9.- $(-9) \div (-3)$

0) 3 1) -3 2) 6
3) -6 4) -12

10.- $\dfrac{36a^4b^2c^3}{6a^2b^2c^2}$

0) $3ac$ 1) $6a^2c^3$ 2) $3ac^3$
3) $6a^2c$ 4) $6a^3c^2$

11.- $(6a^4b^5 - 12a^5b^4) \div (6a^4b^4)$

0) $b-2$ 1) -2 2) $-2ab$
3) $ab^2 - 2a^2b$ 4) $b-2a$

12.- $(4x^3 - 10x^2 + 2x + 4) \div (2x^2 - 3x - 2)$

0) $x-1$ 1) $2x-1$ 2) $2x-3$
3) $2x-2$ 4) $2x+1$

MULTIPLICACION Y DIVISION CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 3.

1-3 MULTIPLICACION ALGEBRAICA.

Definición. La multiplicación es la operación que tiene por objeto, repetir un número como sumando, tantas veces como unidades tiene el otro. Así, $5x4 = 5+5+5+5 = 20$.

El número que se repite se llama multiplicando y el número que indica las veces que el multiplicando es repetido, se llama multiplicador.

El resultado se llama producto y al multiplicando y al multiplicador se llaman también, factores del producto.

El signo de la multiplicación es una cruz (x) o un punto, que se lee multiplicando por, o simplemente por, y que se coloca entre el multiplicando y el multiplicador.

"Leyes de los signos para la multiplicación".

En la multiplicación de números reales se presentan dos casos:

Primer caso, cuando los factores son del mismo signo.

"El producto de dos factores del mismo signo, es positivo". Por ejemplo.

$$(5)\ (3) = 15$$
$$(-5)\ (-3) = 15$$

Segundo caso, cuando los factores son de signo diferente.

"El producto de dos factores de signo diferente, es negativo". Por ejemplo.

$$(-5)(3) = 15$$
$$(5)(-3) = -15$$

Para encontrar el producto de $(-8)(-6)(-5)$; se multiplican los primeros dos factores y el resultado se multiplica por el tercero así:

$$(-8)(-6)(-5) = (+48)(-5) = -240$$

Para encontrar el producto de, $(-2)(-3)(-4)(-5)$; se multiplican los primeros dos factores y los últimos dos factores, los resultados se multiplican entre sí, para obtener el producto, así

$$(-2)(-3)(-4)(-5) = (+6)(+20) = 120$$

De estos ejemplos se deduce lo siguiente:

"El producto de cualquier número de factores positivos, es positivo".

"El producto, de un número par de factores negativos, es positivo".

"El producto, de un número impar de factores negativos, es negativo".

"Ley de los exponentes en la multiplicación".-

Hay productos en que el mismo factor ocurre dos, tres o más veces. Un producto de ese tipo puede expresarse escribiendo el factor un número apropiado de veces, pero es más conveniente usar una notación abreviada, así

$axa = a^2$ (Léase "a cuadrada")

$axaxa = a^3$ (Léase "a cúbica")

$axaxaxa = a^4$ (Léase "a cuarta")

Estas son ilustraciones de la siguiente definición:

"Si "a " es un número y n es un entero positivo, entonces, a^n denota el producto de n factores, cada uno de los cuales es a . Esto es

$$a^n = axaxaxaxa\ldots xa \quad (n \text{ factores})$$

La cantidad a^n es llamada n-ésima potencia de a y se lee "a a la enésima". El número a es la base y n el exponente. La primera potencia de un número se expresa usualmente sin exponente. Así, por definición, $a^1 = a$

Como consecuencia de la definición anterior, se tiene la siguiente ley, aplicable a los productos que comprenden potencias de los números:

"Si a es un número real y m y n son enteros positivos, entonces,

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Demostración. La cantidad a^m significa el producto de m factores, cada uno de los cuales es a, y a^n significa a tomado como factor n veces. En total, a ocurre como factor m+n veces, lo cual exhibimos, escribiendo

$$a^m.a^n. = \overbrace{(a.a.a.a\ldots a)}^{m \text{ factores}} \; \overbrace{(a.a.a.a.a\ldots a)}^{n \text{ factores}} = a^{m+n}$$

"Multiplicación de Monomios".

Regla.- Para multiplicar dos monomios se multiplican los coeficientes y a continuación de este producto, se escriben las letras de los factores, en orden alfabético, poniéndole a cada letra un exponente igual a la suma de los exponentes que tenga en los factores. El signo del producto, vendrá dado por la ley de los signos.

EJEMPLO:

Multiplicar:

a) $x^3.x^2 = x^{3+2} = x^5$ (Ley de los exponentes)

b) $a^4.a^3.a^2 = a^{4+3+2} = a^9$ (Ley de los exponentes)

c) $(-2a^3b^2)(3ab^4) = -2\cdot 3\cdot a^3\cdot a\cdot b^2\cdot b^4$ (Ley conmutativa)

$= (-2x3)(a^3.a)(b^2\cdot b^4)$ (Ley asociativa)

$= -6a^4b^6$ (Ley de los exponentes)

"Multiplicación de un monomio por un polinomio".

Regla.- Para multiplicar un monomio por un polinomio se multiplica el monomio por cada uno de los términos del polinomio, teniendo en cuenta en cada caso, la ley de los signos, y se hace la suma algebraica de los productos parciales.

EJEMPLO:

Multiplicar $(2y^3)(x^2-3xy-2y^2)$

Solución: Usando la ley distributiva para la multiplicación y la ley de los exponentes, obtenemos

$$2y^3(x^2-3xy-2y^2) = 2y^3(x^2)+2y^3(-3xy)+2y^3(-2y^2)$$

$$= 2x^2y^3-6xy^4-4y^5$$

El paso intermedio se escribe para enfatizar el proceso. El procedimiento usual es escribir tan solo el resultado final.

"Multiplicación de polinomios por polinomios".

Regla.- Se multiplican todos los términos del multiplicando por cada uno de los términos del multiplicador, teniendo en cuenta la ley de los signos y la ley de los exponentes, y se combinan los términos semejantes.

Para facilitar la combinación de términos semejantes en la multiplicación de polinomios, se ordena cada uno de ellos según las potencias ascendentes o descendentes de una misma literal y se escriben uno debajo de otro. Se multiplican luego, todos los términos del multiplicando por cada término del multiplicador, empezando por la izquierda; se escriben después los productos parciales de modo que sus términos semejantes, si los hay, se correspondan en columna y se hace la reducción.

EJEMPLO:

Multiplicar $(a^2-2ab+b^2)(a-b)$

Solución:

	$a^2 - 2ab + b^2$
	$a - b$
multiplicación por a:	$a^3 - 2a^2b + ab^2$
multiplicación por -b:	$- a^2b + 2ab^2 - b^3$
producto:	$a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

EJEMPLO:

Multiplicar: $(2x^2+xy-3y^2)(x^2-3xy+y^2)$

Solución:

	$2x^2 + xy - 3y^2$
	$x^2 - 3xy + y^2$
multiplicación por x:	$2x^4 + x^3y - 3x^2y^2$
multiplicación por -3xy:	$-6x^3y - 3x^2y^2 + 9xy^3$
multiplicación por y:	$+ 2x^2y^2 + xy^3 - 3y^4$
	$2x^4 - 5x^3y - 4x^2y^2 + 10xy^3 - 3y^4$

AUTOEVALUACION 1.

Multiplique como se indica y combina términos semejantes.

1.- $(4)\ (-2)$	16.- $-2x^2(3x-3y+2)$
2.- $(-5)(-4)$	17.- $(x-3)\ (x+5)$
3.- $(2)\ (-1)(-4)$	18.- $(1-2a)(4+3a)$
4.- $(-3)(-1)(-2)$	19.- $(a+2b)(a-2b)$
5.- $(5ab)(2ab)$	20.- $(2c-3d)(c+d)$
6.- $(-6x^2y)(3xy^2)$	21.- $(x-y)(x+4y)$
7.- $(-2x^2)(-3x)$	22.- $(x^2-8x+16)(x-4)$
8.- $(ab)(-2b)(3a)$	23.- $(a-7ac+8c)(3a-2c)$
9.- $(-ab)(2b)(-5a)$	24.- $(4a^2+2ab+b^2)(2a-b)$
10.- $(3a^2b^2)(2ab)(a^2b)$	25.- $(x^2-xy+y^2)(x+y)$
11.- $ab\ (a^3-b^3)$	26.- $(a+b-a)(a+b+1)$
12.- $-7x^2\ (4x-3)$	27.- $(2x-y+4)(2x+y+4)$
13.- $2a^2b\ (3ab^2+a)$	28.- $(a+2)(a+1)(a+3)$
14.- $-8x^2y\ (-2x+3y+1)$	29.- $(x-1)(x-2)(x-3)$
15.- $6a(3a-2b-c)$	30.- $(1-b)(2+b)(3-b)$

1-4 DIVISION ALGEBRAICA.

