1

Inducción Matemática y El Teorema del Binomio

CAPITULO 1

INDUCCION MATEMATICA Y EL TEOREMA DEL BINOMIO

deductivo gral part
inductivo part a gral
Mat. deductiva
con rigor deductiva
en el hacer IND

1.1 INTRODUCCION

Hay ciencias racionales que nos dan verdades de razón y ciencias que nos dan verdades de hecho.

El razonamiento deductivo que procede de lo general a lo particular, se ubica en las ciencias que nos dan verdades de razón, a las cuales pertenece la matemática; el razonamiento que va de lo particular a lo general es el inductivo, usado en las ciencias que nos dan verdades de hecho, como la física.

La matemática es una ciencia conceptual deductiva, donde la base del pensar lo constituyen la definición y la demostración y tiene por método para sistematizar las verdades, el deductivo. ¿ Porqué entonces inducción matemática o inducción completa? ¿ Acaso un adjetivo modifica el proceso de razonamiento?

Se dice que: " la matemática presentada con rigor, es una ciencia deductiva, pero la matemática en el hacer es una ciencia experimental inductiva, ya que muchos resultados matemáticos fueron encontrados por inducción primeramente y probados más tarde ".

" La naturaleza de la inducción matemática es deductiva ya que se puede probar ".

Se puede inferir que todo jucio racional lógico opera por análisis y por síntesis formulando deducciones y aún en la matemática pura es preciso la intuición para que el pensamiento progrese.

1.2 INDUCCION MATEMATICA

El método de inducción matemática o completa podría llamarse " Prueba de n a (n + 1) o simplemente pasar al siguente entero."

Ilustramos el método con el siguiente ejemplo.

En una práctica ecuestre hay un número indefinido del mismo tipo de obstáculo. Se quiere demostrar que el competidor puede salvar hasta un obstáculo determinado cualquiera. Es necesario conocer dos hechos para hacerlo: i) puede salvar el primer obstáculo ii) Si ha salvado un número cualquiera de obstáculos, puede salvar el siguiente.

De i) se sabe que puede salvar el primer obstáculo; de esto y de ii) se sabe que puede salvar el segundo obstáculo, nuevamente de esto y de ii) se sabe que puede salvar el tercer obstáculo y así sucesivamente.

La inducción matemática es usada solamente para probar teoremas relacionados con los números enteros positivos, por ser el conjunto de los números naturales un conjunto que contiene el número 1 y es cerrado con respecto a la adición de 1, lo cual significa que si $1 \in N$, entonces $1 + 1 = 2$, $2 \in N$; $2 + 1 = 3$, $3 \in N$; y así si $n \in N$ entonces $(n + 1) \in N$.

Haremos algunas consideraciones de interés con los números enteros positivos, necesarias para manejar los ejemplos de inducción matemática. Usaremos la siguiente nomenclatura.

N = { números naturales o enteros positivos }

P = { números pares }

I = { números impares }

Si cualquier número natural n, se multiplica por 2, entonces 2n pertenece a los números pares, así si $3 \in N$, entonces $3(2) \in P$ o sea $6 \in P$.

Si restamos la unidad a un número par, lo convertimos en impar, por lo tanto la expresión de un número impar es $2n - 1$, para toda n que pertenezca a los naturales. Así si $5 \in N$, entonces $2(5) - 1 \in I$ o sea $9 \in I$.

Los números pares e impares consecutivos difieren en dos unidades del anterior, por tanto los pares consecutivos son

$$2n,\ 2n + 2,\ 2n + 4,\ 2n + 6, \ldots$$

y los impares consecutivos son:

$$2n - 1,\ 2n + 1,\ 2n + 3,\ 2n + 5, \ldots$$

El enunciado formal del teorema de inducción matemática se dá a continuación.

1.2.1 PRINCIPIO DE INDUCCION MATEMATICA

Si asociamos a cada entero positivo n una proposición P (n), con la propiedad de que P (n) sea cierta o falsa pero no ambas, para cada $n \in N$, si P (n) es verdadera y P(n + 1) también lo es, entonces P (n) será verdadera para todo entero positivo n.

