CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LOS AXIOMAS DE CAMPO DE LOS NUMEROS REALES.

INTRODUCCION:

En la mente de todos los matemáticos modernos está en el concepto de axioma y la deducción de teoremas a partir de axiomas. El propósito de esta unidad es introducir al estudiante en el método deductivo de la matemática moderna, a un nivel - que siendo rigurosa, sea suficientemente sencillo en presentación y contexto, para que permita una fácil comprensión.

Al término de esta unidad el alumno estará en condición de:

OBJETIVO:

1. Aplicar todos las propiedades y axiomas de los números reales en las demostraciones de teoremas y solución de - problemas.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO:

1. Estudia el capítulo III y copia en limpio todos los axiomas y teoremas del capítulo II para que puedas recordarlos fácilmente. Es necesario que observes la manera de como se demuestran los teoremas que vienen en el capítulo anterior a este para que después tú puedas hacer lo mismo con los que no están.

2. Practica la unidad resolviendo las autoevaluaciones que se incluyen en el capítulo.

3. El requisito de esta unidad consiste en contestar el Laboratorio y entregarlo a tu maestro.

AUTOEVALUACION.

1. Poner una palomita (√) en cada columna de los conjuntos de números que satisfagan los axiomas o propiedades de la columna izquierda.

PROPIEDAD	Conjunto de números.	N	K	Z	Q	R
Cerradura (+)						
Cerradura (-)						
Cerradura (x)						
Cerradura (÷)	excepto por 0					
Conmutativa (+)	$a+b = b+a$					
Conmutativa (x)	$a \cdot b = b.a$					
Asociativa (+)	$(a+b)+c = a+(b+c)$					
Asociativa (x)	$a(bc)=(ab)c$					
Distributiva	$a(b+c) = ab+ac$					
Identidad (+)	$a + 0 = a$					
Identidad (x)	$a \cdot 1 = a$					
Inverso (+)	$a+(-a) = 0$					
Inverso (x)	$a.\frac{1}{a} = 1$					
Densidad						

A través de los axiomas vistos en la lección, completa lo siguiente:

Cerradura

2.- La suma de dos números impares ______ un número impar.

3.- La suma de dos números primos _____ necesariamente primo, etc.

4.- La ley ____ de la adición de dos números reales, dice que se puede cambiar el orden de los sumandos sin alterar la suma.

5.- La ley conmutativa de la _____ de dos números reales dice que se puede cambiar el orden de _____ sin alterar el _________.

6.- La ____________ nos permite sumar o multiplicar tres o más números no importando la manera en que se agrupen los números, para realizar la operación.

7.- En particular, al número real llamado "cero", denotado por 0, se le llama el __________ en ___________ de los números reales.

8.- En particular, al número real llamado "uno", denotado por 1, se le llama el ___________ en ___________ de los números reales.

9.- El inverso ___________ de "a" es "(-a)" y tiene la propiedad de que la _________ de "a" y "(-a)" es igual a __________. En cambio, el inverso ____________ es "(1/a)" y tiene la propiedad de que el ___________ de "a" y "(1/a)" es igual a __________.

10.- La ley ___________ afirma que, un producto puede ser igual a una suma y que, recíprocamente, la suma en cuestión, es igual a un producto, puesto que la igualdad es _____________.

A través de los teoremas enunciados en la lección, completa lo siguiente:

11.- Si en las prop. 5 y 6 en vez de c=d, empleamos c=c, vemos que a+c = b+c y ac=bc. Estos resultados dan lugar a :

a) Puede sumarse______________a ambos miembros de una -- ecuación sin alterar la relación de =.

b) Puede_____________un mismo número a ambos miembros de una ecuación sin alterar la relación de =.

Encuentra el inverso aditivo y también el inverso mutliplicativo de cada uno de los siguientes números.

12.- 5

13.- 2/3

14.- 2x/5y

15.- 1

16.- -a

17.- 3a/3b

18.- -2

19.- (2x+y)

Aplica el axioma de la ley Distributiva en la solución de las siguientes proposiciones:

EJEMPLOS:

2x + 5x = (2+5) x = 7x;

5xy - 8yz = (5x - 8z) y;

(3x + 2y) z = 3xz + 2yz

20.- (x+a) (y+b)

21.- 3yz + 5wyz

22.- 3x (2y+3z)

Resolver las siguientes operaciones, sin justificar los pasos:

23.- 7+2

24.- (-5) + 0

25.- (-3)+(-3)

26.- (-13) + 11

27.- (-13)(11)

28.- 5 [3+(-3)]

29.- 5(-8)+(-5)(-8)

30.- $[(-2)(-3)]\ (-5)$

31.- $[(-7)+8]\ [(-15)+(-17)]$

32.- $[11+(-5)]\ +\ (-5)(11)$

33.- $(-18)+\{(-5)+[18+(-7)+(-4)]\}$

34.- $-2\ \{[3+(-5)+5]\}$

35.- $5-\{3-[7+(-5)]\}$

36.- $2-(3-7)$

37.- $-6\ [3(7+6)-4(3-8)]\ -4\ [(7-3)9-16]$

Demostrar las proposiciones siguientes. Dar las justificaciones de cada proposición, usando los axiomas y proposiciones de la lección.

38.- $(x+2)\ [x+(-2)] = x^2+2(-2)$

39.- $3+\{2a+5[a+(b+2)]\} = 7a+(5b+13)$

40.- $[(-5).x][(-2).x] = 10x^2$

41.- Si $\frac{3}{5}x = \frac{2}{7}$, entonces $x = 10/21$

CONSECUENCIAS INMEDIATAS DE LOS AXIOMAS DE CAMPO.

3-1 INDUCCIÓN Y DEDUCCIÓN.

¿Qué es una demostración? Preguntémonos, "¿qué es una demostración?". Supongamos que el alumno está tratando de convencer a un amigo de que la Tierra tiene forma esférica. Le habla acerca del horizonte que se amplía conforme el observador se eleva sobre la superficie de la Tierra, de los viajes alrededor del mundo, de la sombra redonda que la Tierra arroja sobre la Luna durante un eclipse de Luna, etc.

Estas consideraciones, con las cuales busca convencer a su amigo se llaman *argumentos*. ¿En qué se basa la fuerza o lo convincente de un argumento? Veamos, por ejemplo, el último de los argumentos anteriores. Afirmamos que la Tierra debe ser redonda porque su sombra es redonda. Esta aseveración se basa en el hecho, conocido por la experiencia, de que todos los cuerpos que tienen forma esférica proyectan una sombra redonda e inversamente, que los cuerpos de forma esférica tienen sombras redondas, independientemente de su posición. Se ve que en este caso, ante todo confiamos en los hechos, en nuestra experiencia directa con respecto a las propiedades de los objetos que nos rodean en nuestra vida cotidiana. Entonces se ha recurrido a una *deducción* que en el caso dado, se establece aproximadamente de la siguiente manera:

"Todos los cuerpos que en todas sus diferentes posiciones proyectan una sombra redonda, tienen la forma de una esfera". "La Tierra que durante los eclipses de Luna ocupa posiciones diferentes en relación con ésta, siempre proyecta una sombra redonda sobre la Luna". Conclusión: "Por tanto, la Tierra tiene la forma de una esfera".

Veamos ahora un ejemplo de la aritmética. Tomemos varios números impares arbitrarios, elevémoslos al cuadrado y restemos el número uno de cada cuadrado. Por ejemplo, $7^2-1=48$, $11^2-1=120$, $5^2-1=24$, $9^2-1=80$, $15^2-1=224$ y así sucesivamente. Cuando vemos los números resultantes, observamos que tienen una propiedad en común, cada uno de ellos es divisible entre 8. Llevando a cabo unas cuantas pruebas más con otros números impares y encontrando siempre que el resultado es divisible entre 8, podría establecerse tentativamente: "El cuadrado de cualquier número impar disminuido en uno da un número que es un múltiplo de ocho".

Como ahora estamos hablando de cualquier número impar, para demostrarlo debemos hallar argumentos que sirvan para todo número impar arbitrario. Para hacerlo, recuérdese primero que cualquier número impar puede expresarse en la forma $2n-1$, donde n es un entero. Entonces, el cuadrado de un número impar disminuido en uno, está dado por la expresión $(2n-1)^2-1$ Quitando los paréntesis se obtiene

$$\begin{aligned}(2n-1)^2-1 &= 4n^2-4n+1-1\\ &= 4n^2-4n\\ &= 4n(n-1)\end{aligned}$$

Pero en efecto, esta expresión resultante es un múltiplo de 8 para todo número natural n. Porque el factor 4 indica que el número $4n(n-1)$ es un múltiplo de 4; además como n y $n-1$ son enteros consecutivos, uno de ellos debe ser par; de aquí que sin duda nuestro producto todavía contiene otro factor 2. Por tanto, el número $4n(n-1)$ siempre es un múltiplo de 8, que era lo que debía demostrarse.

A partir de estos ejemplos puede verse que existen dos formas fundamentalmente distintas, mediante las cuales adquirimos conocimientos del mundo que nos rodea, de sus objetos, fenómenos y leyes naturales:

La primera es aquella en la cual, con base en un gran número de observaciones y experimentos sobre los objetos y fenómenos, se descubren las leyes generales. En los ejemplos anteriores, a base de observaciones, los hombres descubrieron la relación que existe entre la forma de un cuerpo y su sombra; las pruebas efectuadas con los cuadrados de los números impares nos condujeron a aseverar cierta propiedad de tales cuadrados disminuidos en uno. Este método, de sacar conclusiones generales a partir de la observación de numerosos casos particulares, se llama *inducción* (del latín "inductio"). Los casos particulares nos conducen a la idea de que existen leyes generales.

Un segundo método se usa cuando ya se conocen ciertas leyes generales, y se aplica este conocimiento a los casos particulares. Tal método se llama *deducción* (del latín "deductio").

En el último ejemplo, las leyes generales de la aritmética se aplicaron a un caso particular, probando así cierta propiedad de los números impares. Este último ejemplo también nos indica que la inducción y la deducción nunca pueden estar divorciadas una de otra.

Esta combinación de la inducción y la deducción es lo que caracteriza *al método científico*. De hecho, en el curso de toda demostración se usan ambos métodos. Cuando se buscan argumentos para demostrar una proposición, se recurre a los experimentos, las observaciones y los hechos, o también a las proposiciones ya demostradas. Entonces, con base en tales conocimientos, sacamos nuestras conclusiones referentes a la veracidad o falsedad de la proposición en cuestión. Por supuesto, los primeros conocimientos matemáticos y científicos se obtuvieron por el método inductivo, a partir de un número muy grande de observaciones y experimentos. Conforme creció el conjunto de conocimientos, se descubrió que podían obtenerse muchas verdades a partir de otras por medio de la deducción sin recurrir a las observaciones o a los experimentos.

Por ejemplo, ciertas proposiciones aceptadas como verdaderas sin demostración alguna llamadas *axiomas* (del griego

La primera es aquella en la cual, con base en un gran número de observaciones y experimentos sobre los objetos y fenómenos, se descubren las leyes generales. En los ejemplos anteriores, a base de observaciones, los hombres descubrieron la relación que existe entre la forma de un cuerpo y su sombra; las pruebas efectuadas con los cuadrados de los números impares nos condujeron a aseverar cierta propiedad de tales cuadrados disminuidos en uno. Este método, de sacar conclusiones generales a partir de la observación de numerosos casos particulares, se llama *inducción* (del latín "inductio"). Los casos particulares nos conducen a la idea de que existen leyes generales.

Un segundo método se usa cuando ya se conocen ciertas leyes generales, y se aplica este conocimiento a los casos particulares. Tal método se llama *deducción* (del latín "deductio").

En el último ejemplo, las leyes generales de la aritmética se aplicaron a un caso particular, probando así cierta propiedad de los números impares. Este último ejemplo también nos indica que la inducción y la deducción nunca pueden estar divorciadas una de otra.

Esta combinación de la inducción y la deducción es lo que caracteriza *al método científico*. De hecho, en el curso de toda demostración se usan ambos métodos. Cuando se buscan argumentos para demostrar una proposición, se recurre a los experimentos, las observaciones y los hechos, o también a las proposiciones ya demostradas. Entonces, con base en tales conocimientos, sacamos nuestras conclusiones referentes a la veracidad o falsedad de la proposición en cuestión. Por supuesto, los primeros conocimientos matemáticos y científicos se obtuvieron por el método inductivo, a partir de un número muy grande de observaciones y experimentos. Conforme creció el conjunto de conocimientos, se descubrió que podían obtenerse muchas verdades a partir de otras por medio de la deducción sin recurrir a las observaciones o a los experimentos.

Por ejemplo, ciertas proposiciones aceptadas como verdaderas sin demostración alguna llamadas *axiomas* (del griego

"axios" que significa "digno de confianza") se utilizan para demostrar la veracidad de todas las demás proposiciones llamados *teoremas* (del griego "theoreo, que significa pienso o medito). Se empieza con un número comparativamente pequeño de axiomas, aceptados sin demostración, y a continuación, se deducen todas las demás proposiciones a partir de los axiomas por medio del razonamiento deductivo procurando reducir, hasta donde sea posible, el número de axiomas.

Resumiendo nuestra exposición, podemos dar la respuesta a *¿qué es una demostración?* diciendo que es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas o postulados previamente establecidos.

3-2 LA LEY DE LA RAZÓN SUFICIENTE.

¿Por qué son necesarias las demostraciones? La necesidad de la demostración es una consecuencia de una de las leyes fundamentales de la lógica (la lógica es la ciencia de las leyes del razonamiento correcto), *la ley de la razón suficiente*.

Esta ley requiere que toda aseveración que se haga debe estar bien fundamentada, es decir, debe presentarse junto con argumentos lo suficientemente fuertes que apoyen su veracidad o sea, su concordancia con los hechos y con la realidad. Tales argumentos pueden basarse con referencias a una posible verificación a través de la observación y experimentos o bien, en el razonamiento correcto basado en deducciones sistemáticas.

En matemáticas, nos interesan principalmente los argumentos de este último tipo.

Ocasionalmente surge la pregunta de si es necesario dar una demostración cuando la proposición que debe probarse parece lo suficientemente clara y evidente por sí sola. Sobre el parti