"Definición".

La división es la operación que tiene por objeto, repartir un número, en tantas partes iguales, como unidades tiene el otro, o hallar las veces que un número contiene a otro. Cualquiera de estos dos aspectos de la división, viene a ser una operación inversa a la multiplicación, así como la resta lo es de la suma; de modo que la división, puede siempre definirse como una operación que tiene por objeto hallar uno de dos factores, cuando se conoce su producto y el otro factor. Así, $24 \div 6 = 4$, porque $4 \times 6 = 24$.

El producto dado, se llama dividendo, el factor conocido se llama divisor y el factor que se busca se denomina cociente.

El signo de la división se representa de las siguientes formas:

$$a \div b, \quad a:b \quad , \quad a/b$$

Si el cero es considerado como la ausencia total de cantidad, entonces es evidente que

$$n+0 = n; \quad m \times 0 = 0 \ ; \quad 0/n = 0$$

Sin embargo, cualquier intento, para establecer un proceso en el que se emplee el cero como divisor, conduce a una situación absurda.

Por ejemplo, si se interpreta el cociente, $a \div b$, como el número de veces que debe sumarse b, para obtener a, entonces, $a \div 0$; es el número de veces, que debe sumarse cero para obtener a. Evidentemente, ello carece de sentido. Por lo tanto, si el divisor es cero, la operación de división no queda definida y por ello, se excluye la división entre cero.

"Leyes de los signos para la división"

Las leyes de los signos en la división, son las mismas que en la multiplicación.

"El cociente, de dos números del mismo signo, es positivo".

"El cociente, de dos números de signos diferentes, es negativo".

Las leyes de los signos, se pueden representar también en la siguiente forma:

+ entre + dá, +
- entre - dá, +
+ entre - dá, -
- entre + dá, -

"Leyes de los exponentes para la división algebraica".

"Si m y n son enteros positivos y $a \neq 0$, entonces

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \quad \text{si} \quad m > n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = 1 \quad \text{si} \quad m = n$$

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{1}{a^{n-m}} \quad \text{si} \quad n > m$$

Demostración.- Si $m > n$, tenemos por la ley de los exponentes para la multiplicación

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^n \cdot a^{m-n}}{a^n} = \frac{a^n}{a^n}(a^{m-n}) = a^{m-n}$$

Si m=n, tenemos por la definición de división

$$\frac{a^m}{a^n} = \frac{a^m}{a^m} = 1$$

Dejamos la demostración de la última parte de la ley al estudiante.

"División de dos monomios"

Regla.- Para dividir dos monomios, se divide el coeficiente del dividendo entre el coeficiente del divisor y a continuación se escriben en orden alfabético las letras, poniéndole a cada letra, un exponente igual, a la diferencia entre el exponente que tiene el dividendo y el exponente que tiene el divisor. El signo, lo dá la ley de los signos para la división.

EJEMPLO:

Dividir:

a) $36a^3 \div (-18a) = \frac{36a^3}{-18a} = -2a^2$

b) $(-12a^5) \div (-36a^5) = \frac{-12a^5}{-36a^5} = \frac{1}{3}$

c) $7a^3b^2c^3 \div 21ab^3c^3 = \frac{7a^3b^2c^3}{21ab^3c^3} = \frac{a^2}{3b}$

De este ejemplo se deduce que:

1.- El coeficiente del cociente de dos monomios, es cociente de los valores absolutos, de los coeficientes del dividendo y del divisor.

2.- Cada literal, de las que forman el dividendo, interviene en el cociente, con un exponente calculado, de acuerdo con la ley anterior mencionada, a menos que una misma literal tenga igual exponente, en el dividendo y en el divisor; en este caso, no se escribe, por ser su cociente, igual a 1.