Ejemplo 1

Demostrar por inducción matemática que la suma de los primeros n números naturales es igual a $\frac{n}{2}(n + 1)$. Lo cual se expresa por la igualdad

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Demostración:

1o. Verificamos la igualdad para un número pequeño de sumandos

$$\text{Si } n = 3 \implies 1 + 2 + 3 = \frac{3(3+1)}{2}$$

$$6 = \frac{3(4)}{2}$$

$$6 \equiv 6$$

2o. Si la igualdad se cumple para n debe cumplirse para n+ 1, por lo tanto si sumamos n+ 1 a los dos miembros de la igualdad, obtenemos

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1)$$

Despejando (n + 1) del primer miembro, tenemos

$$n + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) - (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$n + 1 = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) - \frac{n(n + 1)}{2}$$

$$n + 1 \equiv n + 1$$

La igualdad queda demostrada si llegamos a una identidad.

Ejemplo 2

Demostrar por inducción matemática que:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Demostración:

1o. Verificamos para n = 1 y n = 4

Si n = 1

$$\frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \equiv \frac{1}{2}$$

Si n = 4

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} = 1 - \frac{1}{2^4}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{16 - 1}{16} = \frac{15}{16}$$

$$\frac{15}{16} \equiv \frac{15}{16}$$

2o. Si la proposición es verdadera para n debe cumplirse para n+ 1 por lo tanto sustituimos n por n+ 1 en los dos miembros de la igualdad por demostrar y obtenemos

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

Despejando $\frac{1}{2^{n+1}}$ del primer miembro, tenemos

$$\frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}} - 1 + \frac{1}{2^n}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2}\right) \qquad 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$$

$$\frac{1}{2^{n+1}} \equiv \frac{1}{2^{n+1}} \qquad 1 - \frac{1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ejemplo 3

Usar el principio de inducción matemática para demostrar que:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$$

lo cual se expresa diciendo que: La suma de los cubos de n números, es igual al cuadrado de la suma de ellos mismos.

Demostración:

1o. Verificamos para $n = 4$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 = (1 + 2 + 3 + 4)^2$$

$$1 + 8 + 27 + 64 = 10^2$$

$$100 \equiv 100$$

Del ejemplo 1 sabemos que:

$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, entonces la igualdad primera se escribe como:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

2o. Si la proposición es cierta para **n** debe serlo para $n + 1$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2$$

Despejando $(n+1)^3$ del primer miembro tenemos:

$$(n + 1)^3 = \left[\frac{(n+1)\,(n+2)}{2}\right]^2 - \left[\frac{n\,(n+1)}{2}\right]^2$$

Sacando factor común en el segundo miembro, escribimos

$$(n + 1)^3 = \left(\frac{n + 1}{2}\right)^2 \left[(n + 2)^2 - n^2\right]$$

$$(n + 1)^3 = \frac{(n + 1)^2}{4} \left[4\,(n + 1)\right]$$

$$(n + 1)^3 = (n+ 1)^2 \; (n + 1)$$

$$(n + 1)^3 \equiv (n+1)^3$$

EJERCICIO 1.1

1. ¿Cuál es la diferencia entre el razonamiento **deductivo** y el **inductivo**?
2. ¿Cuáles son los elementos que constituyen la base del pensamiento matemático?
3. Completa el siguiente párrafo.
   "La matemática **presentada con rigor** es una ciencia ________, pero la matemática **en el hacer** es una ciencia experimental ____________."
4. ¿En que consiste el método de inducción matemática?
5. Enunciar el principio de inducción matemática.
6. ¿Qué tipo de números reales se usan en el método de inducción matemática.
7. ¿Como se expresa un número par y uno impar en función de **n** si $n \in N$? 2n, 2n-1
8. ¿Pertenecen a los naturales los números pares e impares?
9. Identifica los siguientes conjuntos

$\{1, 2, 3, \ldots\}$ N

$\{2n, 2n+2, 2n+4, \ldots\}$, $n \in N$ P

$\{2n-1, 2n+1, 2n+3, \ldots\}$, $n \in N$ I

Por el método de inducción matemática demuestre la veracidad de las proposiciones siguientes:

10. $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n\,(n + 1)$ ✓

11. $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2$ ✓

$2n+1 = 2n+1$

12. $5 + 10 + 15 + \cdots + 5n = \dfrac{5n}{2}\,(n + 1)$

13. $4 + 8 + 12 + \cdots + 4n = 2n\,(n + 1)$

14. $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}$

15. $1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \cdots + n^4 =$

$$\frac{n\,(n+1)\,(6n^3 + 9n^2 + n - 1)}{30}$$

1.3 TEOREMA DEL BINOMIO

Potencias de binomios. Si recordamos los desarrollos del cuadrado y el cubo de un binomio, dados en productos notables y obtenemos por multiplicación algebraica los desarrollos de potencias mayores cuyos exponentes sean números naturales, tenemos:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$$

Estos desarrollos nos sugieren un modelo con las siguientes características.

