"axios" que significa "digno de confianza") se utilizan para demostrar la veracidad de todas las demás proposiciones llamados *teoremas* (del griego "theoreo, que significa pienso o medito). Se empieza con un número comparativamente pequeño de axiomas, aceptados sin demostración, y a continuación, se deducen todas las demás proposiciones a partir de los axiomas por medio del razonamiento deductivo procurando reducir, hasta donde sea posible, el número de axiomas.

Resumiendo nuestra exposición, podemos dar la respuesta a *¿qué es una demostración?* diciendo que es una cadena de deducciones a través de las cuales se deduce la veracidad de la proposición que debe probarse, a partir de axiomas o postulados previamente establecidos.

3-2 LA LEY DE LA RAZÓN SUFICIENTE.

¿Por qué son necesarias las demostraciones? La necesidad de la demostración es una consecuencia de una de las leyes fundamentales de la lógica (la lógica es la ciencia de las leyes del razonamiento correcto), *la ley de la razón suficiente*.

Esta ley requiere que toda aseveración que se haga debe estar bien fundamentada, es decir, debe presentarse junto con argumentos lo suficientemente fuertes que apoyen su veracidad o sea, su concordancia con los hechos y con la realidad. Tales argumentos pueden basarse con referencias a una posible verificación a través de la observación y experimentos o bien, en el razonamiento correcto basado en deducciones sistemáticas.

En matemáticas, nos interesan principalmente los argumentos de este último tipo.

Ocasionalmente surge la pregunta de si es necesario dar una demostración cuando la proposición que debe probarse parece lo suficientemente clara y evidente por sí sola. Sobre el particular podemos puntualizar, en una ciencia exacta, por lo general no se puede confiar en lo que es obvio, porque el concepto de obvio es muy vago; lo que parece obvio a una persona puede ser bastante dudoso para otra. Sólo es necesario recordar la forma tan diferente en que a veces, distintos observadores describen el mismo evento y lo difícil que es determinar la veracidad de la evidencia de testigos oculares.

Por tanto, resumiendo lo que se ha dicho sobre la necesidad de las demostraciones, podemos establecer lo siguiente:

a) En la matemática, sólo se aceptan sin demostración un pequeño número de proposiciones fundamentales, *los axiomas*. Las proposiciones restantes, *los teoremas*, se demuestran a partir de estos axiomas construyendo una serie de deducciones.

b) Las demostraciones son necesarias como consecuencia de una ley fundamental del pensamiento correcto, *la ley de la razón suficiente*, de acuerdo con la cual nuestras aseveraciones deben tener un fundamento riguroso para que sean verdaderas.

c) Una demostración construida correctamente sólo se apoya en proposiciones previamente demostradas y no en lo que es obvio.

d) También es necesaria la demostración para establecer la generalidad de la proposición en cuestión, o sea, su aplicabilidad a todos los casos particulares.

e) Por último, mediante las demostraciones, la matemática se transforma en un sistema científico, en el cual cada teorema está vinculado mediante una cadena completa de deducciones con los teoremas previamente demostrados, y éstos con teoremas que se han probado aún antes y así sucesivamente, y las cadenas de estas deducciones se continúan hasta que, finalmente, se llega a las definiciones y axiomas básicos que constituyen los fundamentos de toda la ciencia matemática.

3-3 RAZONAMIENTO CORRECTO.

¿Cómo debe construirse una demostración? Ahora examinemos la cuestión de las especificaciones con las que debe cumplir una demostración para poder decir que es *correcta* o que hemos desarrollado un *razonamiento correcto*.

Nótese primero que toda demostración consiste de una serie de deducciones, por tanto, lo correcto o incorrecto de la demostración depende de la veracidad o falsedad de las deducciones que entran en ella.

Tal y como se vio anteriormente, el razonamiento deductivo consiste en la aplicación de alguna ley general a un caso particular dado. Con el objeto de evitar errores en nuestro razonamiento, necesitamos familiarizarnos con ciertos métodos que permiten representar las relaciones existentes entre los conceptos matemáticos.

Nuestra pregunta es ahora, ¿qué requisitos debe satisfacer una demostración para que sea válida (esto es, para garantizar la veracidad de la proposición que debe probarse)? Puede responderse de la manera siguiente:

a) La demostración sólo debe basarse en axiomas o en teoremas previamente demostrados.

b) Todas las deducciones, mediante las cuales se establece la demostración, deben llevarse a cabo correctamente.

c) Siempre debe tenerse en cuenta el propósito de la demostración, que es establecer la veracidad de la proposición que debe probarse, y no sustituirla por alguna otra proposición.

En vista de la necesidad de satisfacer estos requisitos, surge la pregunta de cómo pueden hallarse las demostraciones correctas. En primer lugar, cuando se pide demostrar una proposición, es necesario expresar con precisión la aseveración básica que debe probarse, a menudo esto no se hace con suficiente claridad. Después de haber determinado exactamente

lo que se desea probar, debemos extraer del enunciado del teorema dado, las condiciones que se dan y aquellas que son esenciales para la demostración; a continuación, todo esto se establece en forma simbólica, bajo los encabezados "Hipótesis" y "Conclusión". Después de escribir esto, se procede a probar el teorema. En la demostración se aplican axiomas o teoremas previamente establecidos y por supuesto, las relaciones especiales que se "dan" (hipótesis) en el teorema. Ahora, hay que hallar una cadena de razonamientos que conduce a partir de éstas a la proposición que debe probarse. ¿Cómo seleccionar, de la gran cantidad de proposiciones existentes, aquellas que servirán para probar nuestro teorema? En este caso, es mejor partir de la proposición que debe probarse y establecer el problema de la siguiente manera: ¿De qué proposición puede obtenerse por deducción la proposición que se desea probar? Si puede hallarse tal proposición, y si es una consecuencia de las condiciones y de los teoremas previamente probados, entonces nuestro problema está resuelto. No obstante, si no es así, debemos plantear nuevamente la pregunta para otra proposición, y así sucesivamente. En el razonamiento científico, una cadena de razonamientos de este tipo se llama *análisis*.

Para escribir una demostración, todos los pasos del análisis tendrán que tomarse en orden inverso. Esta forma de presentar una demostración, que es la usada generalmente en los libros de texto y en clase, se desarrolla en el orden inverso que el análisis y se llama *síntesis*. La demostración de un teorema por el método sintético parece más fácil y más natural, pero no debe olvidarse que, en la primera investigación para realizar una demostración, inevitablemente debemos hacer uso del análisis.

Por tanto, análisis y síntesis son dos etapas inseparablemente unidas de uno y del mismo proceso, la construcción de una demostración de un teorema dado, el análisis es el método para buscar los argumentos adecuados; la síntesis es el método para presentar la demostración.

Por supuesto, al buscar los argumentos, no siempre se encuentra de inmediato el camino correcto. En ocasiones, en vez de confirmar con el primer enfoque, hay que usar algún otro razonamiento. Con práctica continua se puede desarrollar la habilidad necesaria y aplicar con éxito el método del análisis, para encontrar los argumentos adecuados.

Por último, consideremos todavía otra distinción entre los métodos de demostración: demostraciones *directas e indirectas*. En una demostración directa, se establece la veracidad de la proposición que debe probarse, demostrando que es una consecuencia de las proposiciones previamente probadas.

En una demostración indirecta, se supone que la proposición que debe probarse es falsa y, a continuación, se prueba que esta suposición es contradictoria a la hipótesis o bien a alguna proposición probada con anterioridad. Por esta razón, a la demostración indirecta también se le da el nombre de demostración por contradicción o bien, el de demostración por reducción al absurdo.

Frecuentemente se aplica este tipo de demostración cuando, en la búsqueda de los argumentos, se observa que una demostración directa será difícil o incluso imposible de hallar. En tales casos, se supone que es verdadera la proposición contraria a la que debe probarse y, entonces, se intenta hallar una cadena de razonamientos que conduzca a una conclusión que contradiga a alguna proposición previamente establecida.

3-4 BASES PARA LA SELECCIÓN DE AXIOMAS.

¿Qué proposiciones se aceptan sin demostración? A primera vista, esta pregunta parece muy sencilla. El alumno dirá que se aceptan como axiomas aquellas proposiciones cuya veracidad ha sido ampliamente verificada y que no dan lugar a duda. Sin embargo, cuando se intenta seleccionar tales proposiciones en la práctica, encontramos que no es tan sencillo como parece. Gran número de proposiciones matemáticas

se han sometido tantas veces a la verificación práctica, que casi nadie duda de su veracidad. Pero esto no significa que debemos considerar todas esas proposiciones como axiomas. ¿Por qué no aceptar todas esas proposiciones como axiomas? ¿En esa forma, no se simplificaría mucho la exposición de la matemática, considerando como superfluas a muchas demostraciones?

De hecho, la matemática no se ha desarrollado de acuerdo con estos lineamientos. Por el contrario, los matemáticos han buscado la manera de reducir la lista de axiomas hasta el menor número posible y obtener todos los demás conocimientos matemáticos por el razonamiento deductivo, partiendo de este número pequeño de verdades fundamentales. ¿Por qué seleccionaron este camino aparentemente más difícil y complicado para construir un sistema de conocimientos matemáticos? Las razones para realizar ese esfuerzo fueron varias. En primer lugar, cuando se reduce el número de axiomas, cada axioma particular adquiere mayor significado, porque estos axiomas contienen en sí mismos, por decirlo así, toda la matemática futura que va a deducirse a partir de ellos. Por tanto, mientras menor sea el número de axiomas, más importantes, profundas y de mayor alcance son las propiedades que revela cada axioma.

Otra razón para esforzarse en limitar el número de axiomas, que mientras menor sea el número de axiomas, más fácil es investigar la validez de cada uno y de todos los axiomas combinados. Así nos enfrentamos con el problema de seleccionar el menor número posible de las proposiciones más básicas, generales e importantes de la matemática que deben ser aceptadas como axiomas. ¿Cómo hacer esta selección?

En primer lugar, debemos tener presente que los axiomas no pueden seleccionarse al azar, uno después del otro, ya que deben tener ciertas relaciones entre sí. Entonces, en la matemática no se estudian axiomas aislados sino un sistema completo de axiomas, ya que sólo un sistema considerado como un todo, puede representar correctamente las propiedades y las interrelaciones que existen en las matemáticas.

Es más, al seleccionar un sistema de axiomas, se debe tener cuidado de no incluir un par de proposiciones que se contradigan entre sí, ya que no pueden ser las dos verdaderas. Además, los axiomas no sólo deben ser compatibles entre sí, sino que, entre las proposiciones deducidas a partir de los axiomas no debe haber dos cualesquiera que se contradigan. Este requisito fundamental se llama *condición de consistencia*.

Además de lo anterior, también debe tenerse cuidado de no incluir en nuestro sistema de axiomas, proposición alguna que pueda deducirse de otros axiomas. Este requisito es obvio, en virtud de que se desea reducir al mínimo nuestro sistema, es decir, procurar que contenga el menor número posible de proposiciones no demostradas. Si una proposición dada puede probarse a partir de otros axiomas, entonces no es un axioma sino un teorema, y no existe razón alguna para incluirlo en el sistema de axiomas. El requisito de que ningún axioma sea deducible de otros axiomas se llama *condición de independencia*.

Sin embargo, al tratar de hacer mínimo el sistema de axiomas, no debemos llegar a extremos y omitir en él algunas proposiciones que sean necesarias para deducir alguno de los teoremas de las matemáticas. Esto nos conduce a la tercera condición que debe satisfacer un sistema de axiomas, *la condición de completo*. Esta condición puede expresarse de manera más precisa como sigue: Si el sistema de axiomas está incompleto, entonces, siempre es posible construir una nueva proposición (por supuesto, una proposición que use los mismos conceptos fundamentales que los axiomas) que no es deducible a partir de los axiomas y que tampoco los contradiga. Si, por otra parte, el sistema de axiomas está completo, entonces cualquier nueva proposición que se agregue al sistema matemático y que use los mismos conceptos de los que tratan los axiomas, es una consecuencia de estos axiomas, o bien, los contradice.

Con el objeto de aclarar todavía mejor el significado de las tres condiciones de completo, independencia y consistencia de un sistema de axiomas, daremos el siguiente ejemplo, él proporciona una analogía bastante buena para ellas.

Examinemos un sistema de ecuaciones de primer grado en tres incógnitas. Consideremos cada una de las incógnitas del sistema como un "concepto" sujeto a definición y cada ecuación como cierto tipo de axioma que permite determinar las relaciones existentes entre estos conceptos. Así, tenemos el sistema

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y + 4z &= 6 \end{aligned}$$

¿Es posible determinar las incógnitas x, y, z de este sistema? No, ya que, en este caso el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas. El sistema no satisface la condición de completo.

Ahora, tratemos de remediar esta deficiencia, agregándole al sistema una ecuación:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y + 4z &= 6 \\ 3x + 3y + 12z &= 18 \end{aligned}$$

Examinando cuidadosamente el nuevo sistema, se encuentra que con la introducción de la nueva ecuación no ha mejorado la situación ya que la tercera ecuación se deduce directamente de la segunda (la tercera ecuación es precisamente la segunda ecuación multiplicada por tres) y no se proporciona una nueva relación. Ahora, el sistema viola la condición de independencia.

Cambiemos ahora la tercera ecuación y examinemos el sistema siguiente:

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y + 4z &= 6 \\ 3x + 3y + 12z &= 15 \end{aligned}$$

Pero nuevamente este sistema es inútil para la determinación de las incógnitas. Porque dividiendo ambos miembros de la última ecuación por 3, se obtiene la ecuación,

$$x + y + 4z = 5$$

mientras que la segunda ecuación nos da

$$x + y + 4z = 6$$

¿Cuál de estas ecuaciones se debe creer? Es evidente que este es un caso de sistema inconsistente, cuyas incógnitas tampoco se pueden determinar.

Si finalmente examinamos el sistema,

$$\begin{aligned} 2x - y - 2z &= 3 \\ x + y + 4z &= 6 \\ 2x + y + 5z &= 8 \end{aligned}$$

es fácil ver que el sistema tiene una solución única, ($x=5$, $y= 13$, $z= -3$); o sea es consistente, independiente y completo.

Si a este sistema se agrega una cuarta ecuación en x, y y z, es una combinación de las tres ecuaciones dadas o bien, las contradice. De estas consideraciones, se ve que la selección de los axiomas que van a usarse como el fundamento de las matemáticas está muy lejos de ser arbitraria y está sujeta a requisitos muy rígidos. El trabajo de determinar un sistema aceptable de axiomas se empezó a fines del siglo pasado, y aunque los eruditos han realizado muchos progresos en esta dirección, la tarea aún en la actualidad, no puede considerarse terminada. En particular, al someter un sistema de axiomas existente a un nuevo examen sistemático, en ocasiones los matemáticos descubren que el sistema contiene axiomas superfluos, es decir, "dependientes" que pueden deducirse de otros más sencillos o más generales. Todas estas investigaciones son de gran interés para el matemático porque su propósito es averiguar cuáles son las propiedades más generales, básicas e

importantes de esta ciencia. Hagamos ahora un resumen de lo que se ha dicho.