"División de un polinomio entre un monomio".

Regla.- Para dividir un polinomio entre un monomio, se divide cada uno de los términos del polinomio entre el monomio, separando los cocientes parciales con sus propios signos.-

EJEMPLO:

Dividir $3x^2y-6xy^2+12x \div 3x$

$$\text{Solución: } \frac{3x^2y-6xy^2+12x}{3x} = \frac{3x^2y}{3x} - \frac{6xy^2}{3x} + \frac{12x}{3x}$$

$$= xy-2y^2+4$$

"División de dos polinomios".

Para dividir un polinomio entre otro polinomio, se efectúan los siguientes pasos:

1.- Tanto el dividendo como el divisor, se disponen en orden ascendente o descendente, de las potencias de alguna letra que aparezca en ambos.

2.- Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor y se obtiene así, el primer término del cociente.

3.- Se multiplica el divisor por el primer término del cociente y el producto obtenido, se sustrae del dividendo.

4.- El residuo obtenido, en el paso anterior, se trata como a un nuevo dividendo y se repiten con él, los pasos 2 y 3.

5.- Se continúa este proceso, hasta obtener un residuo, en el cual, el mayor exponente de la letra que se escogió, en el paso 1, sea menor, que el mayor exponente de dicha letra en el divisor.

Si el residuo es cero, la división es exacta y el resultado puede expresarse como

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente}$$

Si el residuo no es cero, expresamos el resultado como

$$\frac{\text{dividendo}}{\text{divisor}} = \text{cociente} + \frac{\text{residuo}}{\text{divisor}}$$

EJEMPLO:

Dividir; $4x^4-16x^3+36x^2-40x+25 \div 2x^2-4x+5$

$$\begin{array}{rrl}
 & 2x^2 - 4x + 5 \quad \text{(cociente)} & \\
2x^2-4x+5 & \overline{)\,4x^4 - 16x^3 + 36x^2 - 40x + 25} & \text{(Dividendo)} \\
\text{(divisor)} & -4x^4 + 8x^3 - 10x^2 \qquad\qquad\quad & \\
 & \overline{-\ 8x^3 + 26x^2 - 40x + 25} & \text{(Primer residuo)} \\
 & +\ 8x^3 - 16x^2 + 20x \qquad\ & \\
 & \overline{10x^2 - 20x + 25} & \text{(Segundo residuo)} \\
 & -\ 10x^2 + 20x - 25 & \\
 & \overline{0} & \text{(Residuo)}
\end{array}$$

Solución:

Primer término del cociente.- Para obtener el primer término del cociente se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor.

$$4x^4 \div 2x^2 = 2x^2$$

Primer producto parcial.- Para obtener el primer producto parcial, se multiplica el divisor por el primer término del cociente

$$(2x^2-4x+5)(2x^2) = 4x^4-8x^3+10x^2$$

y se resta del dividendo, para obtener el primer residuo.

Segundo término del cociente.- Se obtiene, dividiendo el primer término del primer residuo, entre el primer término del divisor

$$-8x^3 \div 2x^2 = -4x$$

Segundo producto parcial.- Se obtiene multiplicando el divisor por el segundo término del cociente

$$(2x^2-4x+5)(-4x) = -8x^3+16x^2-20x$$

y se resta del primer residuo, para obtener el segundo residuo.

Tercer término del cociente.- Se obtiene dividiendo el primer término del segundo residuo entre el primer término del divisor.

$$10x^2 \div 2x^2 = 5$$

Tercer producto parcial.- Se obtiene multiplicando el divisor por el tercer término del cociente

$$(2x^2-4x+5)(5) = 10x^2-20x+25$$

y se resta del segundo residuos, para obtener un residuo final de cero.

Prueba de la división.- Puede verificarse cuando la división es exacta, multiplicando el divisor por el cociente, debiendo dar el dividendo, si la operación está correcta.

AUTOEVALUACIÓN 2.

Realice las divisiones indicadas.