Primera: El número de términos de cada desarrollo, es una unidad mayor que la potencia del binomio.

Segunda: El grado de cada uno de los términos del desarrollo, coincide con el grado del término.

Tercera: El primer término del desarrollo, es el primer término del binomio elevado a una potencia igual a la del binomio, su coeficiente es unitario.

Cuarta: El exponente de "a" en cualquier término que no sea el primero, es una unidad menor que el exponente de "a" en el término anterior.

Quinta: El coeficiente de cualquier término del desarrollo, exceptuando el primero, se obtiene multiplicando el coeficiente del término anterior por el exponente de "a" y dividiéndolo entre el orden de ese término anterior.

Sexta: El exponente de b en cualquier término es una unidad mayor que el exponente de b en el término anterior.

Séptima: Si los términos del binomio tienen signos iguales, entonces todos los términos del desarrollo son positivos y si los términos del binomio son diferentes, entonces los términos del desarrollo tienen signos alternados.

Octava: Los coeficientes del primero y último términos son iguales, lo mismo sucede con los coeficientes de los términos segundo y penúltimo, tercero y antepenúltimo y así sucesivamente. Cuando el número de términos del desarrollo es impar, hay un término central sin pareja.

Ejemplo 1

Desarrollar $(x+y)^6$

Solución:

Cálculo del coeficiente	1	$\frac{1\times 6}{1}$	$\frac{6\times 5}{2}$	$\frac{15\times 4}{3}$	$\frac{20\times 3}{4}$	$\frac{15\times 2}{5}$	$\frac{6\times 1}{6}$
$(x+y)^6 =$	x^6	$+\ 6x^5y$	$+\ 15x^4y^2$	$+\ 20x^3y^3$	$+\ 15x^2y^4$	$+\ 6xy^5$	$+\ y^6$
Término número	1	2	3	4	5	6	7

Ejemplo 2

Obtener el desarrollo de $(1-a^2)^5$

Solución:

$$(1-a^2)^5 = (1)^5 + 5(1)^4(-a^2) + 10(1)^3(-a^2)^2 + 10(1)^2(-a^2)^3 + 5(1)(-a^2)^4 + (-a^2)^5$$

$$(1-a^2)^5 = 1 - 5a^2 + 10a^4 - 10a^6 + 5a^8 - a^{10}$$

Ejemplo 3

Obtener el desarrollo de $(2x-y)^4$

Solución:

Cálculo del coeficiente	1	$\frac{1\times 4}{1}$	$\frac{4\times 3}{2}$	$\frac{6\times 2}{3}$	$\frac{4\times 1}{4}$
$(2x-y)^4 =$	$(2x)^4$	$+\ 4(2x)^3(-y)$	$+\ 6(2x)^2(-y)^2$	$+\ 4(2x)(-y)^3$	$+\ (2x)^0(-y)^4$
Orden del término	1o.	2o.	3o.	4o.	5o.

$$(2x-y)^4 = 16x^4 - 32x^3y + 24x^2y^2 - 8xy^3 + y^4$$

Con lo expuesto anteriormente se establece el desarrollo de la potencia enésima de un binomio, conocida como: **"Teorema del Binomio"** siendo **n** un número natural.

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^{n-4}b^4 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots[n-(r-2)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots(r-1)}a^{n-(r-1)}b^{r-1} + \cdots + b^n$$

En este desarrollo, el témino que contiene la letra r se conoce como el r-simo término y sus elementos se obtienen si observamos la relación que guardan los elementos de cada término del desarrollo con el **orden del término**.

Se observa que:

a) El exponente de **b** en cada uno de los término del desarrollo es una unidad menor que el orden del término, por lo tanto en el r-simo término el exponente de la **b** se escribe como (r — 1) ya que **r** es el orden del témino.

b) El exponente de **a** en cada uno de los términos es **n** disminuída en un número, el cual también es una unidad menor que el orden del término, en consecuencia el exponente de la **a** es $n-(r-1)$ que se puede escribir como $n-r+1$

c) El coeficiente de cada uno de los términos del desarrollo está formado por una fracción, la cual contiene verios factores en el numerador y en denominador. El último factor del numerador es la **n** disminuída en un número el cual es dos unidades menor que el orden del término, entonces este último factor del numerador es $n-(r-2)$ $= n-r+2$ y el último factor del denominador es un número el cual es una unidad menor que el orden del término, o sea (r — 1)

Para escribir el denominador del r—simo término en forma más simple, se utiliza la **notación factorial** que explicaremos enseguida.

