Teorema 17. Para cualquier $a \in R$, $0.a = a.0 = 0$

Demostración: Hipótesis: $a = a$ Prop. 1
Conclusión: $a.0 = 0$

1. $a = a$	Dato
2. $a.0 = a.0$	Prop. 6
3. $a.0 = a.0+0$	Axioma 5
4. $= a.0+ \{a.0 + [-(a.0)]\}$	Axioma 6
5. $= [(a.0)+(a.0)] + [-(a.0)]$	Axioma 3
6. $= a(0+0) + [-(a.0)]$	Axioma 4
7. $= a0 + [-(a.0)]$	Axioma 5
8. $= 0$	Axioma 6

El producto de cualquier número real por 0 es 0.

Teorema 18. Si $a,b \in R$ y $ab = 0$, entonces $a=0$ o bien, $b=0$.

Demostración: Hipótesis: $ab= 0$ y $a \neq 0$
Conclusión: $b= 0$

1. $ab=0$; $a \neq 0$	Dato
2. $1/a\ (ab)= 1/a\ .(0)$	Prop. 6
3. $(1/a\ .\ a)b = 1/a\ .\ 0$	Axioma 3
4. $1.b = 1/a\ .0$	Axioma 6
5. $1.b = 0$	Teorema 17
6. $b=0$	Axioma 5

De la misma manera se puede demostrar que si, $ab=0$ y $b \neq 0$, entonces $a=0$.

Teorema 19. Si $a,b \in R$, entonces, $(-a)b = -(ab)$.

Demostración: Hipótesis: $a,b \in R$
Conclusión: $(-a)b$ y $-(ab)$ son ambos inversos aditivos de ab

1. $(-a)b \in R$	1. ______
2. $(-a)b = (-a)b$	2. ______
3. $ab+(-a)b= ab+(-a)b$	3. ______
4. $= ba + b(-a)$	4. ______
$= b(a+(-a))$	5. ______
$= b.0$	6. ______
$= 0$	7. ______

Por tanto, $(-a)b$ es inverso aditivo de ab, pero $-(ab)$ también es inverso aditivo de ab. Por tanto, $(-a)b= -(ab)$. T-4.

Corolarios: $(-a)b = a(-b)$ y $(-1)b = -b$

Teorema 20. Para cualquier $a,b \in R$

$$(-a)(-b) = ab$$

Teorema 21. Si $a, b \neq 0$, $a=b$, entonces, $1/a = 1/b$.

Teorema 22. Si $a=b$, entonces $-a = -b$.

Teorema 23. Para cualquier $a,b \in R$

$$-(a+b) = -(a) + (-b)$$

En nuestro desarrollo de los números reales hemos supuesto sólo dos operaciones que son suma (+) y producto (x ó .). Los axiomas sólo dan las propiedades de la suma y de la multiplicación. A través del axioma 6, sólo conocemos una propiedad de (-a): que es el número que al sumarse a (a) da 0, por lo que hasta ahora visto sabemos que si $2\varepsilon R$, tiene un inverso aditivo $-2\varepsilon R$, y que $2 + (-2) = 0$.

Hemos demostrado también teoremas concernientes a la suma y a la multiplicación. Por tanto, es evidente la ventaja de definir cualquier otra operación en términos de ellas. Con esto en mente, introduzcamos un nuevo método de asociar los elementos de un par ordenado (a,b), con algún número real y luego investiguemos la asociación para ver si es una operación binaria sobre R.

Definición de resta: La resta es el proceso que asocia un número real c con un par ordenado de números reales (a,b) tal que $a-b = c$, o bien $a = b+c$, donde $a-b$ se llama la *diferencia* de a y b.

EJEMPLOS.

$7 - 2 = 5$, puesto que $2 + 5 = 7$

$\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$, puesto que $\sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$

Cada número real tiene exactamente un inverso aditivo. Sin embargo, cada par de números tiene una suma única. Por ello, para cada par de números reales a,b existe $a + (-b)$ y es único. Pero notemos que $b + a + (-b) = a$. Por tanto, por definición de resta tenemos la siguiente igualdad:

$$a + (-b) = a - b$$

Esto nos conduce al siguiente teorema:

Teorema 24 (resta). Para cualquier $a,b \in R$, $a-b$ es el número real único $a + (-b)$.