1.- $2a^4 \div a^2$

2.- $(-36a^2b^3) \div (-6a^2b)$

3.- $(8xy) \div (-4xy)$

4.- $2a^2b^3c^4 \div a^3b^2c^3$

5.- $(-9x^3y^4) \div (-3x^2y^5)$

6.- $(16a^3b^2) \div (-4a^3b)$

7.- $(14a^2-21a^3) \div (7a^2)$

8.- $(15x^2y^3-9xy) \div (3xy)$

9.- $(9x^2-6x+3) \div (-3)$

10.- $(c^2d-cd^2-cd) \div (cd)$

11.- $(c^2d+2c^2d^4-c^2d^2) \div (c^2d^2)$

12.- $(9a^2b^3-10a^4b^4) \div (5a^2b^3)$

13.- $(a^2-7a+6) \div (a-1)$

14.- $(x^2+4x-12) \div (x+6)$

15.- $(x^2-5x-14) \div (x+2)$

16.- $(a^2-6ab+8b^2) \div (a-4b)$

17.- $(x^3-6x^2+12x-8) \div (x^2-4x+4)$

18.- $(a^4-b^4) \div (a^2-b^2)$

19.- $(9x^2-16y^2) \div (3x-4y)$

20.- $(2x^2+5xy-3y^2) \div (2x-y)$

21.- $(3x^2-8xy+4y^2) \div (x-2y)$

22.- $(4a^2+5ab-6b^2) \div (a+2b)$

23.- $(8x^3+12x^2y+6xy^2+y^3) \div (4x^2+4xy+y^2)$

24.- $(x^3+10x^2+12x+27) \div (x^2+x+3)$

25.- $(2x^4-5x^3+11x-2x^2-6) \div (x^2-3x+2)$

26.- $(a^3-27) \div (a^2+3a+9)$

27.- $(8a^3-1) \div (2a-1)$

28.- $(x^4+x^2y^2+y^4) \div (x^2-xy+y^2)$

29.- $(2a^4-3a^3+3a^2+a-1) \div (2a-1)$

30.- $(2x^5-5x^4+6x^3+4x^2-11x+4) \div (2x^2-3x+1)$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCION 3.

AUTOEVALUACION 1.

1.- -8

2.- 20

3.- 8

4.- -6

5.- $10a^2b^2$

6.- $-18x^3y^3$

7.- $6x^3$

8.- $-6a^2b^2$

9.- $10a^2b^2$

10.- $6a^5b^4$

11.- $a^4b - ab^4$

12.- $-28x^3 + 21x^2$

13.- $6a^3b^3 + 2a^3b$

14.- $16x^3y - 24x^2y^2 - 8x^2y$

15.- $18a^2 - 12ab - 6ac$

16.- $-6x^3 + 6x^2y - 4x^2$

17.- $x^2 + 2x - 15$

18.- $-6a^2 - 5a + 4$

19.- $a^2 - 4b^2$

20.- $2c^2 - cd - 3d^2$

21.- $x^2 + 3xy - 4y^2$

22.- $x^3 - 12x^2 + 48x - 64$

23.- $3a^3 - 23a^2c + 38ac^2 - 16c^3$

24.- $8a^3 - b^3$

25.- $x^3 + y^3$

26.- $a^2 + 2ab + b^2 - 1$

27.- $4x^2 + 16x - y^2 + 16$

28.- $a^3 + 6a^2 + 11a + 6$

29.- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

30.- $b^3 - 2b^2 - 5b + 6$

AUTOEVALUACION 2.

1.- $2a^2$

2.- $6b^2$

3.- -2

4.- $2bc/a$

5.- $3x/y$

6.- $-4b$

7.- $2 - 3a$

8.- $5xy^2 - 3$

9.- $-3x^2 + 2x - 1$

10.- $c - d - 1$

11.- $1/d + 2d^2 - 1$

12.- $9/5 - 2a^2b$

13.- a $a-6$

14.- $x - 2$

15.- $x - 7$

16.- $a - 2b$

17.- $x - 2$

18.- $a^2 + b^2$

19.- $3x + 4y$

20.- $x + 3y$

21.- $3x - 2y$

22.- $4a - 3b$

23.- $2x + y$

24.- $x + 9$

25.- $2x^2 + x - 3$

26.- $a - 3$

27.- $4a^2 + 2a + 1$

28.- $x^2 + xy + y^2$

29.- $a^3 - a^2 + a + 1$

30.- $x^3 - x^2 + x + 4$