Definición.- La escritura abreviada de los productos de números positivos consecutivos, recibe el nombre de **factorial**.

La notación del factorial es el signo que cierra una admiración (!) y se lee "factorial".

$$\text{Si } n \in N \implies n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdots n$$

como la multiplicación es conmutativa, se puede escribir

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

$$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120$$

$$6! = 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 1 = 720$$

$$7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5040$$

Por definición $0! = 1$

Definición que se explica con la siguiente exposición.

$$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 4\cdot 3!$$

$$3! = 3\cdot 2\cdot 1 = 3\cdot 2!$$

$$2! = 2\cdot 1 = 2\cdot 1!$$

$$1! = 1 = 1\cdot 0!$$

Despejando 0! de la última igualdad, tenemos $0! = 1$

Volviendo al r—simo término del desarrollo de la teoría del binomio y aplicando el concepto de factorial al denominador del coeficiente, escribimos

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(r-2)]}{(r-1)!}\,a^{n-(r-1)}b^{r-1}$$

La expresión del r — simo término, permite obtener un término cualquiera del desarrollo de la potencia de un binomio sin el desarrollo completo.

Ejemplo 1

Encontrar el quinto término del desarrollo de $(a+b)^{10}$

Solución:

$$r-\text{simo término} = \frac{n(n-1)\cdot\cdot\cdot[n-(r-2)]}{(r-1)!}\,a^{n-(r-1)}\,b^{r-1}$$

Con $n = 10$ y $r = 5$ calculamos los elementos

$n-(r-2) = 10-(5-2) = 10-(3) = 7$

$(r-1)! = (5-1)! = 4!$

$n-(r-1) = 10-(5-1) = 10-4 = 6$

$r-1 = 5-1 = 4$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del r—simo término, tenemos.

$$5\text{o. término} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\,a^6\,b^4$$

Simplificamos la fracción obtenemos

$$5\text{o. término} = \frac{10\cdot \overset{3}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}\,a^6\,b^4$$

$5\text{o. término} = 10(3)(7)\,a^6\,b^4 = 210\,a^6\,b^4$

Ejemplo 2

Encontrar el séptimo término del desarrollo de $(x-2y)^{12}$

Solución:

$$r-\text{simo término} = \frac{n(n-1)\cdot\cdot\cdot[n-(r-2)]}{(r-1)!}\,a^{n-(r-1)}\,b^{r-1}$$

Con $n = 12$ y $r = 7$ calculamos

$n-(r-2) = 12-5 = 7$

$(r-1)! = 6!$

$n-(r-1) = 12-6 = 6$

$r-1 = 6$

Sustituyendo estos valores en la fórmula del r—simo término, tenemos

$$\text{Séptimo término} = \frac{\overset{2}{\cancel{12}}\cdot 11\cdot \overset{3}{\cancel{10}}\cdot \overset{2}{\cancel{9}}\cdot \cancel{8}\cdot 7}{\cancel{6}\cdot \cancel{5}\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot 1}\,x^6\,(-2y)^6$$

$7\text{o. término} = 11\,(2)\,(3)\,(2)\,(7)\,x^6\,64\,y^6$

$7\text{o. término} = 59{,}136\;x^6y^6$

Ejercicio 1.2

Desarrollar la potencia indicada en cada binomio y expresar el resultado en la forma más simple.

1.	$(c+d)^4$	2.	$(x-y)^7$
3.	$(m-1)^6$	4.	$(1+y)^8$
5.	$(r+s)^9$	6.	$(w-z)^{10}$
7.	$(2x-y)^5$	8.	$(1+3a)^6$
9.	$(y^2-3)^3$	10.	$(1-b^2)^7$
11.	$(a^2+b^2)^9$	12.	$(x^2-1)^{11}$
13.	$(2a+3b)^6$	14.	$(a-2b)^5$
15.	$(\frac{c}{d}-1)^5$	16.	$(2-\frac{x}{y})^8$

17. Obtener los factoriales de los primeros 10 números naturales.

18. Simplificar las expresiones siguientes:

a) $\frac{10!}{5!}$ b) $\frac{7!}{(4-1)!}$ c) $\frac{n!}{(n-4)!}$

Obtener el término indicado de cada uno de los binomios sin el desarrollo completo.

19. 5o. término de $(w + z)^7$

20. 6o. término de $(2x - 1)^8$

21. 7o. término de $(s - t)^{10}$

22. 8o. término de $(1 - y^2)^{13}$

23. 9o. término de $(3a - 2b)^{12}$

24. 10o. término de $\left(\frac{a}{b} + 1\right)^{11}$

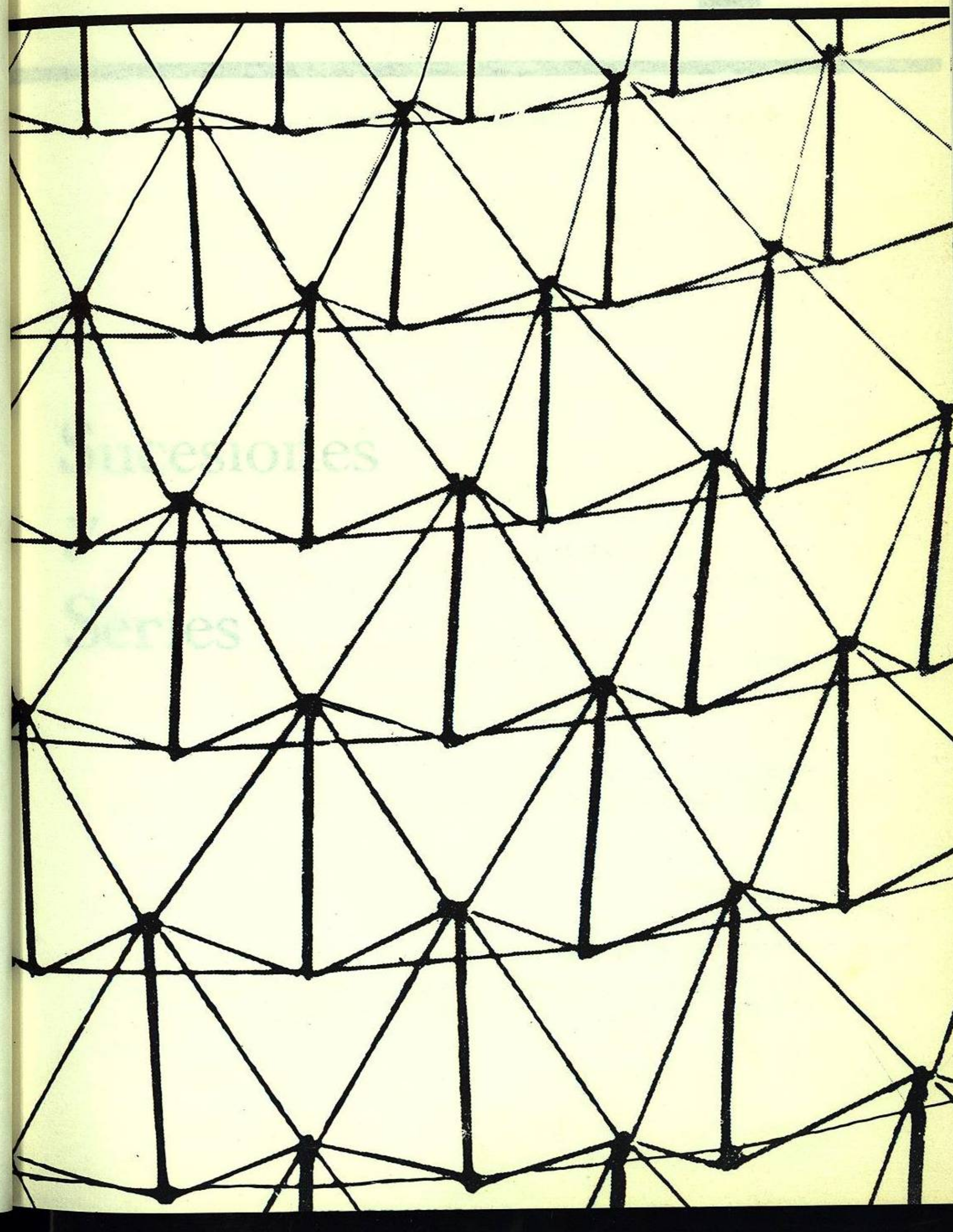
25. 11o. término de $(1 + w)^{14}$

26. ¿A qué es igual 0! ? = 1