RESUMEN.

a) Se ha señalado que nuestros primeros conocimientos se obtuvieron por medio de la inducción, es decir, de las observaciones y los experimentos.

b) Se han enunciado las propiedades básicas y más generales de un sistema de proposiciones fundamentales llamadas axiomas.

c) Un sistema de axiomas correctamente construido debe satisfacer las condiciones de completo, independencia y consistencia.

d) Aparte de los axiomas, todas las demás proposiciones (los teoremas) se obtienen mediante cadenas de deducciones, es decir, por medio del razonamiento deductivo, partiendo de los axiomas y teoremas probados previamente. Tales cadenas de deducciones se llaman demostraciones.

e) Para que una demostración sea correcta, debe basarse en razonamiento correcto. El éxito en hacer demostraciones correctas depende de 1) un enunciado preciso y correcto de la proposición que debe probarse. 2) La selección de argumentos necesarios y válidos. 3) Una observancia estricta de las reglas de la lógica en el curso de la demostración.

3-5 CONSECUENCIAS.

Los axiomas que enlistamos en la unidad anterior pueden ser considerados en conjunto, puesto que se refieren a los métodos para combinar los números reales mediante las operaciones básicas. Son tan simples que el estudiante los ha utilizado siempre, probablemente, sin darse cuenta exactamente qué propiedades estaba empleando. No obstante, ellos son básicos, puesto que hay ciertos teoremas que se infieren directamente. Los teoremas representan propiedades básicas del conjunto de números reales y se aplicarán en los próximos capítulos.

En las demostraciones convendremos en:

1) Si una proposición demostrada, sea por el maestro o por los estudiantes, es de aquella que usaremos a menudo para estructurar nuestro sistema deductivo la llamaremos teorema. De otro modo lo llamaremos ejemplo. Hablando estrictamente, todos son teoremas, pero usaremos esta terminología para que el estudiante sepa cuáles debe recordar.

2) Para abreviar, haremos referencia a los axiomas indicando los números que les fueron asignados en la unidad anterior.

3) Sálvo que se indique lo contrario, todas las variables representan números reales.

Ahí donde falten referencias, el estudiante deberá justificarlo. En los teoremas que se enuncian sin demostración, se deja al estudiante que los demuestre. Los ejemplos y teoremas que a continuación se exponen, proporcionarán una mejor comprensión de ellos y harán notar donde son utilizados en nuestra aritmética ordinaria y álgebra elemental.

Teorema 14. El inverso aditivo del inverso aditivo de a es a, es decir $-(-a) = a$.

Demostración: Hipótesis: $a + (-a) = 0$

Conclusión: $-(-a)=a$

$(-a) + [-(-a)] = 0$	Ax. 6
$a + (-a) = 0$	Ax. 6
$(-a) + a = 0$	Ax. 2

Estas ecuaciones revelan que $-(-a)$ y a son ambos inversos aditivos de $(-a)$, concluimos:

$$-(-a) = a \qquad \text{T-4}$$

El estudiante puede establecer los teoremas enunciados como parte de la demostración.

Teorema 15. Ley de la cancelación de la suma.

$$a + b = c + b$$

entonces, $a = c$

Demostración: Hipótesis: $a + b = c + b$

Conclusión: $a = c$

1. $a+b = c+b$	1. Dado
2. $(a+b) + (-b) = (c+b)+(-b)$	2. Propiedad 5
3. $a + [b+(-b)] = c + [b+(-b)]$	3. Axioma 3
4. $a + 0 = c+0$	4. Axioma 6, en ambos lados de la igualdad.
5. Por tanto, $a=c$	5. Axioma 5, en ambos lados de la igualdad.

Teorema 16. Ley de la cancelación de la multiplicación.

$$b \neq 0,\ a.b = c.b$$

entonces, $a = c$