

CAPÍTULO

PÁG.

II

FACTORIZACIÓN.

Lección 1.

2-1	Descomposición en factores.-----	55
2-2	Factores primos.-----	57
2-3	Máximo común divisor.-----	59
2-4	Calculo del m.c.d. por factores primos.----	61
2-5	La propiedad distributiva como herramienta para la factorización de polinomios.-----	64
2-6	Factorización de una diferencia de dos cuadrados.-----	68
2-7	Factorización de trinomios cuadrados perfectos.-----	72
2-8	Factorización de una expresión que es el cubo de un binomio.-----	75
2-9	Factorización de la suma o diferencia de dos cubos.-----	77
	Respuestas a las autoevaluaciones.-----	80

Lección 2. FACTORIZACIÓN DE UN TRINOMIO GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

2-10	Trinomio general de segundo grado.-----	85
2-11	Descomposición por agrupación.-----	102
2-12	Mínimo común múltiplo.-----	106
2-13	M.C.M. por descomposición de factores primos.	107
2-14	M.C.M. de monomios.-----	110
2-15	M.C.M. de polinomios.-----	112
	Respuestas a las autoevaluaciones.-----	115

1er. SEMESTRE.

ÁLGEBRA I.

UNIDAD VIII.

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

INTRODUCCIÓN:

En esta unidad veremos las partes principales de las expresiones algebraicas y estarás en condiciones de ordenar cualquiera de ellas.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS:

1. Definir el Álgebra como rama de las Matemáticas y establecer su diferencia con la Aritmética.
- 2.- Identificar a partir de ejemplos dados, los conceptos de cantidad positiva, cero, cantidad negativa y valor absoluto.
- 3.- Definir o reconocer los términos o conceptos siguientes:
 

Expresión algebraica.	Exponente.
Término.	Monomio.
Signo.	Binomio.
Coficiente.	Trinomio.
Parte literal.	Polinomio.
Grado.	
- 4.- Ordenar correctamente un polinomio según las potencias de una literal.

## PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

- 1.- Estudia la lección 1 del capítulo I de tu texto. Para los objetivos del 1 al 4 estudia la sección 4-1 del mismo capítulo. Es importante que tengas presente la definición de álgebra o un significado más amplio de esta materia, puesto que es la base para estudios superiores.

Copia en tu cuaderno todas las definiciones que encuentres y en base a ello, trata de distinguir un concepto del otro. Para que puedas comprender mejor estos objetivos, resuelve la autoevaluación.

- 2.- Como ritmo de trabajo, te sugerimos el siguiente:

1er. día	-	objetivo 1.
2o. día	-	objetivo 2.
3er. día	-	objetivos 3 y 4.
4o. día	-	Laboratorio.

- 3.- El requisito para tener derecho a presentar esta unidad será entregar resuelto el Laboratorio de la unidad a tu asesor.

## AUTOEVALUACIÓN:

- 1.- Grupo de números y letras combinadas entre sí mediante una o más de las operaciones fundamentales y que puede tener uno o más términos.
  - 0) Coeficiente.
  - 1) Grado.
  - 2) Término.
  - 3) Expresión algebraica.
  - 4) Exponente.
- 2.- Un refrigerador de las 8 A.M. marca una temperatura de  $-10^{\circ}$  a las 3 P.M. ha ascendido  $20^{\circ}$ , expresa la temperatura a las 3 P.M.
  - 0)  $-30^{\circ}$
  - 1)  $+10^{\circ}$
  - 2)  $-10^{\circ}$
  - 3)  $32^{\circ}$
  - 4)  $20^{\circ}$
- 3.- Una embarcación se mueve hacia el norte 28 Km, si se regresa hacia el sur 13 Km, ¿a qué distancia se encuentra del punto de partida?
  - 0) 15
  - 1) 28
  - 2) 41
  - 3) 13
  - 4) 10
- 4.- Encuentra el valor absoluto de  $-7$ .
  - 0)  $1/7$
  - 1)  $-7$
  - 2) 7
  - 3) 0
  - 4) 1
- 5.- Es el exponente de una letra, con respecto a la letra.
  - 0) Factor.
  - 1) Grado.
  - 2) Coeficiente.
  - 3) Base.
  - 4) Término.
- 6.- Encuentra el grado del siguiente término con respecto a la letra "y":  $9x^3y^5z^2a$ 
  - 0) Primero.
  - 1) Segundo.
  - 2) Tercero.
  - 3) Quinto.
  - 4) Noveno.
- 7.- Expresión algebraica que consta de cinco o más términos.
  - 0) Expresión.
  - 1) Polinomio.
  - 2) Literal.
  - 3) Coeficiente.
  - 4) Exponente.

