CAPILLA ALFONSINA

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS.

LECCIÓN 3.

3-24 INTRODUCCIÓN.

Aproximadamente dos décadas después a la introducción de las computadoras electrónicas, estamos en el comienzo de la revolución tecnológica. Comenzamos a ver la herramienta poderosa que significan estas computadoras de alta velocidad y las máquinas que se utilizan para procesar los datos automáticamente.

Es asombrosa la gran variedad de campos en los cuales se aplican las computadoras, tanto en la ciencia, como en la contabilidad, en la ingeniería, en la medicina, por mencionar unos cuantos. Se usan para controlar el tráfico, para analizar las condiciones del subsuelo, para interpretar cardiogramas, para estudiar la compleja estructura de las moléculas. Las computadoras han hecho posible el control automático de los procesos en la industria del petróleo, acero y textil, entre otras. Sin las computadoras electrónicas, pocas o ninguna de las exploraciones recientes del espacio exterior hubieran sido posibles.

Recientemente, se usaron en el análisis de los esfuerzos en las estructuras de acero de rascacielos de cien pisos de altura. Fue necesario resolver un sistema de 1500 ecuaciones simultáneas, que las computadoras efectuaron en 45 minutos.

BIBLIOTECA ALFONSINA UNIVERSIDAD

3-25 ECUACIONES LINEALES CON TRES INCOGNITAS.

Consideraremos ahora el problema de resolver un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas. Los métodos algebráicos que fueron usados para resolver un sistema de ecuaciones en dos incógnitas servirán de una manera análoga en el presente caso de tres incógnitas.

Un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas tiene una solución, o no tiene solución, o tiene una infinidad de soluciones.

Esta misma situación fue discutida en el caso de dos incógnitas. Pero consideraremos sistemas de tres incógnitas que tienen una y solo una solución.

3-26 METODO DE SUMA Y RESTA.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas se procede de este modo:

1.- Se combinan dos de las ecuaciones dadas y se elimina una de las incógnitas (lo más sencillo es eliminarla por suma y resta) y con ello se obtiene una ecuación con dos incógnitas.

2.- Se combina la tercera ecuación con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas y se elimina entre ellas la misma incógnita que se eliminó antes, obteniéndose otra ecuación con dos incógnitas.

3.- Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones con dos incógnitas que se ha obtenido, hallando de este modo dos de las incógnitas.

4.- Los valores de las incógnitas obtenidas se sustituyen en una de las ecuaciones dadas originales, con lo cual se halla la tercera incógnita.

5.- Comprobar el conjunto solución en el sistema original.

Ejemplo 1.

Resolver el sistema:

$$x + 4y - z = 6 \qquad (1)$$
$$2x + 5y - 7z = -9 \qquad (2)$$
$$3x + 2y + z = 2 \qquad (3)$$

Solución:

Combinamos las ecuaciones (1) y (2) y vamos a eliminar la x. Multiplicando la ecuación (1) por 2, se tiene:

$$\begin{array}{r} 2x + 8y - 2z = 12 \\ -2x - 5y + 7z = 9 \\ \hline \end{array}$$

restando: $3y + 5z = 21 \qquad (4)$

combinando la tercera ecuación (3) con cualquiera de las otras dos ecuaciones dadas. Vamos a combinarla con (1) para eliminar la x. Multiplicando la ecuación (1) por 3 tenemos:

$$\begin{array}{r} 3x + 12y - 3z = 18 \\ -3x + 2y - z = -2 \\ \hline \end{array}$$

restando: $14y - 4z = 16 \qquad (5)$

dividiento entre 2: $7y - 2z = 8$

Ahora tomamos las dos ecuaciones con dos incógnitas que hemos obtenido (4) y (5), y formamos un sistema:

$$3y + 5z = 21 \qquad (4)$$
$$7y - 2z = 8 \qquad (5)$$

Resolvamos este sistema. Vamos a eliminar la z multiplicando (4) por 2 y (5) por 5:

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

$$\begin{array}{r} 6y + 10z = 42 \\ 35y - 10z = 40 \\ \hline 41y \quad\quad = 82 \\ \hline y = 2 \end{array}$$

Sustituyendo $y = 2$ en (5) se tiene:

$$\begin{aligned} 7(2) - 2z &= 8 \\ 14 - 2z &= 8 \\ -2z &= -6 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Sustituyendo y=2, z=3, en cualquiera de las tres ecuaciones dadas, por ejemplo en (1), se tiene:

$$\begin{aligned} x + 4(2) - 3 &= 6 \\ x + 8 - 3 &= 6 \\ x &= 1 \end{aligned} \qquad R. \quad \begin{aligned} x &= 1 \\ y &= 2 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

Por lo tanto el conjunto solución es: $\{(1,2,3)\}$

Comprobación,

Los valores, x=1, y=2, z=3 tienen que satisfacer las tres ecuaciones dadas. Haga la sustitución y verá que las tres ecuaciones dadas se convierten en identidad.

Ejemplo 2.

Resolver el sistema:

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 13 && (1) \\ 4y + z &= -8 && (2) \\ x - y - z &= -2 && (3) \end{aligned}$$

Solución.

En algunos casos, no hay reglas fijas para resolver el sistema y depende de la habilidad del alumno encontrar el modo más expedito de resolverlo. Este ejemplo puede resolverse así:

La ecuación (1) tiene x y y. Entonces tengo que buscar otra ecuación de dos incógnitas que tenga x y y para formar con (1) un sistema de dos ecuaciones que tengan ambas x y y.

Reuniendo (2) y (3):

$$\begin{array}{r} 4y + z = -8 \\ x - y - z = -2 \\ \hline \text{sumando:} \quad x + 3y \quad = -10 \end{array} \qquad (4)$$

Ya tenemos la ecuación que buscábamos.

Ahora, formamos un sistema con (1) y (4):

$$\begin{aligned} 2x - 5y &= 13 \\ x + 3y &= -10 \end{aligned}$$

Multiplicando esta última ecuación por 2 y restando:

$$\begin{array}{r} 2x - 5y = 13 \\ -2x - 6y = 20 \\ \hline -11y = 33 \\ y = -3 \end{array}$$

Sustituyendo $y = -3$ en (1):

$$\begin{aligned} 2x - 5(-3) &= 13 \\ 2x + 15 &= 13 \\ 2x &= -2 \\ x &= -1 \end{aligned}$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Sustituyendo $x = -1$, $y = -3$ en (3):

$$-1 - (-3) - z = -2$$
$$-1 + 3 - z = -2$$
$$-z = -4$$
$$z = 4$$

R. $x = -1$, $y = -3$, $z = 4$

Por lo tanto el conjunto solución es $\{(-1, -3, 4)\}$

AUTOEVALUACIÓN 1.

Resuelve los sitemas siguientes por suma y resta:

1.- $x + y + z = 6$
$x - y + 2z = 5$
$x - y - 3z = -10$

2.- $x + y + z = 12$
$2x - y + z = 7$
$x + 2y - z = 6$

3.- $x - y + z = 2$
$x + y + z = 4$
$2x + 2y - z = -4$

4.- $2x + y - 3z = -1$
$x - 3y - 2z = -12$
$3x - 2y - z = -5$

5.- $2x + 3y + z = 1$
$6x - 2y - z = -14$
$3x + y - z = 1$

6.- $5x - 2y + z = 23$
$2x + 5y - 2z = -12$
$x - 4y + 3z = 23$

7.- $4x + 2y + 3z = 8$
$3x + 4y + 2z = -1$
$2x - y + 5z = 3$

8.- $x + y = 1$
$y + z = -1$
$z + x = -6$

9.- $3x - 2y = 0$
$3y - 4z = 25$
$z + 5x = 6$

10.- $5x - 3z = 2$
$2z - y = -5$
$x + 2y - 4z = 8$

CAPILLA ALFONSINA

3-27 METODO DE SUSTITUCIÓN.

Para resolver un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas por el método de sustitución:

1.- Se despeja una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones.

2.- Se reemplaza la incógnita cuyo valor se ha encontrado en las otras dos ecuaciones.

3.- Se resuelve el sistema que resulta.

4.- Se sustituyen esos valores en cualquiera de las ecuaciones originales para calcular el valor de la otra incógnita.

5.- Se comprueban los resultados.

Ejemplo 3.

Resolver:

$$x - y + 2z = -3 \qquad (1)$$
$$4x - y - z = 3 \qquad (2)$$
$$3x + 2y + 3z = 4 \qquad (3)$$

Solución:

Se despeja x en (1):

$$x = -3 + y - 2z$$

Se sustituye en (2) y (3)

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Al sustituir el valor de x en (2) se tiene:

$$4(-3 + y - 2z) - y - z = 3$$
$$-12 + 4y - 8z - y - z = 3$$
$$3y - 9z = 15$$

dividiendo entre 3: $y - 3z = 5$ (4)

Al sustituir el valor de x en (3), se tiene:

$$3(-3 + y - 2z) + 2y + 3z = 4$$
$$-9 + 3y - 6z + 2y + 3z = 4$$
$$5y - 3z = 13 \quad (5)$$

Se resuelve:

$$y - 3z = 5 \quad (4)$$

Restando $5y - 3z = 13$ (5)

(4) de (5) $4y = 8$

$$y = 2$$

Luego se reemplaza el valor de y en (4):

$$2 - 3z = 5$$
$$-3z = 3$$
$$z = -1$$

Se sustituyen los valores (y, z) en (1) para obtener el valor de x:

$$x - 2 - 2 = -3$$
$$x = 1$$

Comprobación.

En (2):

$$4(1) - 2 - (-1) = 4 - 2 + 1 = 3$$

En (3):

$$3(1) + 2(2) + 3(-1) = 3 + 4 - 3 = 4$$

Por lo tanto el conjunto solución es: $\{(1,2,-1)\}$

AUTOEVALUACION 2.

Por el método de sustitución resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.- $3x + 4y - 16z = 0$
$5x - 8y + 10z = 0$
$2x + 6y + 7z = 52$

2.- $x - y - z = 10$
$3x + y + 2z = 0$
$4x + 2y - 3z = 8$

3.- $6x + 2y - 5z = 13$
$3x + 3y - 2z = 13$
$7x + 5y - 3z = 26$

4.- $2x - 3y + 4z = 20$
$4x + 2y - 3z = 11$
$3x + 4y + 2z = 53$

5.- $2x - y = 11$
$3x + 5z = 17$
$2x + 5y + 4z = -3$

6.- $7x + 3y - 2z = 16$
$2x + 5y + 3z = 39$
$5x - y + 5z = 31$

7.- $2x + 3y + 4z = 38$
$3x + 2y - 5z = -8$
$5x - 6y + 3z = 6$

8.- $x + 2y + 2z = 11$
$2x + y + z = 7$
$3x + 4y + z = 14$

9.- $x + 3y + 4z = 18$
$x + 2y + z = 11$
$2x + y + 2z = 10$

10.- $2x + 3y + 4z = 20$
$3x + 4y + 5z = 26$
$3x + 5y + 6z = 31$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

3-28 MÉTODO DE IGUALACIÓN.

1.- Se despeja la misma incógnita en las tres ecuaciones.

2.- Se igualan la primera con la segunda y la primera o la segunda con la tercera.

3.- Se resuelve el sistema que resulta.

4.- Se sustituyen los valores obtenidos en cualquiera de las ecuaciones en que la incógnita restante está despejada.

5.- Se comprueban las respuestas.

Ejemplo 4.

Resolver:

$$x + y - z = -7 \qquad (1)$$

$$3x - 2y + 3z = 24 \qquad (2)$$

$$2x + 3y - 5z = -32 \qquad (3)$$

Solución:

Se despeja x en (1)

$$x = z - y - 7 \qquad (4)$$

Se despeja x en (2):

$$x = \frac{24 + 2y - 3z}{3} \qquad (5)$$

Se despeja x en (3):

$$x = \frac{5z - 3y - 32}{2} \qquad (6)$$

Se iguala x en (4) y (5).

$$z - y - 7 = \frac{24 + 2y - 3z}{3}$$

$$3z - 3y - 21 = 24 + 2y - 3z$$

$$5y - 6z + 45 = 0 \qquad (7)$$

Se iguala x en (4) y (6).

$$z - y - 7 = \frac{5z - 3y - 32}{2}$$

$$2z - 2y - 14 = 5z - 3y - 32$$

$$3z - y - 18 = 0 \qquad (8)$$

Se resuelve el sistema:

$$5y - 6z + 45 = 0 \qquad (7)$$

$$-y + 3z - 18 = 0 \qquad (8)$$

$$\begin{array}{lll} & (7) & 5y - 6z + 45 = 0 \\ \text{Restando} & (9) & -2y + 6z - 36 = 0 \\ \text{(9) de (7)} & & 3y + 9 = 0 \end{array}$$

Ec. (8) por 2

$$3y = -9$$

$$\underline{y = -3}$$

Se sustituye el valor de "y" en la ecuación (8):

$$-(-3) + 3z - 18 = 0$$

$$3z = 15$$

$$\underline{z = 5}$$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Luego se reemplazan los valores de "y" y "z" en cualquiera de las ecuaciones en que la x esté despejada, por ejemplo en (4):

$$x = 5 - (-3) - 7$$
$$= 5 + 3 - 7$$
$$= 1$$
$$\underline{x = 1}$$

Con los valores de x, y, z encontrados se comprueba en las ecuaciones restantes (5) y (6):

de (5) $x = \frac{24+2(-3)-(3)(5)}{3} = \frac{24-6-15}{3} = \frac{3}{3} = 1$

de (6) $x = \frac{(5)(5)-3(-3)-32}{2} = \frac{25+9-32}{2} = \frac{2}{2} = 1$

Por lo tanto, el conjunto solución es: $\{(1,-3,5)\}$

AUTOEVALUACIÓN 3.

Por el método de igualación resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

1.- $x + y - 2z = 13$
$x - 3y - z = -3$
$x - y + 4z = -17$

2.- $x + y + 3z = 7/2$
$x - 2y + 4z = 7$
$2x - 11y - 24z = 5$

3.- $x + y + z = -1$
$3x - y - 5z = 13$
$5x + 3y + 2z = 1$

4.- $2x - y + z = -9$
$x - 2y + z = 0$
$x - y + 2z = -11$

5.- $x - y + z = 9$
$x - 2y + 3z = 32$
$x - 4y + 5z = 62$

6.- $3x - y - z = 7$
$x - 3y - z = 21$
$x - y - 3z = 27$

7.- $x + 2y - 3z = 5$
$3x - 22y + 6z = 4$
$7x - 6y - 3z = 15$

8.- $5x + y + 4z = -5$
$3x - 5y + 6z = -20$
$x - 3y - 4z = -21$

9.- $2x - 3y - 4z = -10$
$3x + 4y + 2z = -5$
$4x + 2y + 3z = -21$

AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 3.

A partir de las siguientes tres ecuaciones en tres incógnitas, encuentra lo siguiente:

(1) $x + y + 2z = 3$

(2) $x + 2y + 4z = 3$

(3) $x - 3y - 5z = 5$

1.- Resultado de restar ecuación (1) de la (2) para eliminar "x".

0) $y + 2z = 0$ 1) $2y + z = 0$
2) $y + 2z = 3$ 3) $y + z = 5$

2.- Resultado de restar la ecuación (2) de la (3) para eliminar "x".

0) $9y + 5z = 2$ 1) $5y + 9z = 2$
2) $-5y - 9z = 2$ 3) $y + z = 0$

3.- Resultado de eliminar la "y" por adición, de las dos ecuaciones encontradas en los problemas 1 y 2.

0) $z = 0$ 1) $x = 2$
2) $y = 1$ 3) $z = 2$

CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA