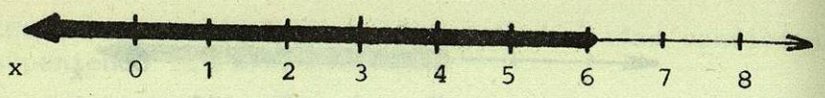


Fig. 2.

Observamos que el 6 está incluído en el conjunto y que la flecha llena representa continuidad hasta menos infinito en el conjunto de los números reales.

Ejemplo 3.

Hallar el límite de x en la inecuación:

$$\{x \in R \mid (x+3)(x-1) < (x-1)^2 + 3x\}$$

Efectuando las operaciones indicadas:

$$x^2 + 2x - 3 < x^2 - 2x + 1 + 3x$$

suprimiento $x^2$ en ambos miembros y trasponiendo:

$$2x + 2x - 3x < 1 + 3 \qquad \{x \in R \mid x < 4\}$$

4 es el límite superior de x.

La gráfica del conjunto solución queda:

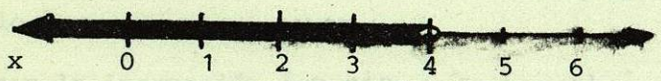


Fig. 3.



AUTOEVALUACIÓN 2.

Hallar el límite de x en las inecuaciones lineales siguientes y la gráfica del conjunto solución en el sistema unidimensional.

1.- $\{x \in R \mid x - 5 < 2x - 6\}$

2.- $\{x \in R \mid 5x - 12 > 3x - 4\}$

3.- $\{x \in R \mid x - 6 > 21 - 8x\}$

4.- $\{x \in R \mid 3x - 14 < 7x - 2\}$

5.- $\{x \in R \mid 2x - 5/3 > x/3 + 10\}$

6.- $\{x \in R \mid 3x - 4 + x/4 \leq 5x/2 + 2\}$

7.- $\{x \in R \mid (x-1)^2 - 7 \geq (x-2)^2\}$

8.- $\{x \in R \mid (x+2)(x-1) + 26 \leq (x+4)(x+5)\}$.

## 4-6 DESCRIPCION DE SUBCONJUNTOS DE UN PLANO MEDIANTE DESIGUALDADES.

La gráfica de cualquier ecuación de primer grado en dos variables es una línea recta e inversamente, cualquier línea recta en un plano coordenado es la gráfica de alguna ecuación de primer grado en dos variables. En esta sección exá-



CAPILLA ALFONSINA

minaremos algunas *desigualdades de primer grado* en *dos variables* y determinaremos sus gráficas. A continuación se presentan tres desigualdades de primer grado en dos variables.

$$\{(x,y) \in R \mid y > x\}$$

$$\{(x,y) \in R \mid 2x + y < 0\}$$

$$\{(x,y) \in R \mid 1/2\ x < y\}$$

Ejemplo 4.

Grafica el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$.

Para determinar si cualquier par ordenado dado $(x,y)$ satisface la desigualdad $y > x$, reemplazamos "x" por la primera componente del par ordenado y "y" por la segunda componente; si la proposición resultante es verdadera, entonces el par ordenado es una solución de la desigualdad.

Así, cualquier par ordenado $(x,y)$ cuya segunda componente sea mayor que su primera componente será una solución de $y > x$. ¿Pertenece el par ordenado $(2,3)$ al conjunto solución de $y > x$? ¿El $(2,-3)$?

Ahora construiremos la gráfica del conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$. Vea la fig. 4. Observe que cualquier punto sobre la recta corresponde a una solución de la ecuación $y = x$. ¿Cuáles de los puntos desde $P_1$ hasta $P_{12}$ corresponden a soluciones de $y > x$?



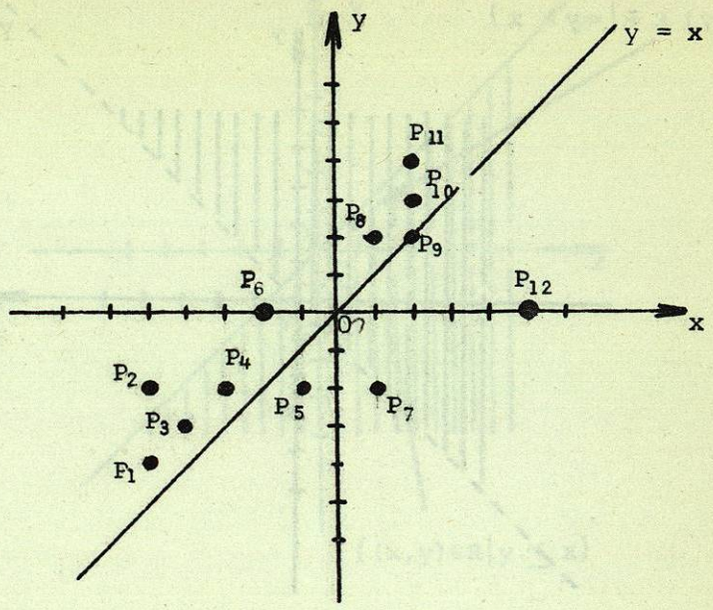


Fig. 4.

Note que la recta en la figura 4, como cualquier recta en un plano coordenado separa los puntos del plano que no están sobre la recta endos conjuntos disjuntos de puntos: Los dos conjuntos de puntos a cada lado de la recta, cada uno de los cuales se llama un *semiplano abierto*.

La unión de la recta con uno de los semiplanos abiertos que determina, se llama un *semiplano cerrado*. Así, podemos describir la gráfica de, $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ como el semiplano "arriba" de la recta que es la gráfica de $y = x$. La gráfica de, $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ se muestra en la figura 5. El objeto de la recta interrumpida es indicar que los puntos que limitan el semiplano no son parte de la gráfica o del conjunto solución de la desigualdad.



CAPILLA ALFONSINA

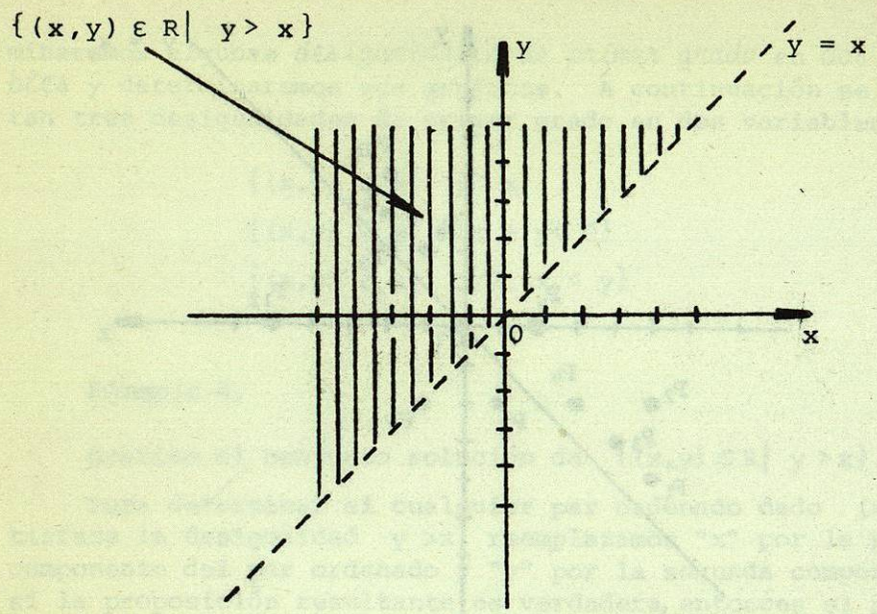


Fig. 5.

Sabiendo que la gráfica de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ es el semiplano "arriba" de la línea interrumpida, describa la gráfica de $\{(x,y) \in R \mid y < x\}$

Ejemplo 5.

Grafica el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y \leq x\}$. Ya que el conjunto solución para $y \leq x$ es la unión de los conjuntos solución para $y=x$ y para $y < x$, vemos que la gráfica de $\{(x,y) \in R \mid y \leq x\}$ se muestra en la figura 6.



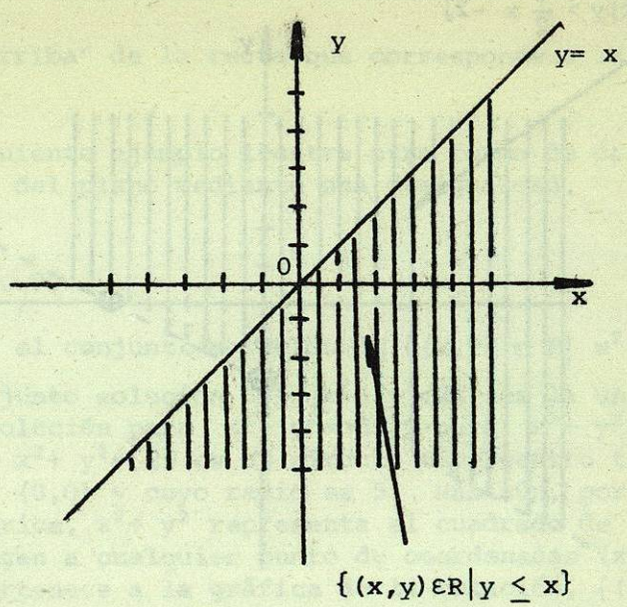


Fig. 6.

Note que la gráfica de $y \leq x$ es un *semiplano cerrado*. La recta llena límite indica que la recta pertenece al conjunto.

Ejemplo 6.

Grafica el conjunto solución de: $\{(x,y) \in R \mid y > \frac{1}{2}x-2\}$ Un par ordenado (a,b) es un elemento del conjunto solución de $y > 1/2\ x - 2$ si y solo sí $b > 1/2\ a - 2$. Por tanto, (a,b) no es una solución si,

$$b = \frac{1}{2}a - 2 \qquad ó \qquad b < \frac{1}{2}a - 2$$

¿Cuáles de los pares ordenados (4,5), (6,1), (-2,4), (-2,-4) son soluciones de $\{(x,y) \in R \mid y > 1/2\ x - 2\}$? La gráfica de $y > 1/2\ x - 2$ es un semiplano. ¿Está la gráfica del semiplano "arriba" o "abajo" de la recta que es la gráfica de $y = 1/2\ x - 2$? Vea la figura 7.



CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

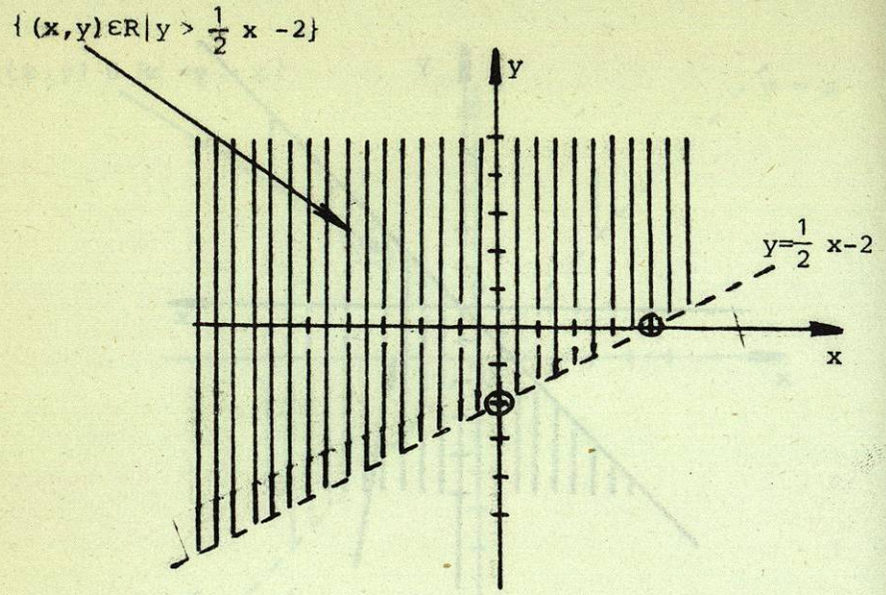


Fig. 7.

Como usted habrá supuesto probablemente, la gráfica de cualquier proposición abierta de la forma, $\{(x,y) \in R \mid Ax+By > C\}$, en que A y B son ambas diferentes de cero, es un semiplano cuyo límite es la recta que corresponde a la gráfica de la ecuación $Ax + By = C$.

Así, para obtener la gráfica de cualquier caso de $\{(x,y) \in R \mid Ax + By > C\}$, primero encontramos la recta que corresponde a la gráfica de $Ax + By = C$. El único problema restante es elegir el semiplano correcto. Esto puede hacerse escribiendo la desigualdad $Ax + By > C$ en una forma equivalente, llamada la forma "y" de la desigualdad, donde "y" se deja sola en un miembro de la desigualdad.

Por ejemplo, suponga que deseamos obtener la gráfica de la relación $\{(x,y) \in R \mid 2x + y > 1\}$. La forma "y" de esta desigualdad es $y > -2x + 1$.

Ahora se ve fácilmente que la gráfica deseada es el semi



CAPILLA ALFONSINA

plano de "arriba" de la recta que corresponde a la gráfica de $y = -2x + 1$.

El siguiente ejemplo ilustra otra forma de describir un subconjunto del plano mediante una desigualdad.

Ejemplo 7.

Hallar el conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid x^2 + y^2 \leq 25\}$

El conjunto solución para $x^2 + y^2 \leq 25$ es la unión de los conjuntos solución para $x^2 + y^2 = 25$ y para $x^2 + y^2 < 25$. La gráfica de $x^2 + y^2 = 25$ es un círculo cuyo centro tiene por coordenadas (0,0) y cuyo radio es 5. Más aún, por la relación pitagórica, $x^2 + y^2$ representa el cuadrado de la distancia del origen a cualquier punto de coordenadas (x,y); así, un punto pertenece a la gráfica de la relación, $\{(x,y) \in R \mid x^2 + y^2 < 25\}$ si y solo sí queda dentro de la gráfica del círculo $x^2 + y^2 = 25$. Concluímos que la gráfica del conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid x^2 + y^2 \leq 25$ está dada por el área sombreada de la fig. 8, incluyendo el límite.

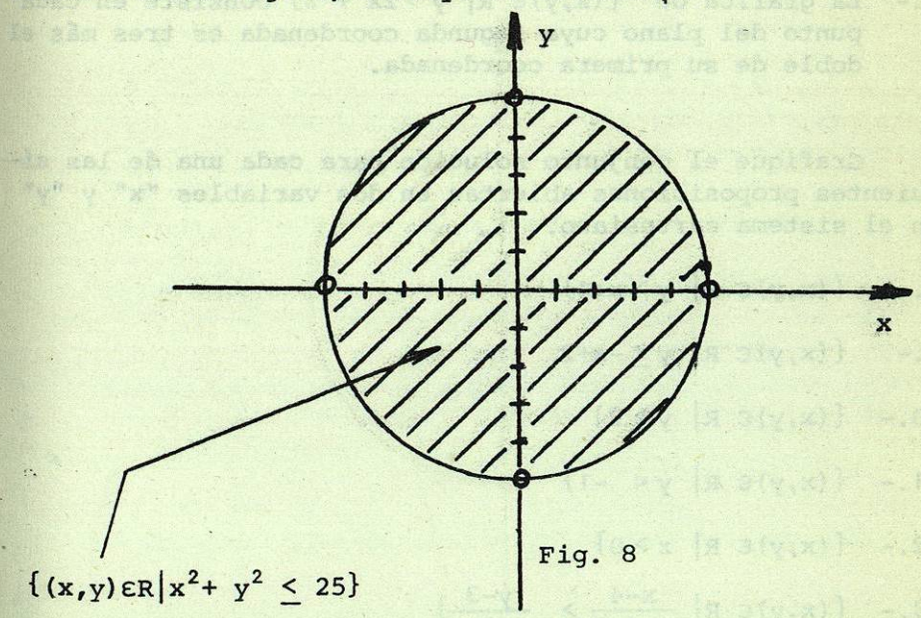


Fig. 8

AUTOEVALUACIÓN 3.

Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas.

1.- La gráfica del conjunto solución $\{(x,y) \in R | y > x-3\}$ es un semiplano cerrado.

2.- La desigualdad anterior define una relación.

3.- La desigualdad $\{(x,y) \in R | y < x+2\}$ define una función.

4.- La forma "y" de $2x - y < 1$ es $y > 2x - 1$.

5.- La intersección de las gráficas $\{(x,y) \in R | y > x\}$ y de $\{(x,y) \in R | y < x\}$ es el conjunto vacío.

6.- La gráfica $\{(x,y) \in R | y > 3x-2\}$ es el semiplano de "abajo" de la recta correspondiente a la gráfica de $y = 3x - 2$.

7.- La gráfica de $\{(x,y) \in R | y > 2x + 3\}$ consiste en cada punto del plano cuya segunda coordenada es tres más el doble de su primera coordenada.

Grafique el conjunto solución para cada una de las siguientes proposiciones abiertas en dos variables "x" y "y" en el sistema cartesiano.

8.- $\{(x,y) \in R | y > x+1\}$

9.- $\{(x,y) \in R | y \leq -x+2$

10.- $\{(x,y) \in R | y \geq 2\}$

11.- $\{(x,y) \in R | y < -1\}$

12.- $\{(x,y) \in R | x > 0\}$

13.- $\{(x,y) \in R | \frac{x-4}{4} > \frac{y-3}{2}\}$



CAPILLA ALFONSINA
BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

14.- $\{(x,y) \in R | x^2 + y^2 \leq 16\}$

15.- $\{(x,y) \in R | 2x + 2y < 9\}$

## AUTOEVALUACIÓN DE LA LECCIÓN 1.

Resuelva las siguientes desigualdades:

1.- $\{x \in R \mid 4x > 12\}$

0) $\{x \in R \mid x > 4\}$ 1) $\{x \in R \mid x < 3\}$
2) $\{x \in R \mid x > 3\}$ 3) $\{x \in R \mid x < 4\}$
4) $\{x \in R \mid x = 3\}$

2.- $\{x \in R \mid 2x - 4 < 6\}$

0) $\{x \in R \mid x < 5\}$ 1) $\{x \in R \mid x < 3\}$
2) $\{x \in R \mid x < 2\}$ 3) $\{x \in R \mid x < 6\}$
4) $\{x \in R \mid x = 3\}$

3.- $\{x \in R \mid 5x - 1 \geq 3x + 7\}$

0) $\{x \in R \mid x \geq 2\}$ 1) $\{x \in R \mid x \geq 3\}$
2) $\{x \in R \mid x \geq 1\}$ 3) $\{x \in R \mid x \geq 5\}$
4) $\{x \in R \mid x \geq 4\}$

4.- $\{x \in R \mid 6x + 3 < x - 9\}$

0) $\{x \in R \mid x < -5/12\}$ 1) $\{x \in R \mid x < -12/5\}$
2) $\{x \in R \mid x < 5/12\}$ 3) $\{x \in R \mid x < 5\}$
4) $\{x \in R \mid x < 3\}$

5.- $\{x \in R \mid 5x - 7 \leq 3x + 2\}$

0) $\{x \in R \mid x \leq 9/2\}$ 1) $\{x \in R \mid x \leq 2/9\}$
2) $\{x \in R \mid x \leq -2/9\}$ 3) $\{x \in R \mid x \leq -9/2\}$
4) $\{x \in R \mid x < 2\}$

6.- Si $b \in R$, demuestre que $b < 0$ si y solo sí $-b > 0$.

7.- Demuestre que $b > 0$ si y solo sí $-b < 0$.

8.- Demuestre que $a > b$ si y solo sí $a-b > 0$.



CAPILLA ALFONSINA BIBLIOTECA

9.- Si $a > b$ y $c > 0$ muestre que $a/c > b/c$.

Diga si las siguientes proposiciones son falsas o verdaderas.

10.- La gráfica del conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y \leq x+2\}$ es un semiplano.

11.- La forma "y" de $x+y < 3$ es $y < 3-x$.

12.- La gráfica del conjunto solución de $\{(x,y) \in R \mid y \geq 1/2\ x-5\}$ es la intersección de las gráficas de los conjuntos solución de $\{(x,y) \in R \mid y = 1/2\ x - 5\}$ y de $\{(x,y) \in R \mid y > 1/2\ x - 5\}$

13.- La unión de las gráficas de $\{(x,y) \in R \mid y > x\}$ y de $\{(x,y) \in R \mid y < x\}$ es todo el plano

14.- La gráfica de $\{(x,y) \in R \mid Ax + By < C\}$ puede obtenerse graficando $\{(x,y) \in R \mid Ax + By = C\}$, una recta que determina dos semiplanos y luego decidiendo cuál de los dos es el semiplano correcto.

15.- $\{(x,y) \in R \mid -y > 2x+2\} = \{(x,y) \in R \mid y < -2x-2\}$

16.- $\{(x,y) \in R \mid y > 5\} = \{(x,y) \in R \mid 1/y > 1/5\}$

Grafique en un sistema cartesiano las relaciones siguientes:

17.- $\{(x,y) \in R \mid -y > 2x + 2\}$

18.- $\{(x,y) \in R \mid 3x + 2y < 2\}$

19.- $\{(x,y) \in R \mid 3x - 2y < 2\}$