8.- Respecto al número de términos, ¿cómo se clasifica la expresión:  $3ab - 2ac - 3de$ ?

- 0) Coeficiente.      1) Factor.      2) Tercer grado.  
3) Trinomio.      4) Binomio.

9.- Ordenar el siguiente polinomio, con respecto a las potencias ascendentes de la letra "a".

$$3a^5y^2 - 2y - 5a^3y^2 + 2ay^3 + 1 + 2a^2y$$

- 0)  $1 - 2y + 2ay^3 + 2a^2y - 5a^3y^2 + 3a^5y^2$   
1)  $1 + 2ay^3 - 5a^3y^2 + 3a^5y^2 + 2a^2y - 2y$   
2)  $2ay^3 + 5a^3y^2 - 3a^5y^2 - 2a^2y + 2y + 1$   
3)  $3a^3y^2 - 5a^3y^2 + 2a^2y + 2ay^3 - 2y + 1$   
4)  $2a^2y - 5a^3y^2 + 2ay^3 + 3a^5y^2 + 1 - 2y$

## OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

### LECCIÓN 1.

#### 1-1 DEFINICIONES.

"El Álgebra es la rama de las matemáticas, cuyo objeto es simplificar y generalizar las cuestiones relativas a los números". El Álgebra proporciona los medios para expresar de manera concisa las relaciones entre números entre sí desconocidos, además de proporcionar los medios para manipular tales números. Estos dos aspectos de la utilidad del Álgebra se harán más evidentes a medida que el estudiante avance en sus cursos profesionales.

El concepto de "cantidad" en Álgebra, es mucho más amplio que en Aritmética.

En Aritmética, las cantidades se representan por números y éstos expresan valores determinados. Así, 20 expresa un sólo valor: veinte. Para expresar un valor mayor o menor que éste, habrá que escribir un número distinto de 20.

En Álgebra, para lograr la generalización, las cantidades se representan por medio de letras, las cuales pueden representar todos los valores. Así, "a" representa el valor que nosotros le asignemos, y por lo tanto puede representar 20 ó más de 20 ó menos de 20, a nuestra elección, aunque conviene advertir que cuando en un problema asignemos a una letra un valor determinado, esa letra no puede representar en el mismo problema, otro valor distinto del que le hemos asignado.

En la vida diaria es frecuente el uso de símbolos para simplificar anotaciones y facilitar las operaciones, como el signo \$, que indica pesos y el signo °, que indica grados, pero los más usados son simples abreviaturas en las que la primera letra de una palabra reemplaza a toda la palabra. La longitud de un rectángulo puede ser representada por "L", el radio y el diámetro de una circunferencia por "r" y "d", la presión de un gas, por "p", etc.

Estas letras pueden representar un número cualquiera, entero o fraccionario. Así, si el largo de un rectángulo mide 30 centímetros, la "L" representa 30 cm., pero si el lado midiera medio metro, la "L" representa  $1/2$  m.

Las letras que representan algún número se llaman "literales". Comúnmente, las últimas letras del alfabeto: x, y, z, se utilizan para representar cantidades desconocidas y los números para representar las cantidades conocidas.

En Álgebra, la suma, la resta, la multiplicación y la división se indican como en Aritmética con los signos + (más), - (menos),  $\times$  (multiplicado por) y  $\div$  (dividido entre).

En el caso de la multiplicación, en lugar del signo  $\times$ , suele emplearse un punto entre los factores, o también, colocando los factores entre paréntesis. Así, c.d y (c)(d) equivalen a  $c \times d$ . Los signos de multiplicación no se usan cuando se desea expresar el producto de varios factores literales o numéricos. Por ejemplo, abc es igual a  $a \times b \times c$ ;  $3xy$  es igual a  $3 \times x \times y$ .

El signo de división, también puede ser expresado por medio de una raya de quebrado entre los dos números que se quieren dividir, observando únicamente que el número de arriba es el dividendo y el que está abajo es el divisor. Entonces  $a:b$  se indica también como  $a/b$ .

Existen otros símbolos, los paréntesis en sus diferentes formas: paréntesis circular ( ), paréntesis rectangular [ ], y paréntesis de llaves { }.

