **que sumado a 4 de como suma 4.** Por esta razón se definió **el número cero, que se denota por 0,** como el número con la - **propiedad de que $m + 0 = m$, en donde** m es cualquier número natural. **A este nuevo conjunto de números** se le llamó el con-- **junto de los números cardinales (K)**, de tal manera que, K = **{0}** U { 1, 2, 3... } **(enteros no negativos)**

Posteriormente para cada número natural n, se inventó un **número $-n$, llamado el inverso aditivo de** n, con la propiedad **de que $n + (-n) = 0$. Estos números,** junto con los elementos **de K, formaron el conjunto de los números enteros** (Z).

$$Z = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\ldots\}$$

En base a este nuevo conjunto, a los elementos de N, también se les llama enteros positivos. De igual manera, otro nombre para el inverso aditivo de un número natural es entero negativo.

Los más importantes subconjuntos de R aparecen abajo.

N = {1, 2, 3...} (conjunto de los números naturales o conjunto de los enteros positivos).

K= {0, 1, 2, 3...} (conjunto de los números cardinales o conjunto de los enteros no negativos).

Z= {..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,...} (conjunto de los enteros).

{-1, -2, -3,...} (conjunto de los enteros negativos).

{0, -1, -2, -3...} (conjunto de los enteros no positivos).

$\{x|x= 2m, m\varepsilon Z\}$ (conjunto de los enteros pares).

$\{x|x= 2m+1, m\varepsilon Z\}$ (conjunto de los enteros impares).

La ventaja de usar este conjunto de números y no limitarnos a K, es que resulta factible la resta de cualquier número entero de otro entero. Con solo números positivos, escogidos convenientemente, tal que 3-5, la sustracción no tendría sentido.

Más tarde se observó que se había definido una operación inversa de la suma, pero no había ninguna para la multiplicación. Sin embargo, había necesidad de que en una operación sobre los enteros *m* y *n* resultase un número *q* que al multiplicarse por *n* se obtuviera el producto *m*.

División: $\frac{m}{n} = m \div n = m : n = q \longleftrightarrow n \cdot q = m$

14:2 = 7 ya que 2.7 = 14; 20:(-4) = -5, puesto que (-4).(-5)= 20. Pero esta operación no se podía aplicar a cualquier par de enteros. Por ejemplo, no había solución para 3:12 ó 15:4. Para solucionar esto se definió el conjunto de los números racionales (Q). Se llamó números racionales a la colección completa que comprende los números enteros positivos y negativos, el cero y las fracciones positivas y negativas.

$$Q=\{ \frac{a}{b} \mid a,b \in Z ;\ b \neq 0\}$$

Por supuesto, se deseaba entonces que los axiomas aceptados para los enteros se aplicasen a los elementos del conjunto aumentado Q. Consecuentemente, se demostraron teoremas necesarios que permitiesen, por una parte, encontrar otros números racionales equivalentes y que sirviesen para resolver ecuaciones cuyos conjuntos solución fuesen subconjuntos de Q.

Con frecuencia resultaba conveniente usar fracciones decimales para representar números racionales y se demostró que cada número racional se podía escribir como un entero, o decimal periódico infinito. Por ejemplo:

$\frac{6}{2} = 3$; $\frac{4}{3} = 1.333...$; $\frac{3}{4} = 0.7500....$

Recíprocamente, cada decimal periódico infinito se podía escribir como un número racional $\frac{a}{b}$; donde a, b ε Z y b $\neq$ o.

Por último se descubrieron número tales que, no eran enteros, ni decimales periódicas infinitas, ni se podían expresar como a/b. Consideremos la expresión 0.12345678... en donde los tres puntos suspensivos indican que sigue colocando los números dígitos en las posiciones decimales, a la derecha del número previo. Este seguramente nunca será periódico. Otro ejemplo es 0.5050050005..., en donde después de cada 5 sucesivo, se tiene un 0 más que el grupo anterior al 5.

También se demostró que no hay solución en Q para la ecuación $x^2 = 2$. Un número tal x, no era un entero y, además, no se podía representar como un decimal periódico infinito. Sin embargo, se podía encontrar aproximaciones decimales a los números racionales, por ejemplo una aproximación de x, sería.

$$(1.41)^2 = 1.9881$$
$$(1.414)^2 = 1.999396$$
$$(1.4142)^2 = 1.9996064$$
$$(1.4142135)^2 = 1.99999982358225$$

Esto condujo a aceptar que x, tal que $x^2 = 2$, se podía definir mediante el numeral 1.4142135... (en donde los puntos suspensivos indican que el 5 está seguido por un número ilimitado de dígitos). Se sabía que x no era un número racional, por tanto, no podía existir un conjunto de dígitos repetido. Tal expresión quizá se haya denominado número decimal infinito no periódico. Se reconocía que había un número infinito de ellos y a su conjunto se le llamó conjunto de los números irracionales (S). Desafortunadamente, no estamos capacitados para definir un número irracional en término de los números racionales y usando solo el lenguaje matemático que existe actualmente. Los términos *decimal infinito no periódico* y *número irracional* deben aceptarse como no definidos. Lo que hemos hecho es describir ciertas características de S y de sus elementos para ayudar a aclarar la definición de números irracionales.

Obsérvese que los conjuntos Q y S son ajenos. Si formamos la unión de Q U S, obtenemos un conjunto que llamaremos de números reales (R). De tal modo que, a través de lo anterior, podemos crear la definición siguiente:

Definición de números reales: La unión del conjunto de todos los números racionales y el conjunto de todos los números irracionales.

Nos encontramos ahora en situación de presentar un conjunto de axiomas que en ningún caso son únicos pero que definen o caracterizan el conjunto de los números reales. Al considerar estos axiomas quedará claro que muchos de ellos son verificados en forma individual por otros sistemas, haciéndose con esta advertencia aún más claro su significado.

AUTOEVALUACION 1.

Dado el conjunto $P = \{2,5,10,17,26,37,65,82\}$

1.- ¿Cuál es el subconjunto formado por números primos?

2.- ¿Cuál es el sunconjunto formado por los números divisibles por 3?

3.- ¿Cuál es el subconjunto formado por los números cuadrados perfectos?

¿Cuáles de los siguientes conjuntos son infinitos y cuáles finitos?

4.- Todos los números naturales que son múltiplos de 6.

5.- Todos los números naturales que no son múltiplos de 6.

6.- $\{x|x$ es un número natural par$\}$

7.- $\{x|x$ es cualquiera del primer millón de números naturales$\}$

8.- $\{x|x \in Q$ y x está entre 3 y 4$\}$

9.- $\{x|x \in Z$ y x está entre 1 y 2$\}$

10.- $\{x|x \in Q$ y x está entre $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{3}\}$

11.- Todos los números naturales que son múltiplos de 6 que son menores que 6000.

12.- Todos los números de Z que son múltiplos de 6 que son menores que 6000.

13.- $\{x | x \in K$ y x está entre 3 y 3 billones$\}$

14.- $\{x | x \in K$ y x es menor que 3 billones$\}$

Analizar las afirmaciones siguientes, marcando si son verdaderas o falsas:

15.- $K \subset N$	20.- $Z \cup Q = Q$
16.- $K \subset Q$	21.- $N \cap K = \{0\}$
17.- $Z \subset Q$	22.- $-3 \in K$
18.- $\{\sqrt{2}\} \subset Q$	23.- Si $a \in Q$, entonces $a \in R$
19.- $Q \cup S = R$	24.- Si $a \in Z$, entonces $a \in Q$

Explicar por qué los números siguientes son racionales:

25.- 0.3	28.- 3.1416
26.- 3.16	29.- 15%
27.- $\frac{1}{7}$	30.- 0.5%

Encontrar el número decimal que es equivalente al número dado:

31.- 7/8	34.- 7/11
32.- 3/500	35.- 14 2/5%
33.- 5 2/3	36.- 102%

Encontrar una fracción que sea equivalente a cada uno de los números decimales periódicos dados.

EJEMPLO.

Hallar la fracción equivalente a 0.05252...

Solución: Sea $n = 0.05252$

Escribamos dos números con la misma parte decimal. Esto lo podemos lograr multiplicando n primero por 10 y luego por 1000:

$$10\ n = 0.5252...$$
$$1000\ n = 52.5252...$$

Puesto que las partes decimales son las mismas, la diferencia entre 1000 n y 10 n es un número natural.

$$1000\ n - 10\ n = 52.5252... - 0.5252...$$
$$990\ n = 52$$
$$n = \frac{52}{990} = \frac{26}{495}$$

37.- 0.444...

38.- 0.707070...

39.- 1.21414...

40.- Explicar qué significa la afirmación de que π no es un número racional.

2-5 PROPIEDADES DE LA IGUALDAD (=).

En el capítulo I analizamos la igualdad de conjuntos y el uso del símbolo = en lo relativo a conjuntos. Necesitamos ahora hacer ciertas suposiciones acerca de la relación de igualdad respecto al conjunto de los números reales.

Generalizando, definiremos la igualdad de los números reales como sigue: