

- 37.-  $(4a + 3b)^2$       58.-  $(x + y + \sqrt{x^2 + y^2})^2$
- 38.-  $(6f + 5g)^2$       59.-  $(a + b + \sqrt{a^2 + b^2})^2$
- 39.-  $(2x + 7y)^2$       60.-  $(a + b + 2c)^2$
- 40.-  $(5x + 2y)^2$       61.-  $(u + 2v + 3w)^2$
- 41.-  $(7h + 8k)^2$       62.-  $(3p + 2q + 3r)^2$
- 42.-  $(9u + 7v)^2$       63.-  $(3f + 4g + 3h)^2$
- 43.-  $(6w + 11z)^2$       64.-  $(5x + 2y + 3z)^2$
- 44.-  $(8p + 9q)^2$       65.-  $[(x+(y+z)) (2x+(y+z))]$
- 45.-  $(x + 3)(x + 3)$       66.-  $[(2(a+b)-c) (3(a+b)-c)]$
- 46.-  $(a + 5)(a + 5)$       67.-  $[(3u+3(v-w)) (3u+2(v-w))]$
- 47.-  $(b + 7)(b + 7)$       68.-  $[(2(a+b)-3g) (3(a+b)+4g)]$
- 48.-  $(c + 5)(c + 5)$       69.-  $[(4x-3)(x-t) (5x+1)(t-x)]$
- 49.-  $(4a + 5)(4a + 5)$       70.-  $[(3(b+c)+4d) (3(b+c)-2d)]$
- 50.-  $(3x + 7)(3x + 7)$       71.-  $[(3(x-2y)+2z) (3(x-2y)-5z)]$
- 51.-  $(6e + 8)(6e + 8)$       72.-  $[(a+3c)-3] [(a+3c)+3]$
- 52.-  $(2f + 9)(2f + 9)$       73.-  $(x-2)^3$
- 53.-  $(6g + 7q)(6g + 7q)$       74.-  $(5-x)^3$
- 54.-  $(2c + 2g)(2c + 2g)$       75.-  $(x-1)^3$
- 55.-  $(8x + 9y)(8x + 9y)$       76.-  $(2a + 3b)^3$
- 56.-  $(10h + 7k)(10h + 7k)$       77.-  $(a - 4)^3$
- 57.-  $(a + b + c)^2$       78.-  $(a + 3)^3$

## PRODUCTOS ESPECIALES.

### LECCIÓN 4.

#### 1-5 PRODUCTOS ESPECIALES.

Se llaman productos especiales a ciertos productos que cumplen reglas fijas y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección, es decir, sin verificar la multiplicación. De este modo se puede, para muchos tipos de productos, abreviar, el proceso de multiplicación.

#### 1-6 EL PRODUCTO DE DOS BINOMIOS CON TÉRMINOS CORRESPONDIENTES SEMEJANTES.

Los términos correspondientes de los binomios "ax+by" y "cx+dy" son semejantes.

$$\begin{array}{ccc}
 & \text{términos semejantes} & \\
 & \downarrow & \downarrow \\
 (ax + by) & & (cx + dy) \\
 & \uparrow & \uparrow \\
 & \text{términos semejantes} &
 \end{array}$$

Obtendremos el producto de estos dos binomios por el procedimiento indicado a continuación donde se hace uso del axioma distributivo.

$$(ax+by)(cx+dy) = ax(cx+dy) + by(cx+dy)$$

$$(ax+by)(cx+dy) = acx^2 + adxy + bcxy + bdy^2$$

$$(ax+by)(cx+dy) = acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2$$

tenemos, pues,

$$(ax+by)(cx+dy) = acx^2 + (ad+bc)xy + bdy^2$$

Analizando el producto de la derecha, vemos que el producto de dos binomios con términos correspondientes semejantes se realiza siguiendo estos pasos:

- 1) Multiplicar los primeros términos de los binomios para obtener el primer término del producto.

$$\begin{array}{cc} \downarrow & \downarrow \\ (ax + by) & (cx + dy) \\ \downarrow & \downarrow \\ & acx^2 \end{array}$$

- 2) Sumar los productos obtenidos al multiplicar el primer término de cada binomio por el segundo del otro. Esto nos lleva al segundo término del producto.

$$\begin{array}{cc} (ax + by) & (cx + dy) \\ \uparrow & \uparrow \\ & bcxy \\ \uparrow & \uparrow \\ & adxy \\ \hline & (ad + bc)xy \end{array}$$

- 3) Multiplica los segundos términos de los binomios para obtener el tercer término del producto.

$$\begin{array}{cc} & \downarrow & \downarrow \\ (ax + by) & (cx + dy) \\ & \downarrow & \downarrow \\ & bdy^2 & \end{array}$$

De ordinario, estos tres pasos se hacen mentalmente y el resultado se escribe sin paso intermedio.

#### EJEMPLO 1.

Obtener el siguiente producto:  $(2a+3b)(3a-5b)$ .

Solución:

Escribimos el producto como se indica abajo, tras el problema, y se refieren los resultados a las posiciones indicadas por las flechas.

$$(2a + 3b)(3a - 5b) = 6a^2 - ab - 15b^2$$

- 1)  $(2a)(3a) =$  \_\_\_\_\_
- 2)  $[(2a)(-5b)] + [(3b)(3a)] = -10ab + 9ab =$  \_\_\_\_\_
- 3)  $(3b)(-5b) =$  \_\_\_\_\_

#### EJEMPLO 2.

Obtener el siguiente producto:  $(2x-3)(x+4)$

Solución:

$$(2x - 3)(x + 4) = 2x^2 + 5x - 12$$

- 1)  $(2x)(x) =$  \_\_\_\_\_
- 2)  $[(2x)(4)] + [(-3)(x)] = 8x - 3x =$  \_\_\_\_\_
- 3)  $(-3)(4) =$  \_\_\_\_\_

#### AUTOEVALUACION 1.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando la fórmula 1.

- |                        |                         |
|------------------------|-------------------------|
| 1.- $(x + 2y)(x + 3y)$ | 6.- $(3a - 4)(2a - 1)$  |
| 2.- $(a + 4b)(a - 7b)$ | 7.- $(2x + y)(2x - 5y)$ |

$$3.- (2r + 5)(3r - 4)$$

$$4.- (x - 8)((x + 3)$$

$$5.- (x + 7)(x - 1)$$

$$8.- (2u-5v)(u+3v)$$

$$9.- (5a+1)(2a+1)$$

$$10.- (2x-3y)(4x-5y)$$

"El cuadrado de la suma o diferencia de un binomio".

El cuadrado de la suma del binomio  $x+y$  se expresa:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y),$$

usamos la fórmula 1 y obtenemos:

$$(x+y)^2 = (x+y)(x+y)$$

$$= x^2 + (xy + xy) + y^2$$

$$= x^2 + 2xy + y^2$$

En consecuencia,

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (2)$$

Análogamente,

$$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (3)$$

Así diremos que "el cuadrado de la suma o diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primero, más o menos dos veces el producto del primero por el segundo, más el cuadrado del segundo."

EJEMPLO 3.

Obtener el cuadrado de  $2a + 5b$ .

Solución:

Utilizando la fórmula 2, tenemos que:

$$(2a + 5b)^2 = (2a)^2 + 2(2a)(5b) + (5b)^2$$

$$(2a + 5b)^2 = 4a^2 + 20ab + 25b^2$$

EJEMPLO 4.

Obtener el cuadrado de  $3x-4y$ .

Solución:

Utilizando la fórmula 3, tenemos que:

$$(3x - 4y)^2 = (3x)^2 - 2(3x)(4y) + (4y)^2$$

$$(3x - 4y)^2 = 9x^2 - 24xy + 16y^2$$

AUTOEVALUACIÓN 2.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando las fórmulas 2 y 3.

$$1.- (a + 2b)^2$$

$$2.- (x - 3y)^2$$

$$3.- (a + 4b)^2$$

$$4.- (x - 5y)^2$$

$$5.- (x + 6)^2$$

$$6.- (2a - 3b)^2$$

$$7.- (3x + 2y)^2$$

$$8.- (4x - 5)^2$$

$$9.- (3a + 4b)^2$$

$$10.- (5x - 3y)^2$$

"El producto de la suma y diferencia de dos números".

El producto de la suma y diferencia de dos números "x" e "y" se expresa como  $(x+y)(x-y)$ . Si aplicamos la fórmula 1 a este producto, obtenemos:

$$\begin{aligned}(x+y)(x-y) &= x^2 + (-xy+xy) - y^2 \\ &= x^2 - y^2\end{aligned}$$

es decir,

$$(x+y)(x-y) = x^2 - y^2 \quad (4)$$

Podemos, pues, enunciar el "producto de la suma y diferencia de dos números es igual a la diferencia de sus cuadrados."

EJEMPLO 5.

Obtener el siguiente producto:  $(a+5)(a-5)$

Solución:

Utilizando la fórmula 4, nos queda:

$$\begin{aligned}(a+5)(a-5) &= (a)^2 - (5)^2 \\ &= a^2 - 25\end{aligned}$$

EJEMPLO 6.

Obtener el siguiente producto:  $(3x+5y)(3x-5y)$

Solución:

Utilizando la fórmula 4, tenemos:

$$\begin{aligned}(3x+5y)(3x-5y) &= (3x)^2 - (5y)^2 \\ &= 9x^2 - 25y^2\end{aligned}$$

AUTOEVALUACIÓN 3.

Hallar los productos de los siguientes problemas utilizando la fórmula 4.

- |                      |                         |
|----------------------|-------------------------|
| 1.- $(x+2)(x-2)$     | 6.- $(3x+y)(3x-y)$      |
| 2.- $(2x+1)(2x-1)$   | 7.- $(4a+3b)(4a-3b)$    |
| 3.- $(3x+2)(3x-2)$   | 8.- $(2x+7y)(2x-7y)$    |
| 4.- $(a+3b)(a-3b)$   | 9.- $(3a+7b)(3a-7b)$    |
| 5.- $(2x+5y)(2x-5y)$ | 10.- $(-2x+3y)(-2x-3y)$ |

"Productos de trinomios".

El cuadrado de un trinomio se puede obtener agrupando convenientemente los términos y aplicando luego la fórmula 2 o la fórmula 3. Con dos ejemplos aclararemos el procedimiento.

EJEMPLO 7.

Obtener el cuadrado de  $a + b + c$ .

Solución:

Consideremos  $b+c$  como un solo número, para ello metámoslo entre paréntesis:  $a + (b+c)$ . Luego  $[a + (b+c)]^2$  es el cuadrado de la suma de dos números y lo podemos obtener aplicando la fórmula 2, como se indica a continuación:

$$\begin{aligned}(a+b+c)^2 &= [a + (b+c)]^2 \\ &= (a)^2 + 2(a)(b+c) + (b+c)^2 \\ &= a^2 + 2a(b+c) + (b+c)^2 \\ &= a^2 + 2ab + 2ac + (b)^2 + 2(b)(c) + (c)^2\end{aligned}$$

$$= a^2 + 2ab + 2ac + b^2 + 2bc + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

#### EJEMPLO 8.

Obtener el cuadrado de  $2x - 3y - 5z$ .

Solución:

En este problema meteremos los dos primeros términos entre paréntesis, aplicando la fórmula 3, obtendremos:

$$(2x - 3y - 5z)^2 = [(2x-3y) - 5z]^2$$

$$= (2x-3y)^2 - 2(2x-3y)(5z) + (5z)^2$$

$$= (2x-3y)^2 - 10z(2x-3y) + (5z)^2$$

$$= (2x-3y)^2 - 20xz + 30yz + 25z^2$$

$$= (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 - 20xz + 30yz + 25z^2$$

$$= 4x^2 - 12xy + 9y^2 - 20xz + 30yz + 25z^2$$

Algunas veces se pueden agrupar los términos de dos trinomios de modo que uno de ellos sea la suma de dos números y el otro la diferencia de los mismos. Luego utilizaremos las fórmulas 2 y 4 o la fórmula 3 para obtener el producto. Los siguientes ejemplos aclararán tales casos.

#### EJEMPLO 9.

Obtener el producto de  $(3a+2b+5c)(3a+2b-5c)$ .

Solución:

Si encerramos entre paréntesis los dos primeros términos de cada trinomio, obtenemos  $[(3a+2b) + 5c][(3a+2b) - 5c]$ , es decir, la suma y diferencia de dos números. Por tanto podemos obtener el producto utilizando primero la fórmula 4 y luego completar el problema utilizando la fórmula 2. Así

obtendremos:

$$[(3a+2b) + 5c][(3a+2b) - 5c] = (3a+2b)^2 - (5c)^2$$

$$= 9a^2 + 12ab + 4b^2 - 25c^2$$

#### EJEMPLO 10.

Hallar el producto de  $(3x+4y+z)(3x-4y-z)$ .

Solución:

Advirtamos primero que si agrupamos los dos primeros términos de cada trinomio, no se obtiene el producto de la suma y diferencia de dos números. Pero si agrupamos los términos del siguiente modo  $[3x + (4y+z)][3x - (4y+z)]$ , vemos que las expresiones en ambos corchetes son respectivamente la suma y diferencia de dos números. Nótese que los paréntesis en el segundo trinomio van precedidos por un signo menos, y que hemos de cambiar el signo de los términos encerrados. Procederemos como sigue:

$$(3x+4y+z)(3x-4y-z) = [3x + (4y+z)][3x - (4y+z)]$$

$$= (3x)^2 - (4y+z)^2$$

$$= 9x^2 - (16y^2 + 8yz + z^2)$$

$$= 9x^2 - 16y^2 - 8yz - z^2$$

#### AUTOEVALUACIÓN 4.

Hallar el producto de los siguientes problemas por inspección:

- |                   |                            |
|-------------------|----------------------------|
| 1.- $(x+2y+z)^2$  | 6.- $(a+2b+c)(a+2b-c)$     |
| 2.- $(2x-y-3z)^2$ | 7.- $(2x+3y+2z)(2x-3y-2z)$ |
| 3.- $(3a+2b+c)^2$ | 8.- $(3a+2b+c)(3a-2b-c)$   |

$$4.- (x-2y+3z)^2$$

$$9.- (3a-2b+c)(3a-2b-c)$$

$$5.- (2x+3y-2z)^2$$

$$10.- (a+2b-c)(a-2b+c)$$

### 1-7 EL CUADRADO DE UN POLINOMIO.

Podemos utilizar la fórmula 2 y el resultado obtenido en el ejemplo 7 de la sección anterior, para obtener el cuadrado de un polinomio que conste de cuatro términos. Procederemos como se indica a continuación.

#### EJEMPLO 11.

Hallar el cuadrado de  $a + b + c + d$ .

Solución:

$$(a+b+c+d)^2 = [(a+b+c) + d]^2$$

$$(a+b+c+d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)(d) + (d)^2$$

de acuerdo con el ejemplo 7, en donde:

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

entonces, se sigue que:

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc + 2ad + 2bd + 2cd + d^2$$

$$(a+b+c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2bc + 2bd + 2cd.$$

El ejemplo anterior y el ejemplo 7 de la sección anterior, hacen patente la siguiente regla para obtener el cuadrado de un polinomio.

"El cuadrado de un polinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada término, incrementada por la suma algebraica del doble producto de cada uno por los que le siguen".

#### EJEMPLO 12.

Hallar el cuadrado de  $2a + 3b - 4c - 2d$ .

Solución:

$$\begin{aligned} (2a+3b-4c-2d)^2 &= (2a)^2 + (3b)^2 + (-4c)^2 + (-2d)^2 + 2(2a)(3b) + 2(2a)(-4c) \\ &\quad + 2(2a)(-2d) + 2(3b)(-4c) + 2(3b)(-2d) \\ &\quad + 2(-4c)(-2d) \end{aligned}$$

$$(2a+3b-4c-2d)^2 = 4a^2 + 9b^2 + 16c^2 + 4d^2 + 12ab - 16ac - 8ad - 24bc - 12bd + 16cd$$

### 1-8 EL CUBO DE LA SUMA O DIFERENCIA DE UN BINOMIO.

El cubo de la suma de un binomio se expresa  $(x+y)^3$ , en donde,  $(x+y)^3 = (x+y)^2(x+y)$ , obtendremos este producto por el procedimiento indicado a continuación donde se hace uso de la fórmula 2 y del axioma distributivo.

$$\begin{aligned} (x+y)^3 &= (x+y)^2(x+y) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2)(x+y) \\ &= x^2(x+y) + 2xy(x+y) + y^2(x+y) \\ &= x^3 + x^2y + 2x^2y + 2xy^2 + xy^2 + y^3 \\ &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \end{aligned}$$

en consecuencia,

$$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad (5)$$

análogamente,

$$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad (6)$$

Así diremos que el cubo de la suma o diferencia de un binomio es igual al cubo del primero, más o menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo y más o menos el cubo del segundo.

EJEMPLO 13.

Obtener, utilizando la fórmula 5, el cubo de  $a+2$  y el de  $2x+3y$ .

Solución:

$$\begin{aligned}(a+2)^3 &= (a)^3 + 3(a)^2(2) + 3(a)(2)^2 + (2)^3 \\ &= a^3 + 6a^2 + 12a + 8\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2x+3y)^3 &= (2x)^3 + 3(2x)^2(3y) + 3(2x)(3y)^2 + (3y)^3 \\ &= 8x^3 + 36x^2y + 54xy^2 + 27y^3\end{aligned}$$

EJEMPLO 14.

Obtener, utilizando la fórmula 6, el cubo de  $x-4$  y el de  $2a-b$ .

Solución:

$$\begin{aligned}(x-4)^3 &= (x)^3 - 3(x)^2(4) + 3(x)(4)^2 - (4)^3 \\ &= x^3 - 12x^2 + 48x - 64\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2a-b)^3 &= (2a)^3 - 3(2a)^2(b) + 3(2a)(b)^2 - (b)^3 \\ &= 8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3\end{aligned}$$

AUTOEVALUACION 5.