El paréntesis es una agrupación de términos e indica que la operación colocada entre ellos, debe efectuarse primero. Así,  $3(6+2)$ , indica que el resultado de la suma de  $6+2$  debe multiplicarse por 3.

"Punto de referencia y conceptos de cantidad positiva y negativa".- Al salir de la escuela, un alumno puede dirigirse hacia la derecha o hacia la izquierda. La escuela es el punto de partida o de referencia.

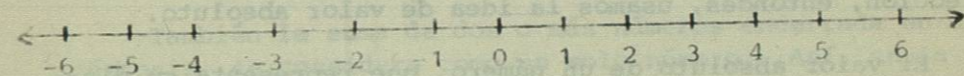
Una ciudad, puede estar al norte o al sur del ecuador. El ecuador es la línea de referencia. También, puede estar al este o al oeste de un meridiano determinado. El meridiano es la línea de referencia.

La temperatura de un cuerpo, puede ser superior o inferior a  $0^{\circ}\text{C}$ .

En el globo terrestre, tanto las alturas como las depresiones tienen como referencia, el nivel del mar.

Un número, puede ser mayor o menor que cero. En la escala de los números, el punto de referencia es cero.

Para representar gráficamente problemas de esta naturaleza es indispensable conocer el punto de partida o de referencia y el sentido del fenómeno. Cada uno de los ejemplos anteriores, se representa mediante una gráfica formada por una línea recta horizontal, en la que se marca 0, el origen o punto de referencia y las cantidades, se toman a uno y otro lado de dicho punto. (ver figura).



Los números que se encuentran a la derecha del origen, son números positivos y se les asigna el signo +.

Los números que se encuentran a la izquierda del origen son números negativos y se les asigna el signo -.

El signo +, tiene dos significados, adición y sentido. Así, +5 indica que a cierta cantidad hay que añadirle 5 unidades, o bien, que el cinco está a la derecha del origen en el eje orientado.

El signo -, también tiene dos significados, sustracción y sentido. Así, -8 indica que a cierta cantidad se le han restado 8 unidades, o que el 8, está a la izquierda del cero en el eje orientado.

"Concepto de cero".- Cero es la ausencia de cantidad. Toda cantidad positiva es mayor que cero y cero es mayor que cualquier cantidad negativa.

Entre dos cantidades cualquiera, es mayor la cantidad que se encuentre más a la derecha en la recta orientada; así, +5 es mayor que +3, +2 es mayor que -4, -2 es mayor que -6, etc.

"Valor absoluto".- Los números algebraicos están constituidos por los positivos, el cero y los negativos. (R)

El valor absoluto de un número algebraico es el valor de dicho número sin tomar en cuenta su signo. Así el valor absoluto de -10 es 10.

Las cantidades de 5 y -5 tienen el mismo valor absoluto; -6 y -12 tienen diferente valor absoluto. Los puntos que corresponden a -5 y 5 en la recta numérica, están a la misma distancia del origen pero en direcciones opuestas. Si nos interesara la distancia del punto 0 sin importarnos la dirección, entonces, usamos la idea de valor absoluto.

El valor absoluto de un número, que representa su distancia al 0, se indica escribiendo el número entre dos líneas verticales:

$|-2|$ , se lee "el valor absoluto de -2".

$|-2| = 2$ , puesto que el punto -2, está a una distancia de 2 unidades de 0.

Es claro, que el valor absoluto de un número cualquiera y el de su opuesto, son iguales, puesto que el número y su opuesto, están a la misma distancia de 0.

Por ejemplo:  $|3| = |-3| = 3$  y es obvio que  $|0| = 0$

De lo anterior se observa fácilmente la diferencia entre cantidades aritméticas y algebraicas. Las primeras son las que expresan solamente el valor absoluto de las cantidades por medio de los números, pero no nos indican el sentido

o valor relativo de estas cantidades.

"Expresión algebraica".- Un grupo de números y letras combinadas entre sí mediante una o más operaciones fundamentales recibe el nombre de, expresión algebraica.

Las expresiones:  $5a$ ,  $2a+1$ ,  $3a^2-2c$ ,  $6x^2+2y+4$ , son ejemplos de expresiones algebraicas.

"Término".- Un número o una letra o varios números y letras combinadas entre sí, mediante las operaciones de multiplicación y de división, o de ambas, recibe el nombre de término.

Puesto que un término no implica ni adición ni sustracción, todo grupo de letras, que en una expresión algebraica esté separado de otros grupos, mediante los signos más o menos, es un término.

Por ejemplo, en la expresión:  $3a^2-2ab+4b$ ;  $5y^3$ ;  $2a-4b^4$ ; son términos.

También la suma de dos o más números encerrada en un paréntesis, se considera como un solo número. Así, en la expresión:

$$a^2 - \frac{(b-c)(b+c)}{b^2 + c^2}$$

en donde,  $b-c$ ;  $b+c$ ; y  $b^2 + c^2$ ; se consideran como tres cantidades individuales. Además como

$$\frac{(b-c)(b+c)}{b^2 + c^2} \cdot$$

comprende únicamente la multiplicación y división, representada, por tanto, a un sólo término de la expresión algebraica.

Los elementos de que consta un término, son cinco: el signo, el coeficiente, la parte literal, el exponente y el grado.

"El signo".- Los términos positivos, son los que van precedidos del signo (+); los términos negativos, son los que van precedidos del signo menos (-). El signo (+), comunmente se elimina, delante de los términos positivos.

"Coeficiente".- Es el número o letra que indica cuántos sumandos iguales se toman.

En el término  $5x$ , el 5 indica que se han tomado 5 sumandos iguales a "x";  $5x = x+x+x+x+x$ . El 5, es el coeficiente.

En el término,  $3a^2b$ , el 3, indican que se han tomado 3 sumandos iguales a,  $a^2b$ ; es decir, que  $3a^2b = a^2b+a^2b+a^2b$ .

"Parte literal".- La parte literal de un término, son las letras que tenga el término. Así, en el término  $4ab$ , la parte literal son las letras  $ab$ . En el término  $\frac{2x^2y}{3ab^2}$ , la parte literal es  $\frac{x^2y}{ab^2}$ .

"Exponente".- El exponente de un término es el número que se coloca en la parte superior derecha de una o más letras del término, para indicar el número de veces que dicha letra se ha tomado como factor.

El área de un cuadrado de lado  $L$  es,  $A = L \times L$ , y se escribe  $A = L^2$ ; el volumen de un cubo de lado "a" es,  $V = axaxa$  y se escribe  $V = a^3$ . En las expresiones anteriores, el 2 y el 3 son los exponentes.

En el término  $a^4$ , el 4 es el exponente, que indica que se han tomado cuatro factores iguales a, "a", así,  $a^4 = axaxaxa$ .

"Grado".- El grado de un término, con respecto a una letra es el exponente de dicha letra.

El grado de un término, con respecto a todas las letras que lo forman, es la suma de los exponentes de todas las letras.

En el término "a", el exponente es 1; "a" es un término de primer grado; en el término " $a^2$ ", el exponente es 2, " $a^2$ " es un término de segundo grado, " $a^3$ " es un término de tercer grado.

El término " $ab^2$ " es de primer grado con respecto a "a" y de segundo grado con respecto a "b". Si se consideran las dos literales, el término " $ab^2$ ", es de tercer grado con respecto a "ab".

El grado de una expresión algebraica puede ser absoluto o con relación a una letra.

El grado absoluto de su término de mayor grado, por ejemplo, en la expresión,  $2a^4+3a^3-a^2-5a+2$ , el primer término es de cuarto grado y a la vez la expresión anterior tiene un grado absoluto de 4.

El grado de un polinomio con relación a una letra, es el mayor exponente de dicha letra, en la expresión. Así, en la expresión,  $x^7+b^3x^4-bx$ , es de séptimo grado, con relación a la letra "x" y de tercer grado con relación a la "b".

"Ordenación de una expresión".- Antes de efectuar ciertas operaciones, como por ejemplo, en la división algebraica, se necesita ordenarlo, es decir, escribir sus términos de manera que los exponentes, de una misma literal, vayan aumentando o disminuyendo.

En el primer caso, resulta que la expresión está ordenada según las potencias ascendentes de una letra y en el segundo caso, está ordenado, según las potencias descendentes de dicha letra.

Así, en la expresión,  $ax^2+bx^4+1-cx^3+dx^6-x^5$ , ordenando según las potencias ascendentes de "x", resulta:  $1+ax^2-cx^3+bx^4-x^5+dx^6$ , y según las potencias descendentes de la misma letra, queda:  $dx^6-x^5+bx^4-cx^3+ax^2+1$ .

El término independiente de una expresión, con relación a una letra, es el término que no tiene dicha letra.

Así, en la expresión,  $2x^2+3x+4$ , el término independiente con relación a la "x" es, 4, y en la expresión  $a^2+5ab+2b^2$  el término independiente, con relación a la "b" es,  $a^2$ .

"Clasificación de las expresiones algebraicas".- Las expresiones algebraicas, se clasifican de acuerdo con el número de términos incluidos en ellos, a saber: monomios, binomios, trinomios y polinomios. La expresión algebraica, que tiene un sólo término, se llama monomio; si consta de dos o más términos se llama, polinomio.

Si un polinomio consta de dos términos, es binomio y si consta de tres términos, trinomio.

Así, en la expresión,  $2a+4ab-5b^2/3c$ , es un ejemplo de un trinomio, y en la expresión,  $a+b$ , es un ejemplo de un binomio, pues tiene dos términos.

"Términos semejantes".- Términos semejantes son aquellos que sólo difieren por sus coeficientes numéricos, o sea, son los que tienen las mismas literales con los mismos exponentes, sin tomar en cuenta los coeficientes.

Por ejemplo,  $5ab^2-7ab^2$ ;  $14ab^2$ : son términos semejantes.

#### AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

Expresar los siguientes problemas, como cantidades positivas o negativas.

- 1.- Juan tenía \$40 y recibió \$280. Encuentra su situación económica.

- 2.- A las 7 a.m. el termómetro indica  $+8^\circ\text{C}$ . A las 7 p.m. la temperatura ha descendido,  $11^\circ\text{C}$ . Expresa la temperatura a las 7 p.m.

- 3.- Expresa que un poste está enterrado 2m. en el suelo y sobresale 8m.

- 4.- Expresa que una montaña tiene una altura de 3780 m. sobre el nivel del mar.

- 5.- Dos corredores parten de un punto en dirección contraria. El que corre hacia al norte del punto, va a 6m/seg., y el otro va a 8m/seg. Expresa sus distancias del punto, después de 9 seg.

- 6.- Expresa que en Egipto, se encontró un papiro que se escribió en 1850 antes de J.C., y que indica que desde entonces ya se cultivaba la ciencia del álgebra.

- 7.- Expresa qué número, se encuentra 7 unidades a la derecha del cero y otro 3 unidades a la izquierda.

- 8.- Un autobús recorre 32 Km a la izquierda de su punto de partida y luego retrocede 17 Km. ¿A qué distancia se encuentra del punto de partida?

- 9.- Expresa que el punto de ebullición del alcohol etílico es de  $78.4^\circ\text{C}$  y que su punto de fusión es de  $112^\circ\text{C}$  bajo cero.

Encuentra el grado absoluto de los siguientes términos.

- 10.-  $5x^3y^4$

- 11.-  $4abcx^2$

Encuentra el grado del siguiente término, con respecto a la literal indicada:  $10m^2n^3b^4c^5$

- 12.- Respecto a, "n"

13.- Respecto a, c

Encuentra el grado absoluto de los siguientes polinomios.

14.-  $a^5 - 6a^4b^3 - 4a^2b + a^2b^4 - 3b^6$

15.-  $y^5 - by^4 + b^2y^3 - b^3y^2 + b^4y$

Encuentra el grado del siguiente polinomio, respecto a la literal indicada;  $x^{10} - x^8y^2 + 3x^4y^6 - x^6y^4 + x^2y^8$

16.- Respecto a, x

17.- Respecto a, y

18.- Ordenar el siguiente polinomio con respecto a las potencias descendentes de, x;  $4a^3x^2 - 5ax^6 + 9a^2x^7 - 4a^4x^3 + 5x + 7$

19.- Ordenar el polinomio anterior con respecto a las potencias ascendentes de, a.

## RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION DE LA LECCION 1.

1.- + \$320.

2.- -3

3.- -2 m, + 8 m.

4.- + 3780 m.

5.- + 54 m; -72 m

6.- -1850

7.- +7; -3

8.- -15 Km.

9.- + 78.4°C; -112°C

10.- Séptimo grado.

11.- Quinto grado.

12.- Tercer grado.

13.- Quinto grado.

14.- Séptimo grado.

15.- Sexto grado.

16.- Décimo grado.

17.- Octavo grado.

18.-  $9a^2x^7 - 5ax^6 - 4a^4x^3 + 4a^3x^2 + 5x + 7$

19.-  $7 + 5x - 5ax^6 + 9a^2x^7 + 4a^3x^2 - 4a^4x^3$