Definición de igualdad: Dos símbolos, a y b, representando números reales son iguales, a = b, sí y sólo si representan el mismo número real.

De esta definición se deducen las siguientes propiedades:

Propiedad 1. La propiedad reflexiva de la igualdad.

$$a = a$$

Este axioma parece ser trivial, pero no lo es. Lo que estamos haciendo es poner las cosas lógicamente compatibles. Simplemente decimos que el significado de un símbolo o un numeral no cambia sin razón.

Propiedad 2. La propiedad de simetría de la igualdad.

Si $a, b \in R$ *y si* $a = b$, *entonces* $b = a$.

Esto es importante, porque significa que una igualdad puede leerse de derecha a izquierda igual que de izquierda a derecha. Significa que los números son los mismos aunque los numerales sean diferentes. Brevemente, los dos numerales son nombres diferentes para la misma cosa.

Propiedad 3. La propiedad transitiva de la igualdad.

Si $a, b, c, \in R$ *y si* $a = b$ *y* $b = c$, *entonces* $a = c$.

Esto es una propiedad o hipótesis muy útil, porque puede extenderse a más números. Por ejemplo, si a=b, b=c, c=d, y d=e, entonces a = e.

Propiedad 4. La propiedad de sustitución de la igualdad.

Si $a, b \in R$ y si $a = b$, entonces a puede ser sustituida por b en cualquier expresión, enunciado específico o proposición abierta. Tal sustitución no cambia el valor de la expresión ni altera la veracidad del enunciado específico ni el conjunto de verdad de la proposición abierta.

Estas propiedades pueden parecer triviales, pero son extremadamente importantes en el desarrollo lógico de este sistema

matemático. La primera de estas propiedades, la propiedad reflexiva, ciertamente parece obvia, pero debe destacarse que no todas las relaciones sobre el conjunto de nuestros números reales tienen esta propiedad. Por ejemplo, no es cierto que $a < a$ para cada número real. Nótese también que si $a, b \in R$ y si $a < b$, no se sigue que $b < a$. Es decir, que la relación *menor que* no tiene la propiedad de simetría.

2-6 OPERACIONES BINARIAS.

Frecuentemente trabajaremos con conjuntos de objetos en los que el orden en que aparezcan es significativo. El más sencillo de dichos conjuntos contiene solo dos objetos y se llama par ordenado o pareja ordenada.

Definición de par ordenado: Se dice que un par de objetos a y b es un par ordenado si uno de ellos se identifica como el primer objeto y el otro como el segundo.

Si a es el primer objeto y b el segundo, el par ordenado se representa por (a, b). Por ejemplo (2,1) es un par ordenado de números naturales en los que 2 es el primer término y 1 el segundo.

Cuando ponemos 2 + 1 = 3, estamos asociando, con el par ordenado (2,1), el número 3. No asociaremos ningún otro número natural con este par ordenado en esta situación puesto que conocemos las leyes de la suma. Ya que la suma asocia con cada par ordenado de números naturales uno y solo un número natural, decimos que la suma es una operación binaria sobre el conjunto de los números naturales. También cuando multiplicamos dos números naturales, el resultado es un número natural; en el mismo par ordenado 2 x 1 = 2.

Definición de operación binaria: Sea $P = \{a,b,c,...\}$ un conjunto cualquiera. La operación * (léase asterisco) es una operación binaria en P si y sola mente si a cada par ordenado (a,b), donde a y b son elementos de P le corresponde un elemento único $a * b$ de P.

En esta definición hay varios puntos delicados que se deben observar:

1) El orden de a y b puede ser importante porque (a,b) es un par ordenado. Así puede suceder que $a * b \neq b * a$.

2) La operación tiene que estar definida para todos los pares (a, b), donde a y b son elementos de P.

3) El elemento resultante $a * b$ tiene que ser un elemento de P.