Obtener los siguientes productos por inspección.

- |                            |                    |
|----------------------------|--------------------|
| 1.- $(a + 2b + 3c + d)^2$  | 6.- $(a + 2b)^3$   |
| 2.- $(2w - 3x + 2y - z)^2$ | 7.- $(2a - 3b)^3$  |
| 3.- $(a - b - 2c - 3d)^2$  | 8.- $(x - 3y)^3$   |
| 4.- $(x + 2y - 3z + w)^2$  | 9.- $(3x + 2y)^3$  |
| 5.- $(a - 3b - 2c + 4d)^2$ | 10.- $(3a - 4b)^3$ |

1020115159

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCION 4.

AUTOEVALUACION 1.

- |                         |                            |
|-------------------------|----------------------------|
| 1.- $x^2 + 5xy + 6y^2$  | 6.- $6a^2 - 11a + 4$       |
| 2.- $a^2 - 3ab - 28b^2$ | 7.- $4x^2 - 8xy - 5y^2$    |
| 3.- $6r^2 + 7r - 20$    | 8.- $2u^2 + uv - 15v^2$    |
| 4.- $x^2 - 5x - 24$     | 9.- $10a^2 + 7a + 1$       |
| 5.- $x^2 + 6x - 7$      | 10.- $8x^2 - 22xy + 15y^2$ |

AUTOEVALUACION 2.

- |                          |                            |
|--------------------------|----------------------------|
| 1.- $a^2 + 4ab + 4b^2$   | 6.- $4a^2 - 12ab + 9b^2$   |
| 2.- $x^2 - 6xy + 9y^2$   | 7.- $9x^2 + 12xy + 4y^2$   |
| 3.- $a^2 + 8ab + 16b^2$  | 8.- $16x^2 - 40x + 25$     |
| 4.- $x^2 - 10xy + 25y^2$ | 9.- $9a^2 + 24ab + 16b^2$  |
| 5.- $x^2 + 12x + 36$     | 10.- $25x^2 - 30xy + 9y^2$ |

AUTOEVALUACION 3.

- |                    |                    |
|--------------------|--------------------|
| 1.- $x^2 - 4$      | 6.- $9x^2 - y^2$   |
| 2.- $4x^2 - 1$     | 7.- $4a^2 - 9b^2$  |
| 3.- $9x^2 - 4$     | 8.- $4x^2 - 49y^2$ |
| 4.- $a^2 - 9b^2$   | 9.- $9a^2 - 49b^2$ |
| 5.- $4x^2 - 25y^2$ | 10.- $4x^2 - 9y^2$ |

AUTOEVALUACION 4.

- 1.-  $x^2 + 4y^2 + z^2 + 4xy + 2xz + 4yz$
- 2.-  $4x^2 + y^2 + 9z^2 - 4xy - 12xz + 6yz$
- 3.-  $9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab + 6ac + 4bc$

- 4.-  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 - 4xy + 6xz - 12yz$
- 5.-  $4x^2 + 9y^2 + 4z^2 + 12xy - 8xz - 12yz$
- 6.-  $a^2 + 4ab + 4b^2 - c^2$
- 7.-  $4x^2 - 9y^2 - 12yz - 4z^2$
- 8.-  $9a^2 - 4b^2 - 4bc - c^2$
- 9.-  $9a^2 - 12ab + 4b^2 - c^2$
- 10.-  $a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2$

AUTOEVALUACION 5.

- 1.-  $a^2 + 4b^2 + 9c^2 + d^2 + 4ab + 6ac + 2ad + 12bc + 4bd + 6cd$
- 2.-  $4w^2 + 9x^2 + 4y^2 + z^2 - 12wx + 8wy - 4wz - 12xy + 6xz - 4yz$
- 3.-  $a^2 + b^2 + 4c^2 + 9d^2 - 2ab - 4ac - 6ad + 4bc + 6bd + 12cd$
- 4.-  $x^2 + 4y^2 + 9z^2 + w^2 + 4xy - 6xz + 2xw - 12yz + 4yw - 6zw$
- 5.-  $a^2 + 9b^2 + 4c^2 + 16d^2 - 6ab - 4ac + 8ad + 12bc - 24bd - 16cd$
- 6.-  $a^3 + 6a^2b + 12ab^2 + 8b^3$
- 7.-  $8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$
- 8.-  $x^3 - 9x^2y + 27xy^2 - 27y^3$
- 9.-  $27x^3 + 54x^2y + 36xy^2 + 8y^3$
- 10.-  $27a^3 - 108a^2b + 144ab^2 - 64b^3$