AUTOEVALUACIÓN 2.

1.- $c/2$

2.- ab

3.- $7y^2z/3$

4.- $3/b$

5.- $3w/2v$

6.- $xy/6$

7.- $30x^2$

8.- $\frac{5(a-b)}{3(a+2b)}$; $5/3$

9.- $\frac{2(2x-y)}{5(x+2y)} \cdot \frac{x(x+2y)}{y(2x-y)} = \frac{2x}{5y}$

10.- $b/2$

11.- $1/x^2y$

12.- $\frac{1}{(a-6)(a+5)} \cdot \frac{(a+7)(a-6)}{2} = \frac{a+7}{2a+10}$

13.- $\frac{a(a-6)}{a^2(a+3)} \cdot \frac{a(a+9)}{(a+9)(a-6)} = \frac{1}{a+3}$

14.- $\frac{(x+5)(x^2+5x+25)}{(x+8)(x-8)} \cdot \frac{(x+8)(x-7)}{x(x^2-5x+25)} = \frac{(x+5)(x-7)}{(x-8)}$

15.- $7c^2$

16.- $\frac{(h+3)(h-3)}{k(k-9)} \cdot \frac{h(k-9)}{k(h+3)} \cdot \frac{k^3}{h^2(h-3)} = \frac{k}{h}$

17.- $\frac{3a-5}{a+5}$

18.- 1

SUMA Y RESTA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

LECCIÓN 2.

1-4 REDUCCION DE UNA FRACCION A UN MINIMO COMUN DENOMINADOR.

Definición.

Reducir, dos o más fracciones, a un común denominador, es hallar otras, respectivamente equivalentes a las primeras, cuyos denominadores sean iguales.

Reducción a un común denominador.

Consideremos las fracciones,

$$\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{m}{n}$$

si se multiplican los dos términos de la primera fracción por dn, los de la segunda por bn, y los de la tercera por bd, ninguna de las fracciones cambia de valor, y se convierten respectivamente en:

$$\frac{adn}{bdn}, \frac{cbn}{bdn}, \frac{mbd}{bdn}$$

que como se ve, tiene el mismo denominador.

Por lo expuesto, resulta que: para reducir dos o más fracciones, a un común denominador, se multiplican ambos miembros de cada una de ellas, por el producto de los denominadores de todas las demás.

Fracciones reducidas a su mínimo común denominador.

Con el objeto de evitar, denominadores muy grandes, es preferible, siempre que sea posible, reducir las fracciones a su menor común denominador, es decir, transformarlas en otras, respectivamente equivalentes a las propuestas, cuyo denominador común sea mínimo.

Por ejemplo, consideremos las fracciones,

$$\frac{2a}{5\ (a^2 - 4)} \quad y \quad \frac{6a}{35\ (a^2 - 6a+8)}$$

Para reducirlas a su menor común denominador, se debe hallar una expresión, que sea múltiplo de, $5(a^2-4)$ y al mismo tiempo de, $35(a^2-6a+8)$, y tal que su coeficiente sea el mínimo común múltiple, de los coeficientes de los denominadores y que el grado de la parte literal sea mínimo.

El primer denominador, $5(a^2-4)$, se descompone en: $5(a+2)(a-2)$, y el segundo, $35(a^2-6a+8)$ es igual a $5 \cdot 7\ (x-2)(x-4)$; entonces, en vez de tomar como denominador común el producto de, $5(a^2-4)$ por $35(a^2-6a+8)$, basta tomar $5 \cdot 7\ (x+2)(x-2)(x-4)$, que es el m.c.m. de los denominadores de las fracciones dadas.

Si a la primera fracción, se le da por denominador,

$$35(a+2)(a-2)(a-4) = 35(a^2-4)(a-4)$$

dicho denominador queda multiplicado por, $7(a-4)$ para que no se altere el valor de la fracción hay que multiplicar el numerador, por el mismo factor, y así se obtiene:

$$\frac{2a \cdot 7\ (a-4)}{35\ (a+2)(a-2)(a-4)} = \frac{14a\ (a-4)}{35\ (a^2-4)(a-4)}$$

dando a la segunda fracción el mismo denominador, el suyo queda multiplicado por $(a+2)$; para no alterar el valor de la fracción, hay que multiplicar también el numerador por, $(a+2)$, y así resulta:

$$\frac{6a\ (a+2)}{35\ (a+2)(a-2)(a-4)} = \frac{6a\ (a+2)}{35\ (a^2-4)(a+2)}$$

El mínimo común múltiplo.

El mínimo común múltiplo, (m.c.m.) de un conjunto de polinomios, es el polinomio de menor grado, y con los mínimos coeficientes enteros, que sea divisible exactamente, entre cada polinomio del conjunto.

El grado de un polinomio, es el grado de su término de mayor grado. El grado de un término, es la suma de los exponentes que aparecen en él.

Por ejemplo, el grado de, $2x^3-3x^2+4x$ es 3, y el grado de $3x^2y^2-2xy+3y^2$ es 4.

EJEMPLOS:

1) El m.c.m. de, $3x$; $4x^2y$; $8x^5y^2$ y de $36x^4$ es, $72x^5y^2$.

2) El m.c.m. de, $2(x-y)$; $3(x+y)$; y de $(x-y)^2$, es $6(x-y)^2(x+y)$.

Si los polinomios están factorizados, se observa que, por definición, el m.c.m. factorizado, debe satisfacer los requisitos siguientes:

1.- Cada factor, de cada polinomio, debe aparecer como factor del m.c.m. Además, cada factor del m.c.m., debe estar elevado a una potencia igual, a la mayor que dicho factor tenga, en cualquiera de los polinomios factorizados.

2.- El m.c.m. no puede tener un factor, que no aparezca en alguno de los polinomios factorizados.

De ese modo, se tiene el siguiente método, para obtener el m.c.m. de un conjunto de polinomios:

1.- Se factoriza, cada uno de los polinomios.

2.- Se escribe el m.c.m., cada uno de los diferentes factores primos, de los polinomios, y luego se eleva cada factor, a la mayor potencia con que aparezca en alguno de los polinomios factorizados. (Número primo, es un número que no tiene más factores, que él mismo y la unidad).

EJEMPLO:

Encontrar el m.c.m. de los siguientes polinomios:

$$x^2 - 2xy + y^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2$$
$$x^2 - y^2$$

$$x^2 - 3xy + 2y^2$$
$$2x^2 + 3xy + y^2$$

SOLUCIÓN:

Se escriben factorizados cada uno de esos polinomios, como se muestra en seguida:

$$x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$$
$$x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2$$
$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$
$$x^2 - 3xy + 2y^2 = (x - 2y)(x - y)$$
$$2x^2 + 3xy + y^2 = (2x + y)(x + y)$$

Los factores primos que aparecen arriba son, $(x-y)$; $(x+y)$; $(x-2y)$ y $(2x+y)$. Sin embargo, $(x-y)$ y $(x+y)$ tienen exponente 2, en el primero y en el segundo de los polinomios, respectivamente. Por tanto, el m.c.m. es, $(x-y)^2(x+y)^2(x-2y)(2x+y)$.

Reducción de fracciones al mínimo común denominador empleando el mínimo común múltiplo (m.c.m.).

Para reducir, dos o más fracciones a su mínimo común denominador, por el método del m.c.m., se pueden seguir los siguientes pasos:

1.- Se toma como denominador común, el m.c.m. de los denominadores.

2.- Se divide ese común denominador, entre el denominador de cada fracción.

3.- Se multiplica el numerador de cada fracción, por el cociente respectivo obtenido.

EJEMPLOS:

Reducir, a su mínimo común denominador:

1) $\frac{5ax^2}{8by^2}$, $\frac{7by}{10x^2z}$, $\frac{8cx^3}{15yz^3}$

m.c.m. (8, 10, 15) = 120

m.c.m. $(8by^2, 10x^2z, 15yz^3) = 120bx^2y^2z^3)$

Efectuando las operaciones indicadas resulta:

$$\frac{75ax^4z^3}{120bx^2y^2z^3}, \quad \frac{84b^2y^3z^2}{120bx^2y^2z^3}, \quad \frac{64bcx^5y}{120bx^2y^2z^3}$$

2) Reducir, a su mínimo común denominador:

$$\frac{2}{3m^3-12m^2}, \quad \frac{m}{m^2-6m+8}, \quad \frac{m^2}{m^3-8}$$

Factorizando los denominadores se tiene:

$$3m^3 - 12m^2 = 3m^2(m-4)$$
$$m^2 - 6m + 8 = (m-2)(m-4)$$
$$m^3 - 8 = (m-2)(m^2+2m+4)$$

Por tanto, el mínimo común denominador es:

$$3m^2(m-4)(m-2)(m^2+2m+4)$$

y las fracciones, se transforman respectivamente en:

$$\frac{2(m-2)(m^2+2m+4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

$$\frac{m.3m^2(m^2+2m+4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

$$\frac{m^2.3m^2(m-4)}{3m^2(m-2)(m-4)(m^2+2m+4)}$$

AUTOEVALUACION 1.

Transforma la siguiente fracción en una equivalencia, cuyo denominador sea, la expresión que aparece a la derecha.

1.- $\frac{5a}{3bc}$, $15ab^2c^2$

2.- $\frac{4r}{9s\ t}$, $27r^2s^2t^5$

3.- $\frac{2a}{3a-1}$, $(3a-1)(2a+3)$

4.- $\frac{3x+2y}{2x-3y}$, $4x^2-9y^2$

5.- $\frac{3a+4b}{5a-2b}$, $15a^2-26ab+8b^2$

Reducir al mínimo común denominador.

6.- $\frac{2a}{36c}$, $\frac{4b^2}{9c^2}$, $\frac{5c^3}{12a^2c^3}$, m.c.d. = _____

7.- $\frac{4x}{9y^2z}$, $\frac{5y}{12xz^2}$, $\frac{8z}{15x^2y}$, m.c.d. = _____

8.- $\frac{5w^2}{12u^2v}$, $\frac{7v^2}{24uw^2}$, $\frac{8u^2}{27v^2w}$, m.c.d. = _____

9.- $\frac{a}{a^2-b^2}$, $\frac{a-b}{(a+b)^2}$, $\frac{a+b}{(a-b)^2}$, m.c.d. = _____

10.- $\frac{2u+v}{4u^2-9v^2}$, $\frac{2u-3v}{4u^2+8uv+3v^2}$, $\frac{2u+3v}{4u^2-4uv-3v^2}$, m.c.d.= _____

Nota.

Generalmente es preferible, indicar la multiplicación en el denominador, sin efectuarla; así se ve más rápidamente, por qué factores, ha sido multiplicado el denominador de cada fracción y por tanto, qué factores deben multiplicar también su numerador.

1-5 SUMA DE FRACCIONES ALGEBRAICAS.

Definición.

La adición o suma, es una operación que tiene por objeto, reunir varios números de la misma especie, en uno solo.

Los números que se suman, se llaman sumados, y el resultado se denomina, suma o total.

El signo de la operación de sumar, es una cruz (+), que se lee más, y se coloca entre los sumandos.

En la suma de fracciones algebráicas se distinguen dos casos:

Primer caso; las fracciones algebráicas tienen igual denominador.

Para sumar fracciones algebráicas de igual denominador, se suman algebráicamente los numeradores y al resultado se le da, el denominador común.

EJEMPLOS.

$$\frac{x}{5} + \frac{2y}{5} = \frac{x+2y}{5}$$

$$\frac{8a}{7b} + \frac{-5a}{7b} = \frac{8a-5a}{7b} = \frac{3a}{7b}$$

$$\frac{3a+2b}{ab} + \frac{5a-3b}{ab} + \frac{2a+5b}{ab} = \frac{3a+2b+5a-3b+2a+5b}{AB}$$

$$= \frac{10a+4b}{ab}$$

Segundo caso: las fracciones algebraicas, no tienen igual denominador.

Para sumar fracciones algebraicas, que no tienen igual denominador, se busca el mínimo común múltiplo de los denominadores, se reducen las fracciones a otras equivalentes, que tengan como denomindador, el mínimo común múltiplo o común denominador y se efectúa la suma.

EJEMPLOS:

Sumar;

$$\frac{a}{6} + \frac{2a}{5} + \frac{3a}{4}$$

El común denominador de 6, 5 y 4 es, 60.

$$\frac{a}{6} = \frac{10a}{60} \; ; \; \frac{2a}{5} = \frac{24a}{60} \; ; \; \frac{3a}{4} = \frac{45a}{60}$$

$$\frac{a}{6} + \frac{2a}{5} + \frac{3a}{4} = \frac{10a}{60} + \frac{24a}{60} + \frac{45a}{60}$$

$$= \frac{10a+24a+45a}{60} = \frac{79a}{60}$$

EJEMPLO:

Sumar;

$$\frac{a+b}{a} + \frac{2a-3b}{b} + \frac{5a^2-2b^2}{ab}$$

El común denominador de a, b y ab es, ab.

$$\frac{a+b}{a} = \frac{(a+b)b}{ab} = \frac{ab + b^2}{ab}$$

$$\frac{2a-3b}{b} = \frac{(2a-3b)a}{ab} = \frac{2a^2-3ab}{ab}$$

Por tanto:

$$\frac{a+b}{a} + \frac{2a-3b}{b} + \frac{5a^2-2b^2}{ab} = \frac{ab+b^2}{ab} + \frac{2a^2-3ab}{ab} + \frac{5a^2-2b^2}{ab}$$

$$\frac{ab+b^2+2a^2-3ab+5a^2-2b^2}{ab} = \frac{7a^2-2ab-b^2}{ab}$$

EJEMPLO:

Suma.

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} + \frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} + \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

Antes de comenzar cualquier operación, deben simplificarse las fracciones, siempre que se pueda,

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} = \frac{1}{x+y}$$

$$\frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} = \frac{1}{x-y}$$

$$\frac{2x+2y}{x^2-y^2} = \frac{2}{x-y}$$

Por tanto,

$$\frac{x+y}{x^2+2xy+y^2} + \frac{x-y}{x^2-2xy+y^2} = \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x-y}$$

ahora, el común denominador de, $x+y$ y $x-y$ es, x^2-y^2 Luego,

$$\frac{1}{x+y} = \frac{x-y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{x-y} = \frac{x+y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{2}{x-y} = \frac{2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{2}{x-y} = \frac{x-y+x+y+2x+2y}{x^2-y^2}$$

$$= \frac{4x+2y}{x^2-y^2}$$

En la práctica, para sumar fracciones algebráicas, se simplifican cuando se puede, se busca el común denominador, se divide el común denominador, entre el denominador de cada una de las fracciones y el resultado, se multiplica por el numerador de la fracción, luego, se reducen los términos semejantes.

EJEMPLOS:

Sumar, $\frac{2a}{5b} + \frac{3b}{7a} + \frac{2b}{5a} = \frac{(2a)(7a)+(3b)(5b)+(2b)(7b)}{35ab}$

$$= \frac{14a^2+15b^2+14b^2}{35ab} = \frac{14a^2+29b^2}{35ab}$$

Sumar, $\frac{x+2}{x^2-4} + \frac{x-3}{x^2-9} + \frac{x+3}{x^2+6x+9} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3} + \frac{1}{x+3}$

$$= \frac{x+3+x-2+x-2}{x^2+x-6} = \frac{3x-1}{x^2+x-6}$$

Sumar, $\frac{5x-5y}{x^2-y^2} + \frac{x^2+xy+y^2}{x^3-y^3} + \frac{3}{x+y} =$

$$= \frac{5}{x+y} + \frac{1}{x-y} + \frac{3}{x+y} = \frac{8}{x+y} + \frac{1}{x-y}$$

$$= \frac{8(x-y)+1(x+y)}{x^2-y^2} = \frac{9x-7y}{x^2-y^2}$$

Propiedades de la suma con fracciones algebráicas.

La suma de fracciones algebráicas, es una operación conmutativa y asociativa, es decir:

Conmutativa; porque indistintamente, se puede obtener la misma suma, a pesar de cambiar el orden de los sumandos.

EJEMPLO:

$$\frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{12+4+3}{18} = \frac{19}{18} = 1\,\frac{1}{18}$$

$$\frac{2}{9} + \frac{2}{3} + \frac{1}{6} = \frac{4+12+3}{18} = \frac{19}{18} = 1\,\frac{1}{18}$$

$$\frac{1}{6} + \frac{2}{9} + \frac{2}{3} = \frac{3+4+12}{18} = \frac{19}{18} = 1\,\frac{1}{18}$$

Asociativa; porque se puede agrupar dos o más sumandos, y obtener una suma parcial que, agregada a los sumandos restantes, da el mismo resultado, que efectuada la suma en forma corriente.

EJEMPLO:

$$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{5}{4} = \frac{36+40+45+20+12+75}{60}$$

$$= \frac{228}{60} = 3\frac{48}{60} = 3\frac{4}{5}$$

Asociando fracciones, con el mismo denominador, se tiene:

$$\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$