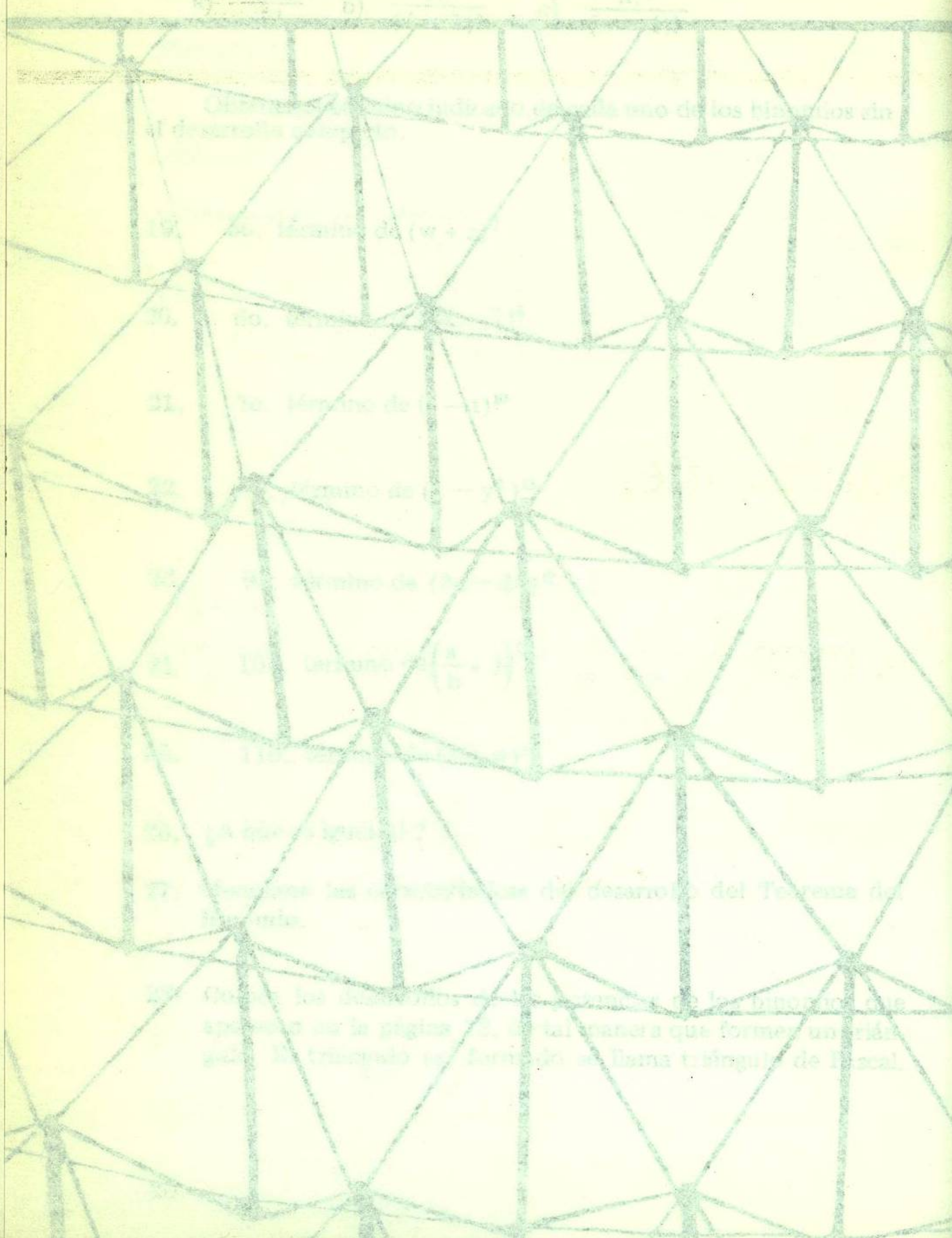
27. Menciona las características del desarrollo del **Teorema del Binomio.**

28. Coloca los desarrollos de las potencias de los binomios que aparecen en la página 13, de tal manera que formen un triángulo. El triángulo así formado se llama triángulo de Pascal.

CAPITULO 2



Sucesiones y Series



2

Sucesiones y Series