Hay veces en que un polinomio cuyos términos no contienen ningún factor común pueden ser separados en grupos de términos con factor común. Algunos polinomios que no están en la forma de diferencia de dos cuadrados pueden ser expresados así mediante un agrupamiento adecuado de los términos.

EJEMPLO:

$$\begin{aligned} 3x + 3y + ax + ay &= (3x + 3y) + (ax + ay) \\ &= 3(x + y) + a(x+y) \\ &= (x + y)(3 + a) \end{aligned}$$

Las propiedades asociativa y conmutativa para la adición junto con la propiedad distributiva, permiten factorizar un polinomio por agrupación. En el último paso, $(x + y)$, se maneja como un solo término al aplicar la propiedad distributiva.

Otro polinomio que se puede factorizar rápidamente cuando se agrupan los términos en forma apropiada es el siguiente:

$$\begin{aligned} 2ab - 15cd - 10ad + 3bc &= (2ab-10ad)+(3bc-15cd) \\ &= 2a(b-5d)+3c(b-5d) \\ &= (2a+3c)(b-5d) \end{aligned}$$

Naturalmente que puede haber más de una forma conveniente de agrupar los términos:

$$\begin{aligned} 2ab - 15cd - 10ad + 3bc &= (2ab+3bc)+(-15cd-10ad) \\ &= b(2a+3c)+(-5d)(3c+2a) \\ &= b(2a+3c)+(-5d)(2a+3c) \\ &= (b-5d)(2a+3c) \end{aligned}$$

Como la multiplicación es conmutativa, este resultado es el mismo que el precedente.

AUTOEVALUACIÓN 3.

Descomponer las expresiones siguientes en dos factores:

1. $b + b^2$
2. $x^3 - 4x^4$
3. $15c^3d^2 + 60c^2d^3$
4. $24a^2xy^2 - 36x^2y^4$
5. $4x^2 - 8x + 2$
6. $x^3 + x^5 - x^7$
7. $34ax^2 + 51a^2y - 68ay^2$
8. $55m^2n^3x + 110m^2n^3x^2 - 220m^2y^3$
9. $x - x^2 + x^3 - x^4$
10. $a^6 - 3a^4 + 8a^3 - 4a^2$
11. $2x^2 + 4$
12. $x^2 - x^4$
13. $a + ab$
14. $6b^3 + 4b^2 - 2b$
15. $16a^4 - 8$

Factorizar por el método de agrupamiento:

16. $am - bm + an - bn$
17. $a^2x^2 - 3bx^2 + a^2y^2 - 3by^2$
18. $x^2 - a^2 + x - a^2x$
19. $3abx^2 - 2y^2 - 2x^2 + 3aby^2$
20. $6ax + 3a + 1 + 2x$
21. $3x^3 - 9ax^2 - x + 3a$
22. $2x^2y + 2xz^2 + y^2z^2 + xy^3$
23. $1 + a + 3ab + 3b$
26. $2x+2y+bx+by$
27. $ax+ay+4x+4y$
28. $ax-ay+2cx-2cy$
29. $4x+12+xy+3y$
30. $mn + m + n + 1$

24. $20ax - 5bx - 2by + 8ay$

25. $a^3 + a^2 + a + 1$

2-6 FACTORIZACION DE UNA DIFERENCIA DE DOS CUADRADOS.

Algunos monomios, se descomponen en dos factores iguales, por ejemplo:

$$49 = (7)(7)$$

$$4a^2 = (2a)(2a)$$

$$100a^6 = (10a^3)(10a^3)$$

Un número o monomio que se descompone en dos factores iguales, es cuadrado perfecto. Cada uno de los factores de la descomposición de un cuadrado perfecto, es la raíz cuadrada del número o del monomio.

144 se descompone en, 12 x 12

La raíz cuadrada de 144 es, 12

$25a^4$, se descompone en, $(5a^2)(5a^2)$

La raíz cuadrada de $25a^4$ es, $5a^2$

Cada uno de dos factores iguales en que se descompone un número, es la raíz cuadrada de dicho número. Toda raíz cuadrada, tiene doble signo.

La raíz cuadrada se denota con el símbolo $\sqrt{}$ el radical.

Para extraer la raíz cuadrada de un monomio cuadrado perfecto se extrae la raíz al coeficiente y se divide entre dos el exponente de cada una de las literales.

