FACTORIZACION DE UN TRINOMIO GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

LECCIÓN 2.

2-10 TRINOMIO GENERAL DE SEGUNDO GRADO.

Trinomio de la forma:

$$x^2 + bx + c$$

en donde:

1.- El coeficiente del primer término es 1.

2.- El coeficiente del segundo término es b y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

3.- El término c, es el término independiente y es una cantidad cualquiera, positiva o negativa.

EJEMPLOS:

$x^2 + 7x + 10$ $\qquad$ $a^2 + 13a - 30$

$x^2 - y - 2$ $\qquad$ $m^2 - 3m + 2$

Regla práctica.

1.- El trinomio se factoriza en dos binomios cuyo primer término es x, o sea, la raíz cuadrada del primer término del trinomio.

2.- En el primer binomio después de x, se escribe el signo del segundo término del trinomio y en el segundo binomio después de x, se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo del segundo término del trinomio por el signo del tercer término del trinomio.

3.- Si los dos binomios tienen en medio signos iguales, entonces se buscan dos números cuya suma sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. Estos números son, los segundos términos de los binomios.

4.- Si los dos binomios tienen en medio signos distintos, se buscan dos números cuya diferencia sea el valor absoluto del segundo término del trinomio y cuyo producto sea el valor absoluto del tercer término del trinomio. El mayor de estos números es el segundo término del primer binomio, y el menor, el segundo término del segundo binomio.

EJEMPLOS:

Factorizar:

$$x^2 + 6x + 5$$

El trinomio se descompone en dos factores cuyo primer término es la raíz cuadrada de x^2, o sea, "x".

$$x^2 + 6x + 5 = (x \quad)(x \quad)$$

En el primer factor después de "x" se pone signo + porque el segundo término del trinomio 6x tiene signo +. En el segundo factor después de "x" se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de 6x por el signo de 5, o sea, + por + da +; por tanto:

$$x^2 + 6x + 5 = (x + \quad)(x + \quad)$$

Como en estos factores hay signos iguales, se buscan dos números cuya suma sea 6 y cuyo producto sea 5. Estos números son 5 y 1, por tanto:

$$x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$$

Factorizar:

$$y^2 - 11y + 24$$

El trinomio se descompone en dos factores cuyo primer término es la raíz cuadrada de y^2 o sea, "y".

$$y^2 - 11y + 24 = (y \quad)(y \quad)$$

En el primer factor después de "y" se pone signo - porque -11y tiene signo -. En el segundo factor después de "y" se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de -11y por el signo de 24, o sea, - por + dá -, luego:

$$y^2 - 11y + 24 = (y - \quad)(y - \quad)$$

Ahora, como en estos factores hay signos iguales, se buscan dos números cuya suma sea 11 y cuyo producto sea 24. Estos números son 8 y 3, por tanto:

$$y^2 - 11y + 24 = (y - 8)(y - 3)$$

Factorizar:

$$m^2 + 4m - 12$$

El trinomio se descompone en dos factores cuyo primer término es la raíz cuadrada de m^2, o sea "m":

$$m^2 + 4m - 12 = (m \quad)(m \quad)$$

En el primer factor después de "m" se pone el signo + porque el segundo término del trinomio 4m tiene signo +. En el segundo factor después de "m" se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de 4m por el signo de -12 y se tiene, + por - da -, o sea:

$$m^2 + 4m - 12 = (m + \quad)(m - \quad)$$

Ahora, como en estos factores tenemos signos distintos, se buscan dos números cuya diferencia sea 4 y cuyo producto sea 12. Estos números son 6 y 2. El mayor de ellos se escribe siempre en el primer factor y se tiene:

$$m^2 + 4m - 12 = (m + 6)(m - 2)$$

Factorizar:

$$t^2 - 14t - 72$$

El trinomio se descompone en dos factores cuyo primer término es la raíz cuadrada de t^2 o sea "t".

$$t^2 - 14t - 72 = (t \quad)(t \quad)$$

En el primer factor después de t se pone signo - porque el segundo término del trinomio -14t tiene signo -. En el segundo factor, después de t se escribe el signo que resulta de multiplicar el signo de -14t por el signo de -72. Por tanto, se tiene - por - da +, o sea:

$$t^2 - 14t - 72 = (t - \quad)(t + \quad)$$

Ahora, como en este binomio tenemos signos diferentes, se buscan dos números cuya diferencia sea 14 y cuyo producto sea 72. Estos números son 18 y 4. El mayor 18 se escribe en el primer binomio y se tiene:

$$t^2 - 14t - 72 = (t-18)(t+4)$$

Factorizar:

$$n^2 - 20n - 3500$$

$$n^2 - 20n - 3500 = (n- \quad)(n + \quad)$$

necesitamos dos números cuya diferencia sea 20 y cuyo producto sea 3500. Estos números no se ven fácilmente. Para encontrarlos, descomponemos en sus factores primos el tercer término.

3500	2
1750	2
875	5
175	5
35	5
7	7
1	

Ahora, formamos con estos factores primos dos productos. Por tanteos variando los factores de cada producto obtendremos los dos números que buscamos:

2 x 2 x 5= 20	5 x 5 x 7= 175	175 - 20 = 155
5 x 5 x 5=125	2 x 2 x 7= 28	125 - 28 = 97
2 x 5 x 7= 70	2 x 5 x 5= 50	70 - 50 = 20

Por tanto, 70 y 50 son los números buscados. Luego,

$$n^2 - 20n - 3500 = (n-70)(n+50)$$

Observaciones.

Si multiplicamos $(y+2)(x-7)$,

queda:

$$(y+2)(y-7) = (y)^2 + (2-7)y + 2(-7)$$
$$= y^2 - 5y - 14$$

Estos dos productos, podríamos encontrarlos fácilmente por medio del siguiente esquema:

$$(y+2)(y-7) \quad = \quad (y+2)(y-7)$$

y^2		$-5y$		-14
Producto de los primeros términos.	+	Suma de los productos exterior e interior.	+	Producto de los dos últimos términos.

A la suma de los productos exterior e interior se le conoce también como la suma de los productos cruzados. Al descomponer en factores trinomios de este tipo, el término central $(-5y)$ es el pivote. Un estudio de la multiplicación nos enseña que el coeficiente del término en "y" que es (-5) es la suma algebráica del producto de los dos términos exteriores $(y)(-7)$ con el producto de los dos términos interiores $(2)(y)$ y que el último término del trinomio es el producto de los dos términos exteriores de los binomios $(2)(-7)$. Esto sugiere la forma de descomponer tales trinomios.

El proceso de la descomposición en factores se aplica generalmente a polinomios de coeficientes enteros. En este caso se requiere que los factores sean también polinomios de coeficientes enteros.

Un polinomio de coeficientes enteros es primo cuando no se puede descomponer en factores siguiendo los criterios expuestos anteriormente. Por ejemplo, $x^2 - 7x + 6 = (x-1)(x-6)$ está expresado como producto de los factores primos $(x-1)$ y $(x-6)$.

Un polinomio se puede descomponer totalmente en factores cuando se puede expresar como producto de factores primos.

En la descomposición de factores se pueden efectuar cambios de signo. Por ejemplo, $x^2 - 7x + 6$ se puede descomponer en, $(x-1)(x-6)$ o bien en $(1-x)(6-x)$. Se demuestra que la descomposición en factores primos prescindiendo de los cambios de signo o del orden de los factores es única.

Este es el teorema fundamental de la descomposición en factores.

Un polinomio es primo cuando no admite más factores o divisores que él mismo con signo + o - y la unidad $\pm$ 1. Esta definición es análoga a la de los números primos como son 2, 3, 5, 7, 11.

Dos o más polinomios multiplicados entre sí dan como resultado un producto. Cuando se parte de un producto para llegar a dos o más polinomios esto constituye la descomposición en factores.

EJEMPLO:

Factorizar:

$$x^2 + x + 4$$

Las únicas factorizaciones posibles son $(x+1)(x+4)$ y $(x+2)(x+2)$. Pero al efectuar estos productos se determina que ninguno de los trinomios resultantes tienen a "x" como término lineal. Entonces, $x^2 + x + 4$, no puede factorizarse en el conjunto de polinomios con coeficientes enteros.

Un polinomio que no se puede expresar como un producto de polinomios de grado inferior se dice que es irreductible.

AUTOEVALUACION 1.

Factorizar correctamente los siguientes trinomios:

1.- $a^2 + 7a + 10$	6.- $x^2 - 8x - 1008$
2.- $y^2 + 10y + 21$	7.- $m^2 - 9m + 18$
3.- $x^2 + 5x - 24$	8.- $x^2 - 41x + 400$
4.- $a^2 + a - 132$	9.- $x^2 - 11x + 30$

5.- $x^2 - 2x - 35$ 10.- $x^2 - 13x + 30$

Un polinomio irreductible cuyo máximo factor común es 1 se llama polinomio primo. Así por ejemplo, $x^2 + x + 4$ es un polinomio primo en el conjunto de polinomios con coeficientes enteros.

La factorización de un polinomio es completa cuando cada factor es una constante, un polinomio primo o una potencia de un polinomio primo.

Trinomios de la forma, $ax^2 + bx + c$.

Son trinomios de esta forma:

$$2y^2 + 7y + 3$$
$$3x^2 + 20x - 7$$
$$10y^2 - 11y - 6$$
$$3x^2 - 5x + 2$$

que se diferencian de los trinomios estudiados anteriormente en que el primer término tiene un coeficiente distinto de 1.

Primer método.

Para factorizar un producto expresado como trinomio cuyo término cuadrático tiene un coeficiente distinto de 1, se puede usar el método de inspección y tanteo como en el ejemplo que sigue:

Factorizar:

$$6x^2 - 25x + 14$$

Primera observación: El término constante es positivo y el lineal es negativo, por tanto ambos factores son diferencias.

Segunda observación: El producto de los términos lineales de los factores es $6x^2$ y el producto de los términos constantes de los factores es 14.

Por tanto, hay que considerar las siguientes posibilidades:

Factores posibles	términos lineales correspondientes
$(x-1)(6x-14)$	$-14x - 6x = -20x$
$(x-14)(6x-1)$	$-x - 84x = -85x$
$(x-2)(6x-7)$	$-7x - 12x = -19x$
$(x-7)(6x-2)$	$-2x - 42x = -44x$
$(2x-1)(3x-14)$	$-28x - 3x = -31x$
$(2x-14)(3x-1)$	$-2x - 42x = -44x$
$(2x-2)(3x-7)$	$-14x - 6x = -20x$
$(2x-7)(3x-2)$	$-4x - 21x = -25x$

Tercera observación: El término lineal del trinomio es $-25x$. Solo la última posibilidad satisface las tres observaciones. Por tanto:

$$6x^2 - 25x + 14 = (2x-7)(3x-2)$$

Otra observación puede ayudar a reducir el número de factores posibles. Si un trinomio no tiene factor común, ninguno de sus factores puede tener factor común. Así, las anteriores combinaciones de factores que contienen a $(6x-14)$ $(6x-2)$, $(2x-14)$ ó $(2x-2)$ se pueden descartar de inmediato, ya que cada una tiene un factor común que no aparece en el trinomio dado.

Factorizar:

$$6y^2 - y - 2$$

Primera observación: El producto de los términos lineales es $6y^2$, por tanto, la factorización empieza con:

$$(y \quad\quad)(6y \quad\quad)$$

o bien, $$(2y \quad\quad)(3y \quad\quad)$$

Segunda observación: El producto de los términos constantes es (-2). Por tanto un término constante debe ser positivo y el otro negativo y las únicas posibilidades son -1 y 2 ó -2 y 1. La lista de los posibles factores es la siguiente:

Factores posibles.	Término lineal correspondiente
$(y-1)(6y+2)$	$2y - 6y = -4y$
$(y-2)(6y+1)$	$y - 12y = -11y$
$(y+2)(6y-1)$	$-y + 12y = 11y$
$(y+1)(6y-2)$	$-2y + 6y = 4y$
$(2y-1)(3y+2)$	$4y - 3y = y$
$(2y+2)(3y-1)$	$-2y + 6y = 4y$
$(2y-2)(3y+1)$	$2y - 6y = -4y$
$(2y+1)(3y-2)$	$-4y + 3y = -y$

Tercera observación: El término lineal del trinomio es (-y). Solamente la última posibilidad satisface todas las observaciones. Por tanto la respuesta es:

$$6y^2 - y - 2 = (2y+1)(3y-2)$$

Se observa que el procedimiento que se sigue es semejante al que se usó al factorizar trinomios de la forma, $x^2 + bx + c$. Ahora, puesto que los coeficientes del primer término del trinomio son diferentes de 1, necesitamos hacer más "tanteos" antes de encontrar la combinación correcta de los números.

Factorizar:

$$10y^2 + 17y + 3$$

Tenemos que encontrar, $(?y + ?)(?y + ?) = 10y^2 + 17y + 3$ sabemos que los segundos términos deben ser positivos ¿puedes explicar por qué? Sabemos que el producto de los coeficientes de los términos en "y" de los dos factores es 10. Sabemos también que la suma algebráica de los productos cruzados debe ser (17y). Usaremos el método de tanteo y error para obtener el resultado correcto.

$$(5y + 3)(2y + 1) = 10y^2 + (3)(2y) + (1)(5y) + 3$$
$$= 10y^2 + 11y + 3 \quad \text{(descartado)}$$

$$(5y + 1)(2y + 3) = 10y^2 + (1)(2y) + (3)(5y) + 3$$
$$= 10y^2 + 17y + 3$$

Por tanto, el resultado correcto es:

$$(5y+1)(2y+3)$$

Factorizar:

$$6a^2 - 23a + 15$$

debemos hallar, $(?a - ?)(?a - ?) = 6a^2 - 23a + 15$. Sabemos que los segundos términos de cada factor deben ser negativos, ¿puedes explicar por qué? Sabemos también que el producto de los coeficientes de los términos en "a" de los factores es 6.

Conocemos también que la suma algebráica de los productos cruzados debe ser (-23a). Usaremos el método de tanteo y error para obtener el resultado correcto.

$$(3a - 5)(2a - 3) = 6a^2 - (5)(2a) + 3a(-3) + 15$$
$$= 6a^2 - 19a + 15 \quad \text{(descartado)}$$

$$(3a - 1)(2a - 15) = 6a^2 - (1)(2a) = (3a)(-15) + 15$$
$$= 6a^2 - 47a + 15 \quad \text{(descartado)}$$

$$(6a - 5)(a - 3) = 6a^2 - (5)(a) + 6a(-3) + 15$$
$$= 6a^2 - 23a + 15$$

Por tanto, el resultado correcto es: $(6a-5)(a-3)$.

Factorizar:

$$12x^2 - 8x - 15$$

Debemos hallar: $(?x + ?)(?x - ?) = 12x^2 - 8x - 15$. Sabemos que los segundos términos de los factores deben tener signos contrarios. ¿Puedes explicar por qué? Conocemos el producto de los coeficientes de x es 12. También sabemos que la suma algebráica de los productos cruzados tiene que ser (-8x). Usaremos el método de tanteo y error para llegar al resultado. A veces se necesitan varios intentos.

$$(4x + 3)(3x - 5) = 12x^2 + (3)(3x) + (4x)(-15)$$
$$= 12x^2 - 11x - 15 \quad \text{(descartado)}$$

$$(4x - 3)(3x + 5) = 12x^2 - (3)(3x) + (5)(4x) - 15$$
$$= 12x^2 + 11x - 15 \quad \text{(descartado)}$$

$$(12x + 5)(x - 3) = 12x^2 + 5x + 12x\ (-3) - 15$$
$$= 12x^2 - 31x - 15 \quad \text{(descartado)}$$

$$(6x + 5)(2x - 3) = 12x^2 + (5)(2x) + (6x)(3) - 15$$
$$= 12x^2 - 8x - 15$$

Por tanto, los factores son: $(6x + 5)(2x - 3)$

No siempre es posible factorizar trinomios en el conjunto de los enteros. Por ejemplo, los siguientes trinomios no se pueden descomponer en el conjunto de los enteros.

$$x^2 - x - 1$$
$$2x^2 - 7x - 6$$

Segundo método.

En lugar del método que hemos explicado se puede usar el siguiente para factorizar trinomios de la forma:

$$ax^2 + bx + c; \qquad a \neq 1$$

EJEMPLOS:

Factorizar:

$$12x^2 + 11x + 2$$

Encontramos primero el producto de (a)(c) que es 24. Puesto que (a)(c) es positivo, tenemos que buscar un par de factores de 24 cuya suma sea 11; son 3 y 8. Así pues, escribimos:

1	24	$12x^2 + 3x + 8x + 2$
2	12	$= (12x^2 + 3x) + (8x + 2)$
3	8	$= 3x(4x + 1) + 2(4x + 1)$
4	6	$= (3x + 2)(4x + 1)$

En el primer paso no importa si se escribe $3x + 8x$ ó $8x + 3x$. ¿Puedes ver por qué?

Factorizar:

$$10x^2 - 11x - 6$$

Encontramos primero el producto de (a)(c) que es (-60). Puesto que (a)(c) es negativo, tenemos que encontrar un par de factores de 60 cuya diferencia sea 11; son 4 y 15, el mayor de estos tiene el signo de b. Así pues, escribimos:

1	60	$10x^2 - 15x + 4x - 6$
2	30	$= (10x^2 - 15x) + (4x - 6)$
3	20	$= 5x(2x - 3) + 2(2x - 3)$
4	15	$= (5x + 2)(2x-3)$
5	12	

No se necesita escribir todos los factores en orden si se descubre más pronto el factor apropiado. ¿Importaría, si hubieras escrito $10x^2 + 4x - 15x - 6$ en el primer paso? Compruébalo y verás si es cierto.

Factorizar:

$$8x^2 - 26x + 15$$

Encontramos primero el producto (a)(c) que es (8)(15)= 120. Puesto que (a)(c) es positivo, debemos encontrar un par de factores de 120 cuya suma sea 26; son 6 y 20; ambos deben tener el signo del término de en medio. Así pues, escribimos:

1	120	$8x^2 - 6x - 20x + 15$
2	60	$= (8x^2 - 6x) + (-20x + 15)$
3	40	$= (8x^2 - 6x) - (20x - 15)$

4	30	$= 2x(4x-3) - 5(4x-3)$
5	24	$= (2x - 5)(4x - 3)$
6	20	

¿Podrías haber escrito, $8x^2 - 20x - 6x + 15$ en el primer paso? Razona la respuesta.

Factorizar:

$$6x^2 + x - 12$$

Aquí el producto de (a)(c) es, (6)(-12) ó (-72). Puesto que (a)(c) es negativo, buscaremos un par de factores de 72 cuya diferencia es 1; son 8 y 9, el mayor debe de tener el signo del término central. Enconces escribimos:

1	72	$6x^2 + 9x - 8x - 12$
2	36	$(6x^2 + 9x) + (-8x - 12)$
3	24	$(6x^2 + 9x) - (8x + 12)$
4	18	$3x(2x + 3) - 4(2x + 3)$
6	12	$(3x - 4)(2x + 3)$
8	9	

¿Daría, $6x^2 - 8x + 9x - 12$ los mismos factores? Compruébalo y en esa forma verás si es cierto.

Tercer método.

Factorizar:

$$6x^2 - 7x - 3$$