1er. SEMESTRE. AREA II. UNIDAD XII.

FACTORIZACION.

INTRODUCCION.

Con esta unidad comenzaremos el estudio de la factorización. Esta operación es lo contrario al producto, esto es, a través de él vamos a ver cómo encontrar los factores en que se descompone. Aprenderás a representar como factores ciertos tipos de expresiones algebráicas.

Al término del estudio de esta unidad, el estudiante estará en condición de:

OBJETIVOS.

1. Definir el concepto de factorización.

2.- Descomponer en factores primos un número entero o un monomio.

3.- Encontrar el máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más monomios.

4.- Aplicar correctamente la propiedad distributiva de la multiplicación para extraer un factor común de un polinomio.

5.- Descomponer en factores, expresiones algebráicas que involucren los siguientes casos:

a) Diferencia de dos cuadrados.
b) Trinomio cuadrado perfecto.
c) Polinomio cubo perfecto.
d) Suma o diferencia de dos cubos.

PROCEDIMIENTO SUGERIDO.

1.- Estudia la lección 1 del capítulo II de tu texto. Para los objetivos 1 y 2, estudia las secciones 1 y 2. Se supone en estos objetivos, que el alumno tiene conocimiento de los números primos y de la forma de cómo descomponer en factores a un número algebráico. Es importante que logres comprender bien el significado de factorización y del uso de los números primos, puesto que en ellos se basa la descomposición de factores de una expresión algebráica. Por esto, te sugerimos que resuelvas la autoevaluación 1.

Objetivo 3. Estudia la sección 3. Para este objetivo es necesario que domines el anterior, puesto que se basa en sacar el m.c.d de la expresión algebráica para encontrar el factor común; así en el primer ejemplo tenemos que:

$$5a^2bx^4-15ab^2x^2-20ab^3x^4$$

factores primos de $5a^2bx^4 = 5a^2bx^4$
factores primos de $15ab^2x^2= 5x3ab^2x^2$
factores primos de $20ab^3x^4= 5x\ 2^2ab^3x^4$

en donde el m.c.d. = $5abx^2$. Ahora con el m.c.d. como factor común queda:

$$5abx^2(ax^2-3b-4b^2x^2)$$

En caso de que no sea directo sacar factor común por m.c.d., resuélvelo por el método de agrupación primero y luego aplica en m.c.d. para extraer el factor común de la expresión. Aplica estos objetivos resolviendo la autoevaluación 2.

Objetivos 4 y 5. Estudia la sección 4 en delante. Para resolver satisfactoriamente estos objetivos, es necesario que domines los productos especiales, por lo que te sugerimos los saques en limpio en tu cuaderno para que visualices mejor a qué tipo de factorización pertenece cada expresión que analices. Resuelve como

práctica de estos objetivos las autoevaluaciones 3,4,5 y 6.

2.- Aplica tus conocimientos de esta unidad, resolviendo los problemas de la autoevaluación de la unidad, volviendo a estudiar aquellos problemas de factorización que no hayas comprendido bien.

3.- Como ritmo de trabajo, te sugerimos el siguiente:

1er. día	-	objetivos 1 y 2.
2o. día	-	objetivos 3 y 4.
3er. día	-	objetivo 5.
4o. día	-	Laboratorio.

4.- Como requisito para presentar la unidad, deberás entregar a tu asesor el laboratorio de la unidad, resuelto en el salón, el cuarto día. Te sugerimos que consultes otros libros de matemáticas, donde encontrarás suficientes problemas con relación a los objetivos.

AUTOEVALUACIÓN.

1.- Operación que consiste en descomponer una expresión algebráica en dos o más factores cuyos producto es igual a la expresión propuesta.

0) Multiplicación. 1) m.c.m. 2) m.c.d.
3) Agrupación. 4) Factorización.

2.- El cuadrado del primer término más o menos el doble producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo término, es lo que se llama:

0) Cubo.
1) Cuadrado de un binomio.
2) m.c.d
3) Diferencia de cubos.
4) Raíz cuadrada.

Encuentra los factores primos de las siguientes expresiones:

3.- (225)

0) 1,2,7 1) 1,8,6,7 2) 1,2,4
3) 1,3,5 4) 1,0,11,17

4.- $45m^5p^3$

0) $1,8,m^2p^3$ 1) $1,3,5,m,p$ 2) $1,8,7,m^3p^2$
3) $1,6,m^5p^3$ 4) $1,\ m^5,p^3$

Encuentra el m.c.d. de las siguientes expresiones:

5.- $12a^3b;\ 18ab^2$

0) $3a^2b^2$ 1) $5ab^2$ 2) $3a^3b$
3) $6ab$ 4) a^2b

6.- $8a^3bc^2;\quad 12ab^3c^3;\quad 18b^2c^2$

0) $3b^3c^2$ 1) $5ab^2c$ 2) $2bc^2$
3) $3a^2bc^3$ 4) abc^2

Encuentra un factor común de las siguientes expresiones:

7.- $2b^2(x^2-9c^2) + 5e^3(x^2-9c^2)$

0) $(x-c)$ 1) (x^2-9c^2) 2) $(x+9c)$
3) $(x-9c)$ 4) $(x+c)$

8.- $6x^4z^2 - 15x^2z + 21x^2z^3$

0) $5xz^2$ 1) $3x^2z$ 2) xz
3) $6x^4z^2$ 4) $2xz^3$

Encuentra los factores de las siguientes expresiones:

9.- $(9a^2-4x^2)$

0) $(9a-4x)^2$ 1) $(3a-2x)^2$ 2) $(3a+2x)^2$
3) $(3a+2x)(3a-2x)$ 4) $(9a+4x)(9a-4x)$

10.- $(a^2x^2-25y^2)$

0) $(a+5y)^2$ 1) $(2x-5y)^2$ 2) $(ax+5y)^3$
3) $(ax+5y)(ax-5y)$ 4) $(ax+5)(ax-y^2)$

11.- $(4a^2-16a + 16)$

0) $(2a+16)^2$ 1) $(2a^2-4)^2$ 2) $(2a-8)^2$
3) $(2a-4)^2$ 4) $(a-4)^2$

12.- $(4a^2x^2 + 12ax + 9)$

0) $(2ax+3)^2$ 1) $(2a-3)^2$ 2) $(ax+3)^2$
3) $(2ac+3)(2ax-3)$ 4) $(4ax+9)^2$

13.- $(a^3x^3 + 3a^2x^2 + 3ax + 1)$

0) $(ax-1)^2$ 1) $(ax+1)(ax-1)$ 2) $(ax+1)^3$
3) $(ax-1)^3$ 4) $(a^3x^3+1)^2$

15.- $(b^3 + 27)$

0) $(b+3)(b^2-3b+9)$ 1) $(b+3)$ 2) $(b-3)(b+3)$
3) $(b-3)(b^2+3b+9)$ 4) $(b-27)^2$

16.- $(1-8a^3)$

0) $(1-2a)(1+2a+4a^2)$ 1) $(a-2)(1+2a+4a^2)$
2) $(a+2a)(a-2+4a^2)$ 3) $(a-2a)$
4) $(a+2a)(1-2a)$

FACTORIZACION.

LECCIÓN 1.

2-1 DESCOMPOSICION EN FACTORES.

Dados dos o más factores, se obtiene su producto, multiplicando el uno por los otros. Inversamente, dado un producto, se pueden obtener sus factores; a esta operación se le llama, descomposición en factores. En general, descomponer una expresión algebráica en factores, es hallar dos o más factores, cuyo producto es igual a la expresión propuesta.

Para descomponer en factores, un número o una expresión algebráica, se buscan todos los factores primos contenidos en dicho número o expresión. Los números primos solo son divisibles entre sí mismo y entre la unidad. Dos o más expresiones algebráicas, son primas entre sí, si solo admiten la unidad como divisor común.