EJEMPLO:

$$\sqrt{25a^4b^2} = 5(a)^{4/2}(b)^{2/2} = \pm 5a^2b$$

$$\sqrt{169a^2b^4c^6} = 13(a)^{2/2}(b)^{4/2}(c)^{6/2} = \pm 13ab^2c^3$$

Dos binomios que tienen idéntico el primer término, el segundo término solo difiere en el signo, se llaman binomios conjugados.

EJEMPLO:

a+b y a-b son binomios conjugados.

3a+5 y 3a-5 son binomios conjugados.

Al calcular el producto de dos binomios conjugados, encontramos que era una diferencia de cuadrados como se observa enseguida:

$$(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(x + 4)(x - 4) = x^2 - 16$$

$$(2a-5)(2a+5) = 4a^2 - 25$$

esto quiere decir que cada vez que tengamos una diferencia de cuadrados es posible factorizarla, expresándola como un producto de dos binomios conjugados como en los siguientes ejemplos:

1) $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

2) $25-16 = (5 + 4)(5 - 4)$

3) $a^2 - 36 = (a + 6)(a - 6)$

4) $49x^2 - 9y^2 = (7x + 3y)(7x - 3y)$

Para encontrar los binomios conjugados en los ejemplos anteriores, lo que hicimos fué encontrar la raíz cuadrada tanto del minuendo como del sustraendo en la diferencia de cuadrados que teníamos, pero como la raíz cuadrada puede ser positiva o negativa, entonces es posible factorizar una diferencia de cuadrados en más de una forma, como veremos a continuación:

En el ejemplo 2), $\sqrt{25} = 5$ y $\sqrt{25} = -5$,

también $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{16} = -4$, por lo que si sustituimos estos valores en la fórmula, $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$ tendríamos:

a) $25-16 = (5)^2-(4)^2 = (5+4)(5-4) = (9)(1) = 9$

b) $25-16 = (-5)^2-(-4)^2 = [-5+(-4)][-5-(4)] = (-9)(-1) = 9$

c) $25-16 = (5)^2-(-4)^2 = [5+(-4)][5-(-4)] = (1)(9) = 9$

d) $25-16 = (-5)^2-(4)^2 = (-5+4)(-5-4) = (-1)(-9) = 9$

En el ejemplo 4), $\sqrt{49x^2} = 7x$; $\sqrt{49x^2} = -7x$, y también

$\sqrt{9y^2} = 3y$ $\sqrt{9y^2} = -3y$ de donde concluimos que, $49x^2 - 9y^2$ puede factorizarse como:

a) $49x^2 - 9y^2 = (7x)^2 - (3y)^2 = (7x+3y)(7x-3y)$

b) $49x^2 - 9y^2 = (-7x)^2 - (-3y)^2 = (-7x-3y)(-7x+3y)$

c) $49x^2 - 9y^2 = (7x)^2 - (-3y)^2 = (7x-3y)(7x+3y)$

d) $49x^2 - 9y^2 = (-7x)^2 - (3y)^2 = (-7x+3y)(-7x-3y)$

En ambos casos, observamos que los resultados a) y c) corresponden a los mismos factores, solo que en otro orden, y también ocurre lo mismo con los resultados b) y d).

Para factorizar una diferencia de cuadrados de la forma $x^2 - y^2$, escribimos el producto de dos binomios conjugados de la forma $(x + y)(x - y)$, donde el término común x es una raíz cuadrada del minuendo y los términos simétricos (y) y $(-y)$ son las raíces cuadradas del sustraendo, es decir:

$$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$$

AUTOEVALUACION 4.

Encuentra los factores de las siguientes diferencias de cuadrados:

1) $a^4 - 49$

2) $36x^2 - 25y^6$

3) $64a^2b^4 - 121x^2$

4) $144x^2y^6 - 169x^2$

5) $81 - 9x^{10}$

6) $4x^6y^4 - x^2y^2$

7) $-25x^2 + 36y^4$

8) $(3a+2b)^2 - (3a-2b)^2$

9) $100 - (x+3)^2$

10) $-49x^2y^6 + (7xy^3 + 3)^2$

2-7 FACTORIZACIÓN DE TRINOMIOS CUADRADOS PERFECTOS.

En unidades anteriores establecimos que el resultado de elevar al cuadrado un binomio de la forma $(x+y)$ o de la forma $(x-y)$ era un trinomio cuadrado perfecto, es decir:

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$
$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$$

Esto significa que si tenemos un trinomio cuadrado perfecto, podemos expresarlo como el cuadrado de un binomio, es decir:

$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$

Para ello, debemos estar seguros de que el trinomio que tenemos es realmente un trinomio cuadrado perfecto, por lo que procederemos como en los siguientes ejemplos:

Si queremos factorizar el trinomio $4a^2 + 20ab + 25b^2$ observamos que:

$4a^2$ es el cuadrado de $2a$.

$25b^2$ es el cuadrado de $5b$.

$20ab$ es el doble producto de $2a$ y $5b$.

es decir,

$$20ab = 2(2a)(5b)$$

de donde concluimos que $4a^2 + 20ab + 25b^2$ es un trimonio cuadrado perfecto de la forma,

$$x^2 + 2xy + y^2$$

donde, $x = 2a$
$y = 5b$

y como, $x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$

entonces, $(2a)^2 + 2(2a)(5b) + (5b)^2 = (2a+5b)^2$

Si queremos factorizar el trinomio, $x^2 + 8x + 16$, observamos que:

x^2 es el cuadrado de x.

16 es el cuadrado de 4.

$8x$ es el doble producto de x y de 4.

ya que, $8x = 2(x)(4)$

de donde, $x^2 + 8x + 16 = (x)^2 + 2(x)(4) + (4)^2$

Por lo que podemos escribir:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2$$

Si queremos factorizar el trinomio,

$$z^2 - 10z + 25$$

observamos:

z^2 es el cuadrado de z

25 es el cuadrado de 5

$10z$ es el doble producto de z y de 5 ya que,

$10z = 2(z)(5)$

donde, $z^2 - 10z + 25 = (z)^2 - 2(z)(5) + (5)^2$, lo cual es de la forma, $x^2 - 2xy + y^2$ con $x = z$ y $y = 5$ y como $x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2$

entonces, $(z)^2 - 2(z)(5) + (5)^2 = (z-5)^2$

En el trinomio, $36x^2+42xy+16y^2$, observamos:

$36x^2$ es el cuadrado de 6x.

$16y^2$ es el cuadrado de 4y.

42xy no es el doble producto de 6x y de 4y

ya que, $42xy \neq 2(6x)(4y) = 48xy$.

Por lo que el trinomio, $36x^2+42xy+16y^2$ no es un trinomio cuadrado perfecto.

AUTOEVALUACION 5.

¿Cuáles de los siguientes trinomios son trimonios -- cuadrados perfectos?

1) x^2+6x+9
2) y^2+6y+6
3) y^2+9y+6
4) $a^2-14a+49$
5) h^2+4h-4
6) $25x^2+20x+4$
7) $9x^2-48x+64$
8) $100a^2+30a+9$
9) $49x^2+24x-1$
10) $4y^2-12y-9$

Factoriza los siguientes trinomios cuadrados perfectos:

11) $a^2+2ac+c^2$
12) $4x^2+24xy+36y^2$
13) $x^2+y^4-2xy^2$

14) $9x^2y^2+16+24xy$
15) $28xy^3+49y^6+4x^2$
16) $100a^4b^2+100a^3b^3+25a^2b^4$
17) $16a^2x^2+64a^6x^6+64a^4x^4$
18) $49a^4b^6-42a^4b^4+9a^4b^2$
19) $\frac{4x^2}{9}-2xy+\frac{9y^2}{4}$
20) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^4}{9}-\frac{2xy^2}{15}$

2-8 FACTORIZACIÓN DE UNA EXPRESION QUE ES EL CUBO DE UN BINOMIO.

En los productos notables se vió que:

$(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$

$(x-y)^3 = x^3-3x^2y+3xy^2-y^3$

Por lo anterior se deduce que para que un polinomio ordenado con respecto a una letra sea el cubo de un binomio deberá cumplir con lo siguiente:

1) Tener cuatro términos.
2) El primero y último términos deberán ser cubos perfectos.
3) El segundo término deberá ser + o - el triple -- producto del cuadrado de la raíz cúbica del primer término multiplicado por la raíz cúbica del - último término.
4) El tercer término deberá ser el triple producto de la raíz cúbica del primer término por el cuadrado de la raíz cúbica del último.

Si todos los términos del polinomio son positivos la expresión dada es el cubo de la suma de las raíces cúbicas del primero y último término y si los términos son alternadamente positivos y negativos la expresión dada es el cubo de la diferencia de dichas raíces.

EJEMPLOS:

Encontrar si la siguiente expresión es el cubo de un binomio: $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$

Primero vemos si cumple con las condiciones anteriores:

1) Sí tiene cuatro términos.

2) La raíz cúbica de $125a^3 = 5a$

La raíz cúbica de $8b^3 = 2b$

3) $(3)(5a)^2(2b) = 150a^2b$ (segundo término)

4) $(3)(5a)(2b)^2 = 60ab^2$ (tercer término)

Por tanto, sí cumple las condiciones y como todos sus términos son positivos la expresión dada es el cubo de $(5a + 2b)$ o de otra manera, $(5a + 2b)$, es la raíz cúbica del polinomio dado.

Encontrar si la siguiente expresión es el cubo de un binomio: $54ab^2 - 27b^3 + 8a^3 - 36a^2b$

ordenando la expresión se tiene:

$8a^3 - 36a^2b + 54ab^2 - 27b^3$

1) Tiene cuatro términos.

2) La raíz cúbica de $8a^3 = 2a$

La raíz cúbica de $27b^3 = 3b$

3) $(3)(2a)^2(3b) = 36a^2b$ (segundo término)

4) $(3)(2a)(3b)^2 = 54ab^2$ (tercer término)

y como los términos son alternadamente + y -, la expresión dada es el cubo de 2a-3b.

AUTOEVALUACION 6.

Factorizar las expresiones siguientes ordenándolas previamente:

1. $a^3 + 3a^2 + 3a + 1$
2. $27 - 27x + 9x^2 - x^3$
3. $8 + 12a^2 + 6a^4 + a^6$
4. $27m^3 + 108m^2n + 144mn^2 + 64n^3$
5. $125a^3 + 150a^2b + 60ab^2 + 8b^3$
6. $8 + 36x + 54x^2 + 27x^3$
7. $a^6 + 3a^4b^3 + 3a^2b^6 + b^9$
8. $64x^3 + 240x^2y + 300xy^2 + 125y^3$
9. $m^3 - 3am^2n + 3a^2mn^2 - a^3n^3$
10. $64x^9 - 125y^{12} - 240x^6y^4 + 300x^3y^8$

2-9 FACTORIZACION DE LA SUMA O DIFERENCIA DE DOS CUBOS.

Es fácil comprobar mediante multiplicación directa que, $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$ y que $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3$

Este es un resultado importante porque garantiza que invirtiendo las fórmulas podemos siempre factorizar la suma de dos cubos; así como la diferencia de dos cubos.

EJEMPLOS:

Factorizar completamente, $x^3 - 27$

Primero observamos que 27 es el cubo de 3 de modo que lo que tenemos es la diferencia entre dos cubos. Podemos escribir $x^3 - 27 = x^3 - (3)^3$, aunque esto debe hacerse mentalmente. Ahora, aplicamos a la inversa la segunda fórmula de arriba:

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ y pensamos en

x y 3 en lugar de en a y b:

$$x^3 - (3)^3 = (x-3)(x^2 + x\cdot 3 + 3^2)$$

$$= (x-3)(x^2+3x+9)$$

Factorizar completamente, $8y^3 + 1$

Esto se puede factorizar como la suma de dos cubos:

$$8y^3 + 1 = (2y)^3 + (1)^3 \text{ (mentalmente)}$$

$$= (2y+1)\left[(2y)^2 - (2y)\cdot 1 + 1^2\right]$$

$$= (2y+1)(4y^2 - 2y + 1)$$

Notemos que podemos establecer el proceso mental para encontrar el segundo factor en la forma siguiente: Encontramos el primer factor, elevamos al cuadrado su primer término, multiplicamos sus dos términos y cambiamos el signo, y finalmente elevamos al cuadrado su segundo término.

En los dos ejemplos anteriores, el segundo factor del resultado no es de nuevo factorizable.

AUTOEVALUACIÓN 7.

Desarrollar:

1. $1 + a^3$
2. $8x^3 + y^3$
3. $27a^3 - b^3$
4. $1 - 216m^3$
5. $8x^3 - 27y^3$
6. $512 + 27a^9$
7. $x^6 - 8y^{12}$
8. $27m^3 + 64n^9$
9. $a^3 + 8b^{12}$
10. $8x^9 - 125y^3z^6$

RESPUESTAS A LAS AUTOEVALUACIONES DE LA LECCION 1.

AUTOEVALUACION 1.

1.- 2, 3, 5
2.- 2, 3, 5, 23
3.- 2, 3, 19
4.- 2, 5, 11
5.- Es número primo.
6.- 2, 3
7.- 2, 5
8.- 5
9.- 2, 89
10.- 2, x
11.- 2, 3, x, y
12.- 17, x, y
13.- 2, 5, x
14.- 2, 3, a
15.- 2, 3, a, b, c
16.- 3, 5, a, b
17.- 97, z
18.- 11, a, b, c
19.- 2, 5, x
20.- 5, x, z

AUTOEVALUACION 2.

1.- 10
2.- 8
3.- 2
4.- 9
5.- 8
6.- 15
7.- 35
8.- 27
9.- x^2y
10.- $4m^2$
11.- $9mn^2$
12.- 3b
13.- 6xyz
14.- 2ab

AUTOEVALUACION 3.

1.- $b(1+b)$
2.- $x^3(1-4x)$
3.- $15c^2d^2(c+4d)$
4.- $12xy^2(2a^2-3xy^2)$
5.- $2(2x^2-4x+1)$
6.- $x^3(1+x^2-x^4)$
7.- $17a(2x^2+3ay-4y^2)$
8.- $55m^2(n^3x+2n^3x^2-4y^3)$
9.- $x(1-x+x^2-x^3)$
10.- $a^2(a^4-3a^2+8a-4)$
11.- $2(x^2+2)$
12.- $x^2(1-x^2)$
13.- $a(1+b)$
14.- $2b(3b^2+2b-1)$
15.- $8(2a^4-1)$
16.- $(m+n)(a-b)$
17.- $(x^2+y^2)(a^2-3b)$
18.- $(x+1)(x-a^2)$
19.- $(x^2+y^2)(3ab-2)$
20.- $(2x+1)(3a+1)$
21.- $(3x^2-1)(x-3a)$
22.- $(xy+z^2)(2x+y^2)$
23.- $(a+1)(3b+1)$
24.- $(4a-b)(5x+2y)$
25.- $(a+1)(a+1)$
26.- $(x+y)(2+b)$
27.- $(a+4)(x+y)$
28.- $(x-y)(a+2c)$
29.- $(4+y)(x+3)$
30.- $(m+1)(n+1)$

AUTOEVALUACION 4.

1. $(a^2+7)(a^2-7)$
2. $(6x+5y^3)(6x-5y^3)$
3. $(8ab^2+11x)(8ab^2-11x)$
4. $(12xy^3+13x)(12xy^3-13x)$
5. $(9+3x^5)(9-3x^5)$
6. $(2x^3y^2+xy)(2x^3y^2-xy)$
7. $(6y^2+5x)(6y^2-5x)$
8. $(6a)(4b)$
9. $(13+x)(7-x)$
10. $(14xy^3+3)(3)$

AUTOEVALUACIÓN 5.

1) Sí
2) No
3) No
4) Sí
5) No
6) Sí
7) Sí
8) No
9) No
10) No
11) $(a+c)^2$
12) $(2x+6y)^2$
13) $(x-y^2)^2$
14) $(3xy+4)^2$
15) $(2x+7y^3)^2$
16) $(10a^2b+5ab^2)^2$
17) $(4ax+8a^3x^3)^2$
18) $(7a^2b^3-3a^2b)^2$
19) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3y}{2}\right)^2$
20) $\left(\frac{x}{5}-\frac{y^2}{3}\right)^2$

AUTOEVALUACIÓN 6.

1. $(a+1)^3$
2. $(3-x)^3$
3. $(2+a^2)^3$
4. $(3m+4n)^3$
5. $(5a+2b)^3$
6. $(2+3x)^3$
7. $(a^2+b^3)^3$
8. $(4x+5y)^3$
9. $(m-an)^3$
10. $(4x^3-5y^4)^3$

AUTOEVALUACIÓN 7.

1. $(1+a)(1-a+a^2)$
2. $(2x+y)(4x^2-2xy+y^2)$
3. $(3a-b)(9a^2+3ab+b^2)$
4. $(1-6m)(1+6m+36m^2)$
5. $(2x-3y)(4x^2+6xy+9y^2)$

6. $(8+3a^3)(64-24a^3+9a^6)$
7. $(x^2-2y^4)(x^4+2x^2y^4+4y^8)$
8. $(3m+4n^3)(9m^2-12mn^3+16n^6)$
9. $(a+2b^4)(a^2-2ab^4+4b^8)$
10. $(2x^3-5yz^2)(4x^6+10x^3yz^2+25y^2z^4)$