Este es un teorema muy útil y poderoso. Usarlo nos permite realizar la operación de resta convirtiéndola en una su-

ma y esto es necesario si deseamos aplicar los axiomas y teoremas previos.

Las demostraciones de los siguiente teoremas se dejan al estudiante.

Teorema 25. Si $a \in R$, entonces $a-0 = a$.

Teorema 26. $-(a-b) = -a + b$.

Teorema 27. $a - (b+c) = (a-b) - c$

Teorema 28. $a + (b-c) = (a+b) - c$

Teorema 29. $a - (b-c) = (a-b) + c$

Teorema 30. Si $a=b$, entonces, $a-c = b-c$

Teorema 31. $a(b-c) = ab-ac$.

Demostración: Hipótesis: $a,b,c \in R$
Conclusión: $a(b-c) = ab-ac$

1.	$a(b-c) = a[b+(-c)]$	1. Por definición de resta.
2.	$= ab + a(-c)$	2. Axioma 4
3.	$= ab + (-c)a$	3. Axioma 2
4.	$= ab + [-(ca)]$	4. Teorema 19
5.	$= ab - ca$	5. Por definición de resta
6.	$= ab - ac$	6. Axioma 2

Definamos ahora la división de una manera similar a la que usamos para definir la resta.

Definición de división: La división es el proceso que asocia un número real c con un par ordenado de números reales (a,b) tales que, $a \div b = a/b = c$, entonces $b.c = a$.

EJEMPLOS.

$10 \div 2 = 5$, ya que $5 \;.\; 2 = 10$

$4 \div 2 = 2$, ya que $2 \;.\; 2 = 4$

Sabemos que la única excepción de la división es $b \neq 0$. De tal manera que:

Teorema 32 (división). Para cualquier $a, b \in R$, con $b \neq 0$, a/b es el número real único $a(1/b)$.

$$\frac{a}{b} = a \;\frac{1}{b}$$

El símbolo a/b se lee *el cociente de a* dividido por b; a es el numerador y b el denominador de la fracción. También se les llama dividendo y divisor respectivamente.

Nuevamente, recordamos el paralelismo entre la resta y la división. Para restar b de a se suma a a el inverso aditivo de b. Para dividir a entre b se multiplica por el inverso multiplicativo de b.

Teorema 33. El inverso multiplicativo de a/b es b/a, donde $a,b \neq 0$.

Demostración: Hipótesis: $a\neq 0$, $b \neq 0$ y $a/b \neq 0$
Conclusión: b/a es inverso multiplicativo único

1. $a/b \neq 0$	1. Dado
2. $a \neq 0$	2. Dado
3. $a/b = 0$, entonces $b.0=a$	3. Por definición, división.
4. entonces $a=0$	4. Teorema 17 y propiedad 2

Esto contradice la hipótesis de que $a \neq 0$. Luego $a/b \neq 0$ y, por tanto, debe tener un inverso multiplicativo b/a, tal que $(a/b)(b/a) = 1$. Esto implica que

5. $(a.\ 1/b)(b/a) = 1$	5. Definición de división.
6. $(1/a \;.\; b)\left[(a.\ 1/b)(b/a)\right] = (1/a\ b).1$	6. Propiedad 6
7. $\left[(a.\ 1/a)(b.\ 1/b)\right]\ (b/a) = 1/a\ b$	7. Axiomas 2, 3 y 5
8. $b/a = b/a$	8. Axioma 5,6 y por definición de división.

Por tanto, a/b tiene un único inverso multiplicativo.

Teorema 34. $1/a \;.\; 1/b = 1/ab$, donde $a,b \neq 0$.

Demostración: Hipótesis: $a\neq 0$ y $b\neq 0$ y $ab\neq 0$
Conclusión: $1/a \;.\; 1/b = 1/ab$

1. $(ab)(1/ab) = 1$	1. Axioma 6
2. $(1/a \;.\; 1/b)\left[ab.(1/ab)\right] = (1/a \;.\; 1/b).1$	2. Propiedad 6
3. $\left[(a.\ 1/a)(b.1/b)\right].\ 1/ab = 1/a \;.\; 1/b$	3. Axiomas 2, 3 y 5
4. $1/ab = 1/a \;.\; 1/b$	4. Axioma 5 y 6

Teorema 35. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{a.c}{b.d}$, donde $b,d \neq 0$

Demostración: Hipótesis: $b\neq 0$ y $d\neq 0$
Conclusión: $a/b \;.\; c/d = ac/bd$

1. $a/b.c/d = (a.1/b)(c.1/d)$	1. ______
2. $= (a.c)(1/b.1/d)$	2. ______
3. $= (a.c)(1/bd)$	3. ______
4. $= a.c/b.d$	4. ______

Teorema 36. $\dfrac{ac}{bc} = \dfrac{a}{b}$; b, c, $\neq 0$

Demostración: Hipótesis: $b \neq 0$ y $c \neq 0$
Conclusión: $ac/bc = a/b$

1.	$ac/bc = ac\ (1/bc)$	1. ____________
2.	$= ac\ (1/b . 1/c)$	2. ____________
3.	$= (a . 1/b)(c . 1/c)$	3. ____________
4.	$= a/b$	4. ____________

Teorema 37. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a+c}{b}$, donde $b \neq 0$

Teorema 38. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad+bc}{bd}$, donde b, $d \neq 0$

Teorema 39. $\dfrac{-(a)}{-(b)} = \dfrac{a}{b}$, donde $b \neq 0$

Teorema 40. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a-c}{b}$, donde $b \neq 0$

Teorema 41. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a}{b} . \dfrac{d}{c}$, donde b, c, $d \neq 0$

¿Reconoce el estudiante estos últimos teoremas como reglas que ha estado usando en Aritmética y Álgebra? El teorema 36 se usa cuando se reduce una fracción a términos más simples o se eleva a términos mayores; los teoremas 34 y 35 se usan para multiplicar fracciones; etc.

Además de estudiar todos los teoremas demostrados, el estudiante debería resolver problemas con respecto a los teoremas; en esta forma, quedarán claras la mayor parte de las ideas básicas del Álgebra y se pondrán de manifiesto las razones lógicas que hay tras de estas ideas.

Ahora sí, estamos en condición de que el estudiante inicie las operaciones con expresiones algebráicas, donde suponemos que todas las variables que intervienen son números reales, a menos que consignemos las restricciones específicamente.

Esperamos que el estudiante haya vislumbrado la importancia del estudio de los axiomas y teoremas, puesto que serán de gran utilidad en la resolución de problemas y en la comprensión de material posterior.

3-6 APLICACIONES DE LOS AXIOMAS DE CAMPO DE LOS NÚMEROS REALES.

EJEMPLO 1.

Despejar "a" de la ecuación: $2a + 1 = 5$, $a \in R$ dando las justificaciones necesarias en cada paso:

$2a + 1 = 5$	dato
$-1 + 2a + 1 = -1 + 5$	propiedad aditiva
$2a + 1 - 1 = -1 + 5$	ley conmutativa
$2a + 0 = -1 + 5$	elemento inverso aditivo
$2a = 4$	elemento identidad suma y hecho conocido
$\frac{1}{2}(2a) = \frac{1}{2}(4)$	propiedad multiplicativa
$(\frac{1}{2})(2)(a) = \frac{1}{2}(4)$	ley asociativa
$1 . a = \frac{1}{2}(4)$	elemento inverso multiplicativo
$a = 2$	hecho conocido y elemento de identidad mult.

EJEMPLO 2.

Despejar "a" de la ecuación: $\dfrac{3a - 2}{5} = a + 2$; $a \in R$.

$\dfrac{3a - 2}{5} = a + 2$	dato
$5\left(\dfrac{3a-2}{5}\right) = 5(a+2)$	prop. multiplicativa