AUTOEVALUACIÓN 3.

1.- Demuestre que el conjunto de los números impares no es cerrado bajo la adición citando un contraejemplo.

2.- Demuestre que el conjunto de los números naturales no es cerrado bajo la división citando un contraejemplo.

3.- Demuestre que el conjunto de los números primos no es cerrado bajo la multiplicación dando un contraejemplo.

Diga si cada conjunto es cerrado bajo cada una de las cuatro operaciones aritméticas: 1) adición; 2) sustracción; 3) multiplicación; y 4) división (excepto para división entre cero).

4.- El conjunto de números naturales (N).

5.- El conjunto de números enteros (Z).

6.- El conjunto de números racionales (Q).

7.- El conjunto de números reales (R).

8.- Si p y q representan números naturales, ¿cuáles de las siguientes expresiones representarán siempre otro número natural?

a) $p - q$ b) $p \div q$
c) pq d) $p + q$

9.- En el caso de que las anteriores expresiones no representen siempre un número natural ¿Qué restricciones debemos hacer sobre p y sobre q de tal modo que el resultado de la operación indicada represente un número natural.

Escribir para cada uno de los que siguen, si el conjunto descrito es cerrado con respecto a la operación indicada. Razonar la respuesta.

10.- {1,2} ; multiplicación.

11.- Los números impares; multiplicación.

12.- Todos los múltiplos de 3; multiplicación.

13.- Los números impares; adición.

14.- ¿Cuáles de las siguientes actividades son conmutativas?
a) Ponerse los calcetines y después los zapatos.
b) Ir a una fiesta y después al cine.
c) Leer un libro y escribir un ensayo sobre él.
d) Hacer tu tarea y después ver televisión.

15.- ¿Qué operaciones de la aritmética de los números reales son conmutativas?

16.- Mencione ejemplos de operaciones que no son conmutativas.

17.- ¿Qué operaciones de la aritmética son asociativas en el conjunto de los números reales?

18.- ¿Qué operaciones de la aritmética no son asociativas en el conjunto de los números reales? Dar contraejemplos.

19.- ¿Cuáles son las operaciones binarias de la aritmética de los números reales que poseen la propiedad conmutativa y asociativa?

Justificar cada proposición, dando el nombre de un axioma o teorema.

20.- $2\ (3 + 5) = (2)(3)+(2)(5)$

21.- $\sqrt{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

22.- $7 + (3 + \sqrt{2}) = (7 + 3) + \sqrt{2}$

23.- $(\sqrt{2} + 1)\ (3 + 11) = \sqrt{2}\ (3 + 11) + 1\ .(3 + 11)$

24.- $7 + (3 + \sqrt{2}) = 7 + (\sqrt{2} + 3)$

25.- $xy + x\ (y + z) = xy + (xy + xz)$

26.- $x\ [\ (y + z) + a\ ] = x\ (y + z) + x\ .\ a$

27.- $x + (y + z) = x + (z + y)$

28.- $x + y = z$, entonces $(x + y) + z = z + z$

29.- Si $x = \sqrt{2}$, $\sqrt{2} = y$, entonces $x = y$

30.- $x = a$, entonces $x + 3 = a + 3$

31.- $x + 2 = \sqrt{2}$, entonces $3(x + 2) = 3\sqrt{2}$

Llenar los espacios en blanco para que las operaciones sean casos especiales de exactamente uno de los axiomas o teoremas. Dar el nombre del axioma o teorema.

32.- $3\ (5 + \sqrt{2}) = 3.\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}}\ .\ \underline{\hspace{1cm}}$

33.- $(7 + 1/2) + 2 = 7 + (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$

34.- $8\ .\ (5\ .\ 7) = \underline{\hspace{1cm}}\ .\ (\underline{\hspace{1cm}}\ .\ \underline{\hspace{1cm}})$

35.- $[\ 2\ (5 + 7)\ ] \cdot \sqrt{2} = \underline{\hspace{1cm}}\ .\ (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})\ .\ \underline{\hspace{1cm}}$

36.- $(8 + 3) + 5 = \underline{\hspace{1cm}} + (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})$

37.- $\underline{\hspace{1cm}}\ .\ (3 + 7) = 8\ .\ \underline{\hspace{1cm}} + 8\ .\ \underline{\hspace{1cm}}$

38.- $4\ .\ 8 + 3\ .\ \underline{\hspace{1cm}} = (\underline{\hspace{1cm}} + \underline{\hspace{1cm}})\ .\ 8$

En los problemas siguientes, dar las justificaciones para las proposiciones de las demostraciones.

39.- *Demostrar:* $(x+y) + (a+b) = (a+x) + (y+b)$

Demostración:

$(x + y) + (a + b)$

$= [\ (x + y) + a\ ] + b$	1. ________
$= [\ a + (x + y)\ ] + b$	2. ________
$= [\ (a + x) + y\ ] + b$	3. ________
$= (a + x) + (y + b)$	4. ________

40.- *Demostrar:* $(xy)\ .\ (2z) = 2\ [\ (xy)\ z\ ]$

Demostración:

$(xy)\ .\ (2z) = [\ (xy)\ .\ 2\ ]\ z$	1. ________
$= [\ 2\ .\ (xy)\ ]\ z$	2. ________
$= 2\ .\ [\ (xy)\ .\ z\ ]$	3. ________

41.- *Demostrar:* $(4a + 3) + 2\ (a + 2) = 6a + 7$ (supóngase que: $2.2=4$, $3+4=7$ y $4+2=6$ son hechos conocidos.)

Demostración:

$(4a + 3) + 2\ (a + 2)$

$= (4a + 3) + (2a + 2\ .\ 2)$	1. ________
$= (4a + 3) + (2a + 4)$	2. Hecho conocido.
$= (4a + 3) + (4 + 2a)$	3. ________
$= [\ (4a + 3) + 4\ ] + 2a$	4. ________
$= [\ 4a + (3 + 4)\ ] + 2a$	5. ________
$= (4a + 7) + 2a$	6. Hecho conocido.
$= 2a + (4a + 7)$	7. ________
$= (2a + 4a) + 7$	8. ________
$= (2 + 4)\ a + 7$	9. ________
$= 6a + 7$	10. Hecho conocido.

Escribir las demostraciones de las proposiciones dadas, mostrando cada paso y usar solo un axioma o teorema en cada paso.

42.- $(x + 2) + z = z + (x + 2)$

43.- $\left[(x + y) + 5 \right] + z = (x + 5) + (y + z)$

44.- $(2b)c = b\,(2c)$

45.- $3\,(7x) = 21x$ (supóngase que $3.7 = 21$, como un hecho conocido.

46.-$2 \left[a + (b + c) \right] = (2a + 2b) + 2c$

47.- $a\,(b + c + d) = ab + ac + ad$.

48.- $(a + 5)\,(a + 7) = a^2 + (12a + 35)$ (supóngase que $a\,.\,a = a^2$ como un hecho conocido.)

A medida que avanzamos y que el estudiante se acostumbra a usar los axiomas, debemos hacer ciertos convenios que haga menos laborioso el proceso. Enunciaremos ahora los otros dos postulados de campo: el *axioma de la identidad* y el *axioma del inverso*. Después, con los seis postulados, podemos demostrar los teoremas necesarios para desarrollar las técnicas de operación de los elementos de un campo, en nuestro caso el de los números reales.

Axioma 5. Los elementos de identidad. Para cualesquier $a \in R$, existe un número real llamado *cero*, denotado por 0, tal que

$$a + 0 = a$$

Para cualesquier $a \in R$, existe un número real no nulo llamado *uno* y denotado con 1, tal que

$$a\,.\,1 = a$$

El número 0 es llamado *el elemento de identidad para la adición*, el número 1 es llamado *el elemento de identidad para la multiplicación*. Puesto que 0 y 1 pertenecen a R, por Axioma 2, tenemos

$$a + 0 = 0 + a = a \qquad y \qquad a\,.\,1 = 1\,.\,a = a$$

Axioma 6. Los elementos inversos. Para cualesquier

$a \in R$, existe un número real denotado con $-a$, tal que

$$a + (-a) = 0$$

Para cualesquier número no nulo (distinto de 0) $a \in R$, existe un número real denotado por $1/a$, tal que

$$a\,.\,\frac{1}{a} = 1$$

El número $-a$ es llamado el *inverso aditivo de a*, el *negativo de a*, o *menos a*. El número $1/a$ es llamado el *inverso multiplicativo de a* o el *recíproco de a*.

Por el Axioma 2, tenemos

$$a + (-a) = (-a) + a = 0 \qquad y \qquad a\,.\,\frac{1}{a} = \frac{1}{a}\,.\,a = 1$$

Los elementos idénticos y los inversos son únicos y la demostración de ello es relativamente simple.

Teorema 1. La identidad aditiva de 0 es única.

Demostración: Deseamos mostrar que 0 es el único elemento de identidad para la suma. Supongamos que hay otra identidad aditiva b. Tenemos entonces

1.	$0 + b = 0$	1. Hipótesis.
2.	$0 + b = b$	2. Axioma 5 (para la suma). y Ax 2
3.	Por tanto, $b = 0$	3. Propiedad 3.

Teorema 2. El idéntico multiplicativo 1 es único.

Teorema 3. El inverso multiplicativo de cualquier número no nulo $a \in R$ es único.

Demostración: Supongamos ahora que algún número b es multiplicativo inverso de un número real, a, no nulo. Tenemos entonces:

1.	$a, b \in R$	1. Axioma 1
2.	$a\,.\,b = 1$	2. Hipótesis
3.	$1/a\,(a.b) = 1/a$ (1)	3. Propiedad 6.
4.	$(1/a.a).b = 1/a$	4. Axioma 3

5. $1 \cdot b = 1/a$ 5. Axioma 6
6. $b \cdot 1 = 1/a$ 6. Axioma 2
7. $b = 1/a$ 7. Axioma 5

De este modo, cualquier inverso multiplicativo de a es igual a $1/a$.

Teorema 4. El inverso aditivo de cualquier número $a \in R$ es único, es decir,

($a \in R$, $a + b = 0$, entonces $a = -b$)
$a \in R$, $b + a = 0$, entonces $a = -b$

Teorema 5. Para cualesquier $a, b, c \in R$,
$a + b + c = c + b + a$

Hipótesis: $a, b, c \in R$.
Conclusión: $a+b+c = c+b+a$

Demostración:

$(a + b) + c = a + (b + c)$	Axioma 3
$= a + (c + b)$	Axioma 2
$= (a + c) + b$	Axioma 3
$= (c + a) + b$	Axioma 2
$= c + (a + b)$	Axioma 3
$= c + (b + a)$	Axioma 2

A causa de la propiedad transitiva de la igualdad, cada una de las expresiones anteriores representa el mismo número, por lo que podemos escribir:

$$a + b + c$$

sin indicar qué par se debe sumar primero y en qué orden deben sumarse.

Del mismo modo se tiene el siguiente teorema (se deja al estudiante la demostración).

Teorema 6. Para cualquier $a, b, c \in R$.
$a \cdot b \cdot c = c \cdot b \cdot a$

2-9 LOS AXIOMAS DE ORDEN.

El conjunto de números reales R es un conjunto de elementos indefinidos que poseen las propiedades de los axiomas de campo y se dice que forman un campo.

Un campo que satisface los axiomas de orden se denomina un campo ordenado. Los símbolos de orden son:

$<$ "es menor que"

$>$ "es mayor que"

Axioma 7. El axioma de tricotomía. Si a y $b \in R$, entonces, una y solo una de las siguientes relaciones es válida:

$a < b$ $\quad a = b \quad$ $a > b$

Axioma 8. El axioma de transitividad. Si a, b y $c \in R$ tal que $a > b$ y $b > c$, entonces, $a > c$.

Axioma 9. El axioma de adición. Si a, b y $c \in R$ tales que $a > b$ entonces, $a + c > b + c$.

Axioma 10. El axioma de multiplicación. Si a, b y $c \in R$ tales que $a > b$ y $c > 0$ entonces, $ac > bc$.

Definición 1. Si a y $b \in R$ entonces, $a < b$ si y solo si $b > a$.

Definición 2. Un número real a es positivo si $a > 0$ y negativo si $a < 0$.

Definición 3. El enunciado de que una cantidad es mayor que o menor que otra cantidad es llamado una desigualdad.

Escribiendo b=0 en el axioma 7 se concluye que $a<0$, $a=0$ ó $a>0$. De este hecho y de la definición 2 se concluye que 0 no es positivo ni negativo.

Algunas veces es conveniente combinar una igualdad con una desigualdad. Así,

$a \leq b$ "a es menor que o igual a b".

$a \geq b$ "a es mayor que o igual a b".

Por ejemplo, $a \leq 0$ significa que a no es positivo y $a \geq 0$ significa que a no es negativo. Es claro que si ambos enunciados fuesen válidos simultáneamente, entonces $a=0$.

Hay una gran variedad de teoremas útiles que comprenden desigualdades. Demostraremos algunos teoremas y enunciaremos otros que el alumno puede demostrar.

Teorema 7. Si $a>0$ y $b>0$ entonces, $a+b>0$.

Demostración: Hipótesis: $a>0$ y $b>0$
Conclusión: $a+b>0$

$a > 0$	dato
$a+b > 0+b = b$	axioma 9
$b > 0$	dato
$a+b > 0$	axioma 8

Teorema 8. Si $a>0$ y $b>0$ entonces, $ab>0$.

Estos teoremas nos dicen que la suma o el producto de dos números positivos es positivo, los cuales son propiedades de cerradura para la adición o multiplicación de números positivos. Además, el producto o cociente de dos números de signos iguales es positivo y el producto o cociente de dos números de signos diferentes es negativo.

Teorema 9. Si $a, b \in R$ entonces, $a>b$ si y solo si $-a < -b$.

$3<4$
$-3 > -4$

Demostración: Hipótesis: $a, b \in R$ y $a>b$
Conclusión: $-a<-b$

Primero demostraremos que si $a>b$ entonces, $-a<-b$. Luego demostraremos que si $-a<-b$ entonces $a>b$, o sea;

Hipótesis: $a, b \in R$ y $-a<-b$
Conclusión: $a>b$

$a > b$	dato
$a+\big[(-a)+(-b)\big] > b+\big[(-a)+(-b)\big]$	axioma 9
$-b > -a$	¿por qué?
$-a < -b$	definición 1

Necesitamos ahora demostrar que si $-a < -b$ entonces, $a>b$.

Los pasos en la primera parte de la demostración son reversibles. Por tanto, la demostración consistirá en comenzar con $-a<-b$ y reescribir las desigualdades en orden inverso hasta $a>b$.

Corolario.

Si $a>0$, entonces $-a<0$.

Si $-a<0$, entonces $a>0$.

Teorema 10. Si $a,b,c \in R$ con $a>b$ y $c<0$, entonces $ac<bc$.

Demostración: Hipótesis: $a,b,c \in R$ con $a>b$ y $c<0$.
Conclusión: $ac<bc$

Puesto que $c<0$, se concluye del corolario precedente que $-c>0$. Entonces tenemos,

$$\begin{array}{ll} a > b & \text{dato} \\ -ac > -bc & \text{axioma } 10 \\ ac < bc & \text{teorema } 9 \end{array}$$

Un corolario es una verdad que se deriva como consecuencia de un teorema. Su demostración requiere poco razonamiento.

Teorema es una verdad no evidente, pero demostrable. Tiene carácter eminentemente deductivo, requiriendo de razonamiento lógico deductivo (demostración) para que pueda ser aceptado como verdad absoluta.

Axioma es un enunciado no demostrado, de carácter intuitivo que se capta espontáneamente sin razonamiento alguno; es una verdad intuitiva que tiene suficiente evidencia para ser aceptada como tal. Se llama también postulado.

El axioma 10 nos dice que ambos miembros de una desigualdad pueden ser multiplicados por un número positivo si el sentido de la desigualdad permanece inalterado. Y el teorema 10 nos dice que el sentido debe ser cambiado si el multiplicador es un número negativo.

Teorema 11. Si a,b,c y $d \in R$ con $a>b$ y $c>d$, entonces $a+c > b+d$.

Demostración: Hipótesis: $a,b,c,d \in R$ con $a>b$ y $c>d$.
Conclusión: $a+c > b+d$.

$$\begin{array}{ll} a>b \text{ y } c>d & \text{datos} \\ a+c > b+c & \\ b+c > b+d & \text{axioma } 9 \\ a+c > b+d & \text{axioma } 8 \end{array}$$

Teorema 12. Si $a>b$ y $c>d$ con a,b,c y $d > 0$, entonces $ac>bd$.

Teorema 13. Si $a>0$, $b>0$ y $a>b$, entonces $1/a < 1/b$.

Demostración: Hipótesis: $a>0$, $b>0$ y $a>b$.
Conclusión: $1/a < 1/b$.

$$\begin{array}{ll} a > b & \text{dato} \\ a\left(\frac{1}{ab}\right) > b\left(\frac{1}{ab}\right) & \text{axioma } 10 \\ \frac{1}{b} > \frac{1}{a} & \text{¿por qué?} \\ \frac{1}{a} < \frac{1}{b} & \text{definición } 1 \end{array}$$

AUTOEVALUACIÓN 4.

1.- Si $a \in R$, diga por qué la desigualdad $a>a$ es imposible.

2.- Si $b \in R$, demuestre que $b<0$ si y solo sí $-b>0$. Demuestre además, que $b>0$, si y solo sí $-b<0$ (sugestión, use el teorema 10).

3.- Si a,b,c y $d \in R$ con $b>0$, demuestre que $a/b > c/d$ si y solo sí $ad > bc$.

4.- Verifique los teoremas 7 al 13 usando enteros propiamente escogidos.

5.- Demuestre que $a>b$ si y solo sí $a-b>0$.

6.- Si $a \neq 0$, demuestre que $a^2>0$.

7.- Si $a>b$ y $c>0$, muestre que $a/c > b/c$.

8.- Si $a>b$ y $c<0$, muestre que $a/c < b/c$.

Como pudimos observar de las demostraciones desarrolladas en esta unidad, siempre se parte de una hipótesis dada (datos) y a través de una cadena de deducciones se llega a la veracidad de la proposición que debe probarse (conclusión) utilizando axiomas o postulados previamente establecidos.

Se empieza con un número comparativamente pequeño de axiomas, aceptados como verdaderos sin demostración alguna y a continuación, se deducen todas las demás proposiciones a partir de los axiomas por medio del razonamiento deductivo.

CAPÍTULO III