Eratóstenes, matemático griego del siglo III A.C. ideó un procedimiento para obtener los números primos en la serie de los números naturales que se conoce con el nombre de "Criba de Eratóstenes". Básicamente consiste en ir eliminando todos aquellos números que admiten alguna divisibilidad en forma sistemática, acomodando los números como se ve a continuación.

Sea obtener los números primos de los primeros 100 números de la serie de los números naturales.

PROCEDIMIENTO.

1) Se suprimen los múltiplos de 2, excepto 2.

2) Se suprimen los múltiplos de 3, excepto 3.

3) Se suprimen los múltiplos de 5, excepto 5.

4) Se suprimen los múltiplos de 7, excepto 7.

Los números restantes son primos.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Los números primos obtenidos son: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

En consecuencia, hay 26 números primos en los 100 primeros números de la serie de números naturales (que únicamente son divisibles entre la unidad y entre sí mismos).

Algunos ejemplos de expresiones algebráicas primas entre sí (solo admiten la unidad como divisor común) son:

1) $(a + b)$ y $(a - b)$

2) $(3a + 5)$ y $(2b - 4)$

3) $(x^2 + x + 1)$ y $(x^2 + 1)$

2-2 FACTORES PRIMOS.

Tomando ahora como base cada uno de los números primos anteriores, sin tomar en cuenta el número 1, todo número puede ser descompuesto en sus factores primos.

Los factores primos de un número son aquellos que pueden servir como divisor exacto al número propuesto. Para encontrarlos se va dividiendo en forma progresiva únicamente entre los números primos con los que se pueden hacer división exacta, sin importar que alguno o varios de ellos se repitan dos o más veces hasta lograr que el número indicado se reduzca a la unidad.

Lo usual es colocar una línea vertical a la derecha del número. A la derecha de dicha línea se van colocando los divisores primos y a la izquierda los dividendos resultantes en la forma siguiente:

EJEMPLOS:

Encontrar los factores primos de 120:

120	2
60	2
30	2
15	3
5	5
1	

$120 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = (2)^3 \times 3 \times 5$

Los factores primos de 120 son; 2,3 y 5.

Encontrar los factores primos de 276:

276	2
138	2
69	3
23	23
1	

$276 = 2 \times 2 \times 3 \times 23 = (2)^2 \times 3 \times 23$

Los factores primos de 276 son; 2,3 y 23.

Encontrar los factores primos de $8a^3b^2$:

$8a^3b^2$	2
$4a^3b^2$	2
$2a^3b^2$	2
a^3b^2	a
a^2b^2	a
ab^2	a
b^2	b
b	b
1	

La expresión, $8a^3b^2=(2)(2)(2)(a)(a)(a)(b)(b)$
$= (2)^3(a)^3(b)^2$

Los factores primos de $8a^3b^2$ son; 2, a y b

AUTOEVALUACIÓN 1.

Encuentra los factores primos de los siguientes números:

1.- 360	6.- 32	11.- $8xy^4$	16.- $15ab^2$
2.- 690	7.- 100	12.- $17x^2y^2$	17.- $97z^5$
3.- 342	8.- 125	13.- $100x^6$	18.- $121a^2b^2c^2$
4.- 13310	9.- 178	14.- $24a^2$	19.- $10x$
5.- 227	10.- $4x^2$	15.- $96a^3bc^2$	20.- $25x^{10}z^{20}$

2-3 MÁXIMO COMÚN DIVISOR:

Teniendo varios números propuestos, por ejemplo, 10, 20, 30, 40, se observa que todos ellos pueden ser divididos por un mismo número, en este caso pueden dividirlos el 2, 5 y 10. Por ello, se dice que tienen un divisor común; pero si a la vez se trata del número más grande posible, que sea divisor de todos, entonces tendremos el máximo común divisor, que en el ejemplo es 10.

Porque:

divisores de 10 : 2, 5, 10
divisores de 20 : 2, 4, 5, 10 y 20
divisores de 30 : 2, 3, 5, 6, 10, 15 y 30
divisores de 40 : 2, 4, 5, 8, 10, 20 y 40

De todos los divisores distintos a la unidad, los comunes son: 2, 5 y 10.

De 2, 5 y 10 el máximo es 10.

Por lo tanto m.c.d. de 10, 20, 30 y 40 = 10

EJEMPLO:

En los números 8, 12 y 16, todos ellos pueden ser divididos entre 2 y 4; pero el mayor divisor común es el 4.

Porque:

divisores de 8 : 2, 4 y 8
divisores de 12 : 2, 3, 4, 6 y 12
divisores de 16 : 2, 4, 8 y 16

de todos los divisores diferentes a la unidad, los comunes son: 2 y 4

De 2 y 4 el mayor es 4.

Por lo tanto, m.c.d. de 8, 12 y 16 = 4

Para obtener mentalmente el m.c.d. de varios números sencillos se ensaya si el menor de todos ellos está contenido exactamente en los otros; si esto ocurre, él será el m.c.d. En caso contrario se prueba con la mitad del menor, la tercera parte, la cuarta parte..., hasta obtener una parte de dicho número que esté exactamente contenida en los restantes. El número así obtenido es el m.c.d. de los números dados.

EJEMPLOS:

Obtener mentalmente el m.c.d. de 18, 24 y 8:

8 no está contenido exactamente en 18, pero sí en 24.

4 (la mitad) está exactamente contenido en 24, pero no en 18.

La tercera parte de 8 no es entera, por lo tanto no se tiene en cuenta.

2 (La cuarta parte) está contenido exactamente en 18, 24 y, por supuesto en 8.

El m.c.d. de 18, 24 y 8 es 2.

Obtener mentalmente el m.c.d. de 10 y 12:

10 no está contenido exactamente en 12.

5 (su mitad) tampoco está contenido.

La tercera y cuarta parte de 10 no son enteras, por lo tanto no se tienen en cuenta.

2 (la quinta parte) está contenida exactamente en 12 y por supuesto en 10. En consecuencia:

El m.c.d. de 10 y 12 es 2.

2-4 CALCULO DEL m.c.d. POR FACTORES PRIMOS.

Se buscan los factores primos de cada número y se escriben en la forma indicada para poder escoger los factores comunes de menor exponente. El producto de dichos factores es el m.c.d.

EJEMPLOS:

Calcular el m.c.d. de los números 10, 20, 30 y 40:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 5\ 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 40 & 2 \\ 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$10 = 2 \times 5$

$20 = (2)^2 \times 5$

$30 = 2 \times 3 \times 5$

$40 = (2)^3 \times 5$

Por lo tanto:

Los factores comunes de menor exponente son 2 y 5 su m.c.d. = 2 x 5 = 10

Calcular el m.c.d. de los números 8, 12 y 16:

$$\begin{array}{r|l} 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 16 & 2 \\ 8 & 2 \\ 4 & 2 \\ 2 & 2 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} 8 = (2)^3 \\ 12 = (2)^2 x\ 3 \\ 16 = (2)^4 \end{array}$$

El factor común de menor exponente es $(2)^2$

Su máximo común divisor = $(2)^2 = 4$

Calcular el m.c.d. de: $15a^2b^3c$; $24ab^2\ x$; $36b^4x^2$ descomponiendo en factores primos, tenemos:

$$\begin{array}{r|l} 15a^2b^3c & 3 \\ 5a^2b^3c & 5 \\ a^2b^3c & a \\ ab^3c & a \\ b^3c & b \\ b^2c & b \\ bc & b \\ c & c \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24ab^2x & 2 \\ 12ab^2x & 2 \\ 6ab^2x & 2 \\ 3ab^2x & 3 \\ ab^2x & a \\ b^2x & b \\ bx & b \\ x & x \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 36b^4x^2 & 2 \\ 18b^2x^2 & 2 \\ 9b^2x^2 & 3 \\ 3b^2x^2 & 3 \\ b^2x^2 & b \\ bx^2 & b \\ x^2 & x \\ x & x \\ 1 & \end{array}$$

$$15a^2b^3c = (3)(5)\ a^2b^3c$$

$$24ab^2x = (2)^3(3)\ ab^2x$$

$$36b^4x^2 = (2)^2(3)^2b^2x^2$$

(3) es el factor común en los tres monomios de menor exponente.

b^2 es la literal en los tres monomios de menor exponente.

Por tanto, el m.c.d. de los tres monomios es = $3b^2$.

AUTOEVALUACION 2.

Calcular mentalmente el m.c.d. de los siguientes grupos de números:

1. 30 y 40
2. 12, 8 y 20
3. 6, 8, 16 y 20
4. 18, 27, 36 y 45
5. 56, 64, 48, 40

Calcular mediante la descomposición en factores el m.c.d. de los siguientes grupos de números:

6. 45, 30 y 60
7. 175, 245 y 315
8. 81, 54 y 189

Hallar el m.c.d. de:

9. $2x^2y$, x^2y^3
10. $8am^3n$, $20x^2m^2$
11. $18mn^2$, $27a^2m^3n^4$
12. $15a^2b^3c$, $24ab^2x$, $36b^4x^2$
13. $12x^2yz^3$, $18xy^2z$, $24x^3yz^2$
14. $4a^2b$, $8a^3b^2$, $2a^2bc$, $10ab^3c^2$

2-5 LA PROPIEDAD DISTRIBUTIVA COMO HERRAMIENTA PARA LA FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS.

Aplicar la propiedad distributiva en la factorización de polinomios dados.

Hasta ahora hemos utilizado la propiedad distributiva solo para transformar productos en sumas, es decir:

$$a(b+c) = ab + ac$$

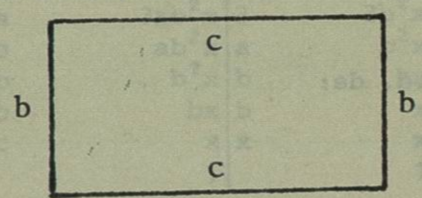
Pero nos falta analizar el otro sentido, que es el de transformar sumas en productos, como indicamos a continuación:

$$ab + ac = a(b+c)$$

en este caso decimos que hemos expresado la suma $ab + ac$ como el producto de los factores a y $(b+c)$

EJEMPLOS:

Si tenemos el rectángulo



decimos que su perímetro es $2b + 2c$, o también $2(b + c)$ ya que por la propiedad distributiva:

$$2b + 2c = 2(b + c)$$

lo cual puede deducirse inmediatamente de la fórmula, -- $ab + ac = a(b + c)$, haciendo $a = 2$.

Si tenemos la expresión, $2x^2y + 3x^2z$, podemos expresarla como $x^2 2y + x^2 3z$ y entonces escribir,

$$2x^2y + 3x^2z = x^2(2y + 3z)$$

Si comparamos la expresión, $(x + 2)y + (x + 2)4$ con la expresión $ab + ac$, vemos que:

$$ab + ac = a(b + c)$$

$$(x + 2)y + (x + 2)4 = (x + 2)(y + 4)$$

Poner en factor común, $3a$ en la expresión, $3a^2 - 6ab$

$$3a^2 - 6ab = 3a.a - 3a.2b = 3a(a - 2b)$$

Poner en factor común, $5abx^3$ en la expresión:

$$5a^2bx^4 - 15ab^2x^3 - 20ab^3x^4$$

$$= 5abx^3(ax - 3b - 4b^2x)$$

En la práctica se elige como factor común un monomio tal que facilite operaciones subsecuentes, como se verá más tarde en la simplificación de fracciones. Para ello, conviene generalmente elegir el m.c.d. de los términos -- del polinomio.

El obtener un factor común, implica la aplicación de, la propiedad distributiva y de la propiedad simétrica de la igualdad. Así, por ejemplo, si:

$a(x + y) = ax + ay$	Propiedad distributiva.
$ax + ay = a(x + y)$	Propiedad simétrica de la igualdad.