La suma, la multiplicación y la sustracción en R son operaciones binarias. Pero, por ejemplo la división no es una operación binaria en R, porque el par ordenado (a,o), esto es, (a ÷ o) no está definida. No obstante, la división es una operación binaria en los números reales diferentes de cero.

En cambio, cuando restamos un número natural de otro número natural, el resultado no es forzosamente un número natural; por ejemplo, 3 - 8 no nos da un número natural, ni tampoco nos lo da 5 - 5. También, cuando dividimos un número natural por otro, el resultado puede ser o no, otro número natural: por ejemplo, 6 ÷ 3 es un número natural, pero ni 6 ÷ 5 ni 3 ÷ 6 son números naturales.

Decimos que el conjunto de los números naturales es cerrado con respecto a las operaciones, adición y multiplicación, pero no es cerrado con respecto a las operaciones de sustracción y división.

Definición de Cerradura: Un conjunto es *cerrado* bajo una operación si el elemento que se obtiene al aplicar dicha operación a cualquier par de elementos del conjunto es también un elemento del conjunto dado.

En nuestro desarrollo de los números reales deseamos suponer que la suma y el producto son operaciones binarias sobre R. Tal hipótesis significaría que el conjunto de los números reales fuese cerrado ante dichas operaciones.

De lo anterior se expone el axioma siguiente de R.

Axioma 1. Las leyes de cerradura. Para cualesquier $(a,b) \in R$, $a + b \in R$ $a \cdot b \in R$

Esta propiedad de cerradura, puede parecer tan sencilla, pero no todos los conjuntos son cerrados con respecto a una operación dada. Para ello, daremos algunos ejemplos donde no se cumple esta propiedad:

EJEMPLOS.

La suma de dos números impares no es un número impar.

La suma de dos números primos no es necesariamente primo, etc.

2-7 PROPIEDADES ADITIVA Y MULTIPLICATIVA DE LA IGUALDAD.

Las siguientes propiedades que vamos a demostrar, son consecuencia inmediata de las definiciones que hemos hecho y de las propiedades en que hemos convenido hasta ahora en esta lección. Recuérdese que por ahora tenemos éstas como las únicas propiedades conocidas de los números reales.

Propiedad 5. Propiedad aditiva de la igualdad.

Para todo número real a,b,c *y* d, *si* $a=b$ *y* $c=d$, *entonces* $a + c = b + d$

Demostración: Hipótesis: a=b y c=d.
Conclusión: a+c = b+d.

Proposición	Justificación
1. a,b,c,d ε R	1. Dado.
2. a + c ε R	2. Axioma 1.
3. a + c = a + c	3. Propiedad 1.
4. a = b	4. Dado.
5. a + c = b + c.	5. Propiedad 4.(*a* se sustituye por *b* en el lado derecho de la igualdad - del paso 3).
6. c = d	6. Dado.
7. Por tanto, a+c=b+d	7. Prop. 4 (*c* se sustituye por *d* en el lado derecho de la igualdad del - paso 5).

Propiedad 6. Propiedad multiplicativa de la igualdad.

Para todo número real a,b,c, y d, si a=b y c=d, entonces a . c = b . d

Demostración: Hipótesis: a=b y c=d.
Conclusión: ac = bd.

Proposición	Justificación
1. a,b,c,d, ε R	1. Dado.
2. a . c ε R	2. Axioma 1.
3. a . c = a . c	3. Propiedad 1.
4. a = b, c = d	4. Dado.
5. Por tanto, a.c=b.d	5. Propiedad 4.(*a* se sustituye por *b* y *c* se sustituye por *d* en el lado derecho de la igualdad del paso 3).

Dado que c=c para cualquier c ε R, ambas propiedades demostradas nos permiten escribir:

Si a,b,c ε R y a = b, entonces a + c = b + c y
Si a,b,c ε R y a = b, entonces a . c = b . c

Estas dos propiedades de los números reales se conocen - como la propiedad aditiva de la igualdad y la propiedad multiplicativa de la igualdad, respectivamente.

Se pueden usar otros conjuntos de proposiciones y justificaciones igualmente válidas para demostrar las propiedades. Por ejemplo, la propiedad 5, pasos 1, 4 y 6 podían haberse combinado en un solo paso. No hay que olvidar que el propósito de una demostración es convencer plenamente de que cierta proposición es verdadera. Si usted cree que puede realizar este propósito en 5 pasos en vez de 7 ó 15, tie-- ne completa libertad de hacerlo. Sin embargo, existe una recomendación: No espere que quien lea la demostración complete - los pasos que faltan en la argumentación; es decir una demostración válida debe ser completa, sin importar la forma.

AUTOEVALUACION 2.

1.- ¿Son la adición, la sustracción, la multiplicación y la división operaciones binarias en el conjunto de los enteros positivos (N)?

2.- ¿Son la unión y la intersección de conjuntos operaciones binarias? De ejemplos.

3.- ¿Es el complemento de un conjunto una operación binaria?

4.- ¿Cuántos elementos intervienen en una operación binaria?

5.- ¿Cuál es el entero que la operación binaria suma, definida en el conjunto de los enteros, asigna al par (5,7)?

6.- ¿Por qué no es la sustracción una operación binaria en N? Dar un contra ejemplo.

7.- Nombrar un conjunto en el cual la sustracción es una operación binaria.

8.- ¿Por qué no es la división una operación binaria en N?

9.- Nombrar un conjunto en el cual la división es una operación binaria.

Decir si es verdadera o falsa cada una de las proposiciones siguientes. Razonar la pregunta.

10.- Todo número real tiene una representación decimal.

11.- El conjunto de los números racionales es un subconjunto de los enteros.

12.- Todo número cardinal puede escribirse como una fracción.

13.- Toda fracción representa un entero.

14.- El decimal 0.137 representa un número irracional.

15.- ¿Cuáles de los siguientes números son números: a) naturales, b) enteros, c) racionales, d) irracionales y e) reales.

$$-4,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ \sqrt{5},\ \frac{3}{8},\ 2,\ \pi$$

La verdad de cada una de las proposiciones dadas, depende de una de las propiedades, que hasta aquí, hemos visto. En cada caso enunciar en forma completa la propiedad que corresponde. Suponer que $x, y, z \in R$.

16.- Si $x = \sqrt{3}$ y $y = z$, entonces $x + y = \sqrt{3} + z$

17.- Si $x = y$ y $z = 6$, entonces $x \cdot z = y \cdot 6$

18.- Si $x + y = z$ y $z = 6$, entonces $x + y = 6$

19.- Si $6 = 2 + x$ y $6 = z$, entonces $z = 2 + x$

20.- Si $6 = 2 + x$ y $6 = z$, entonces $6 + 6 = (2 + x) + z$

Dar la justificación de cada proposición en las demostraciones que siguen.

21.- *Demostrar*: Si $a,b,c, \in R$ y $a = b$, entonces $a+c = b+c$

Proposición	Justificación
1. $a,b,c, \in R$ y $a = b$	1. ______
2. $a + c \in R$	2. ______
3. $a + c = a + c$	3. ______
4. Por tanto, $a+c = b+c$	4. ______

22.- *Demostrar*: Si $a,b,c, \in R$ y $a=b$, entonces $c.a = c.b$

Proposición	Justificación
1. $a,b,c \in R$ y $a = b$	1. ______
2. $c \cdot a \in R$	2. ______
3. $c \cdot a = c \cdot a$	3. ______
4. $c \cdot a = c \cdot b$	4. ______

23.- Si $a,b,c, \in R$ y si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$ (Sugerencia: aplicar los pasos del problema 22).

24.- Si $a,b,c, \in R$ y si $a = b$, entonces $c + a = c + b$.

2-8 AXIOMAS DE CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES (R).

Además de las propiedades aceptadas en relación con la igualdad, hemos identificado el conjunto de números con los cuales vamos a trabajar, esto es, los números reales. En otras palabras, hemos supuesto que existen tales números. El axioma de cerradura afirma que cada par de números reales x, y, tienen una suma única llamada $x + y$ y un producto único llamado xy. Así mismo, $x + y$, $xy \in R$.

Necesitamos ahora hacer ciertas suposiciones concernientes al comportamiento de dichos números respecto de las operaciones de suma y multiplicación. Admitir que la suma de dos números existe, nos dice $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ son números reales, pero ello no nos autoriza a sustituir $2\sqrt{2} + 3\sqrt{2}$ por $5\sqrt{2}$.

Las leyes que necesitamos aquí y otras necesarias para cómputos con números reales se desarrollarán usando combinaciones de nuestras anteriores propiedades y las que a continuación ofrecemos. Cabe observar que por ahora tenemos éstas como las únicas propiedades conocidas de R.

Axioma 1. Las leyes de cerradura. Para cualesquier $a, b \in R$, $a + b \in R$ y $a \cdot b \in R$

Este axioma nos dice que la adición y la multiplicación de dos números reales dan números que también pertenecen a R.

Axioma 2. Las leyes conmutativas. Para cualesquier $a, b \in R$, $a+b = b+a$ y $a.b = b.a$

Este axioma afirma que la suma o el producto de cualesquiera dos números reales no resulta afectado por el orden en que se sumen o se multipliquen. Así, $3+7 = 7+3$ y $7.3 = 3.7$

Sin embargo este axioma no permite afirmar que $(3+4)+5= 3+(4+5)$. Aquí no se está cambiando el orden de la suma; se está cambiando la agrupación. Debemos ser capaces de hacer esta afirmación; pero, ésta se sigue del axioma 3.

Axioma 3. Las leyes asociativas. Para cualesquier $a,b,c \in R$, $(a+b)+c = a+(b+c)$ y $(a.b)c = a(b.c)$

Este axioma nos permite combinar 3 elementos de R. Podemos ya definir la suma de $a + b + c$ de tres números reales, puesto que, originalmente solo sabíamos sumar dos números $a + b$ o multiplicar dos números $a . b$, por ser éstas, operaciones binarias.

Si escribiéramos los números 2, 5 y 8 en este órden: 2,5,8, queremos encontrar el valor de $2 + 5 + 8$ agrupando:

$$(2 + 5) + 8$$

Ahora sumamos $2 + 5 = 7$ y, después, $7 + 8 = 15$, Parece, pues, que:

$$2 + 5 + 8 = 15$$

Es posible agrupar los sumandos de otro modo,

$$2 + (5 + 8) = 2 + 13 = 15$$

La combinación de la conmutatividad y la asociatividad de los números reales nos permite afirmar que, la suma o producto de tres números reales es independiente del orden en que se escriban.

Axioma 4. La ley distributiva. Para cualesquier $a, b, c \in R$, $a(b + c) = a \cdot b + a \cdot c$

$$(b + c)a = b \cdot a + c \cdot a$$

Este axioma expresa que obtenemos el mismo resultado si multiplicamos un cierto número real por la suma de dos números reales que si multiplicamos el número por cada uno de los dos y enseguida sumamos.

Además, el axioma distributivo combinado con la propiedad de simetría de la igualdad nos permite afirmar que:

$$a \cdot b + a \cdot c = a(b + c)$$

$$b \cdot a + c \cdot a = (b + c)a$$

En otras palabras, este axioma se usa a veces para escribir el producto de dos números reales como la suma de dos números reales, y en otras ocasiones, para escribir la suma de dos números como un producto.

Antes de ver los axiomas que faltan, necesitamos hacer una pausa para permitir al estudiante familiarizarse mejor con los axiomas expuestos hasta aquí.