CAPITULO 2

SUCESIONES Y SERIES

2.1 INTRODUCCION

Quizá alguna vez al observar el rebote de una pelota que cae de una altura determinada y continúa cayendo y rebotando en la misma forma, nos hayamos preguntado ¿ Qué distancia recorrerá en los continuos rebotes antes de quedar en reposo?

O bién al tener un número decimal periódico que no termina como 0.181818 . . . nos preguntemos ¿ Cuáles son los números enteros cuyo cociente reproduce ese número ?

La respuesta a estas y otras muchas preguntas las tenemos al aplicar los conceptos correspondientes de sucesiones y series.

2.2 SUCESIONES

Definición. Una sucesión es un conjunto de parejas ordenadas de la forma $\{(n, f(n)\}$ donde $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$ y $f(n)$ es el valor de la función para cada número entero positivo. Cada $f(n)$ es un término de la sucesión.

Definición Alternativa. Una sucesión es el recorrido de una función, cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los números naturales.

Siendo el conjunto de los números naturales un conjunto infinito, infinita es la sucesión que lo tiene como dominio y finita si el dominio es parte de él. O bien, las sucesiones pueden ser finitas o infinitas atendiendo al número de términos que contienen. Es finita cuando el número de términos termina y se pueden contar, e infinita si el número de términos no termina y en consecuencia no se pueden contar.

Si en una función $y = f(x)$ damos a la variable independiente "x" valores enteros y calculamos los correspondientes valores de la función, el conjunto de estos valores forman una sucesión y cada uno de ellos es un término de la misma.

Generalmente a la variable independiente "x" se le designa por la letra "n".

La función evaluada en "n" se llama "ley de desarrollo" de la sucesión, y se encierra entre paréntesis de llave, notación que representa una sucesión.

Para encontrar los términos de una sucesión dada en la forma $f(n)$, se calcula el valor numérico de la expresión para los diferentes números enteros positivos.

Ejemplo 1

Dada $f(n) = 2n - 1$, donde $n \in N$

Obtener la sucesión correspondiente

Solución:

Sabiendo que $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, calculamos los valores de f(n) y tenemos

$f(1) = 2(1) - 1 = 2 - 1 = 1$

$f(2) = 2(2) - 1 = 4 - 1 = 3$

$f(3) = 2(3) - 1 = 6 - 1 = 5$

$f(4) = 2(4) - 1 = 8 - 1 = 7$

$f(5) = 2(5) - 1 = 10 - 1 = 9$

y así sucesivamente.

Si escribimos los valores de la función en fila separados por una coma, tenemos 1, 3, 5, 7, 9, . . . siendo ésta una sucesión infinita, por ser infinito el número de términos.

La gráfica de una sucesión la forman un conjunto de puntos aislados en el plano cartesiano bidimensional.

La figura 2.1 muestra la gráfica de la sucesión 1, 3, 5, 7, 9, . . . que escrita como conjunto de pares ordenados es

$$\{(1, 1), (2, 3), (3, 5), (4, 7), (5, 9), \ldots\}$$

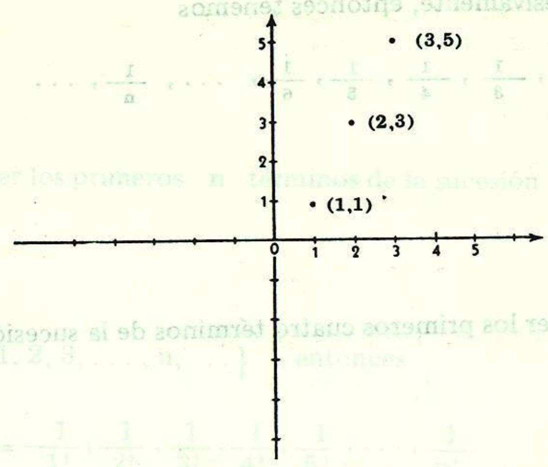


Fig. 2.1

Observamos en esta figura que los puntos están alineados y son puntos aislados de la recta correspondiente a la función $y = 2x - 1$.

Ejemplo 2

Obtener la sucesión representada por la función $f(n) = \frac{1}{n}$, si $n \in N$

Solución:

Calculamos los valores de f(n) para $n \in \{1,2,3,\ldots\}$ que forma el dominio de toda sucesión.

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

$$f(1) = \frac{1}{1} = 1$$

$$f(2) = \frac{1}{2}$$

$$f(3) = \frac{1}{3}$$

$$f(4) = \frac{1}{4}$$

$$f(5) = \frac{1}{5}$$

y así sucesivamente, entonces tenemos

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

Ejemplo 3

Obtener los primeros cuatro términos de la sucesión $\left\{ \frac{n}{n+1} \right\}$

Solución :

Calculando el valor numérico de la ley de desarrollo para $n \in \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$, tenemos

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = \frac{1}{1+1}, \frac{2}{2+1}, \frac{3}{3+1}, \frac{4}{4+1}, \ldots$$

$$\left\{ \frac{n}{n+1} \right\} = \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots$$

Ejemplo 4

Dada la sucesión $\{ 2^n \}$, obtener los primeros cinco términos.

Solución:

Sabemos que $n \in N$, entonces

$$\{ 2^n \} = 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, \ldots$$

$$\{ 2^n \} = 2, 4, 8, 16, 32, \ldots$$

Ejemplo 5

Obtener los primeros **n** términos de la sucesión $\left\{ \frac{1}{n!} \right\}$

Solución :

$n \in \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}$, entonces

$$\left\{ \frac{1}{n!} \right\} = \frac{1}{1!}, \frac{1}{2!}, \frac{1}{3!}, \frac{1}{4!}, \frac{1}{5!}, \ldots, \frac{1}{n!}$$

$$\left\{ \frac{1}{n!} \right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{24}, \frac{1}{120}, \ldots, \frac{1}{n!}$$

Si la ley de desarrollo de una sucesión es una función lineal, la sucesión se llama **sucesión aritmética**. Ejemplos de sucesiones aritméticas son los siguientes

$$\{2n-1\}\ ,\ \{n\}\ ,\ \{1-n\}$$

Cuando la ley de desarrollo es una función exponencial* , la sucesión se conoce como **geométrica**. Los siguientes son ejemplos de sucesiones geométricas

$$\left\{2^n\right\}\ ,\ \left\{5^{n-1}\right\}\ ,\ \left\{\left(\tfrac{1}{2}\right)^n\right\}$$

Una sucesión es **armónica** si al considerar el inverso multiplicativo de cada uno de sus términos, se obtiene una sucesión aritmética.

Las sucesiones $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\left\{\frac{1}{2n-1}\right\}$, $\left\{\frac{1}{n+2}\right\}$ son ejemplos de sucesiones armónicas.

Una sucesión cualquiera se representa por

$\{a_n\} = a_1\ ,\ a_2,\ a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots$

donde a_n representa la ley de desarrollo.

* Nota.- Si $f(x) = a^x$ donde $a \neq 1$, $a > 0$, $x \in R$ entonces $f(x)$ es una función exponencial.

Ejercicio 2.1

1. ¿ Qué es una sucesión ?

2. ¿ Cuándo una sucesión es finita y cuándo infinita ?

3. ¿ Qué diferencia existe entre la gráfica de una sucesión y la gráfica de una función ?

4. ¿ Que símbolo se usa para representar una sucesión ?

5. En la sucesión $\{a_n\} = a_1\ ,\ a_2\ ,\ a_3\ , \ldots$ ¿ Qué representa a_n ?

6. Escribir la ley de desarrollo de las sucesiones que forman

   a) los números naturales

   b) los números pares

   c) los números impares

7. ¿ Qué característica debe de tener la ley de desarrollo de una sucesión, para que la sucesión sea a) aritmética, b) geométrica, c) armónica?

Escribir los primeros cinco términos de las sucesiones dadas en los problemas del 8 al 19.

8. $\{n\}$ 9. $\{3-n\}$ 10. $\{n-2\}$

11. $\left\{\frac{1}{2}-n\right\}$ 12. $\{3n-2\}$ 13. $\left\{\frac{n}{n-1}\right\}$

14. $\left\{\frac{2}{1-n}\right\}$ 15. $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ 16. $\{3^n\}$

17. $\{4^{n-1}\}$ 18. $\{K^n\}$ 19. $\left\{\frac{1}{2n}\right\}$

Analizar la ley de desarrollo de cada una de las sucesiones de los problemas del 20 al 25 y decir si la sucesión es armónica, geomética o aritmética.

20. $\{4-n\}$ **21.** $\{a^n\}$ g

22. $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ **23.** $\left\{\frac{1}{n-1}\right\}$ a

24. $\left\{\frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ **25.** $\{3n+2\}$ A

Obtener la gráfica de las sucesiones de los problemas del 26 al 31.

26. $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ **27.** $\{2^n\}$ **28.** $\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

29. $\left\{\frac{1}{n!}\right\}$ **30.** $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ **31.** $\{2n\}$

2.3 SERIES

Definición. Serie es la suma de los elementos de una sucesión.

Una serie es infinita cuando el número de sumandos no termina y finita cuando el número de sumandos termina.

Presentamos enseguida tres series infinitas.

$$1+3+5+7+9+11+13+\cdots$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\cdots$$

$$2+4+8+16+32+64+\cdots$$

2

Para representar una serie se usa el símbolo Σ que es la letra griega sigma mayúscula. Enseguida del signo de sumatoria se escribe la ley de desarrollo que corresponde a la ley de desarrollo de la sucesión, en la parte inferior del símbolo sigma se coloca una igualdad que contiene el primer valor de la variable que aparece en la ley de desarrollo y en la parte superior del símbolo se escribe el valor final de la variable. Si la serie es finita, el valor final de la variable es un número real y cuando la serie es infinita se escribe en la parte superior el símbolo ∞. y

Así tenemos

$$\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{n(n+1)},$$

serie finita que se lee como

"sumatoria desde $n = 1$ hasta 10 de $\frac{1}{n(n+1)}$"

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

serie inifinita se lee "sumatoria desde n = 1 hasta infinito de $\left(\frac{1}{2}\right)^n$

En forma general una serie se representa por $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ donde

u_n representa la ley de desarrollo y $n = \{1, 2, 3, 4, \cdots\}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$$

Ejemplo 1

Escribir los seis términos de la serie $\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n}$

$\left(\text{Sumatoria desde n = 1 hasta 6 de } \frac{1}{n}\right)$

Solución:

Sustituyendo los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 sucesivamente donde aprece la "n" tenemos

$$\sum_{n=1}^{6} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$$

Ejemplo 2

Dar los primeros tres sumandos de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2n - 1$

Solución:

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n - 1 = [\,2(1) - 1\,] + [\,2(2) - 1\,] + [\,2\,(3) - 1\,] + \cdots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2n - 1 = 1 + 3 + 5 + \cdots$$

Dependiendo de las características de la ley de desarrollo de las series, éstas se conocen como **aritméticas** si la ley de desarrollo es una **función lineal, geométrica** si la ley de desarrollo es **una función exponencial** y **armónica** si el **inverso multiplicativo** de la ley de desarrollo se convierte en una función lineal.

A continuación presentamos un ejemplo de cada una de estas series.

$\sum_{n=1}^{\infty} 4 - n$, serie aritmética infinita

$\sum_{n=1}^{\infty} (3)^n$, serie geométrica infinita

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, serie armónica infinita

Las siguientes propiedades de la sumatoria tienen amplia aplicación.

i) $\sum_{i=1}^{n} c = cn$ donde c es una constante

ii) $\sum_{i=1}^{n} c\, x_i = c \sum_{i=1}^{n} x_i$

iii) $\sum_{i=1}^{n} x_i \pm y_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \pm \sum_{i=1}^{n} y_i$

Ejercicio 2.2

1. ¿ Qué es una serie ?

2. ¿Qué símbolo se usa para representar una serie ?

3. En la serie $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

   ¿ Qué representa u_n ?

4. ¿Simbólicamente, qué diferencia distingue a las series finitas e infinitas?

Escribe los primeros seis sumandos de las series dadas en los problemas del 5 al 16.

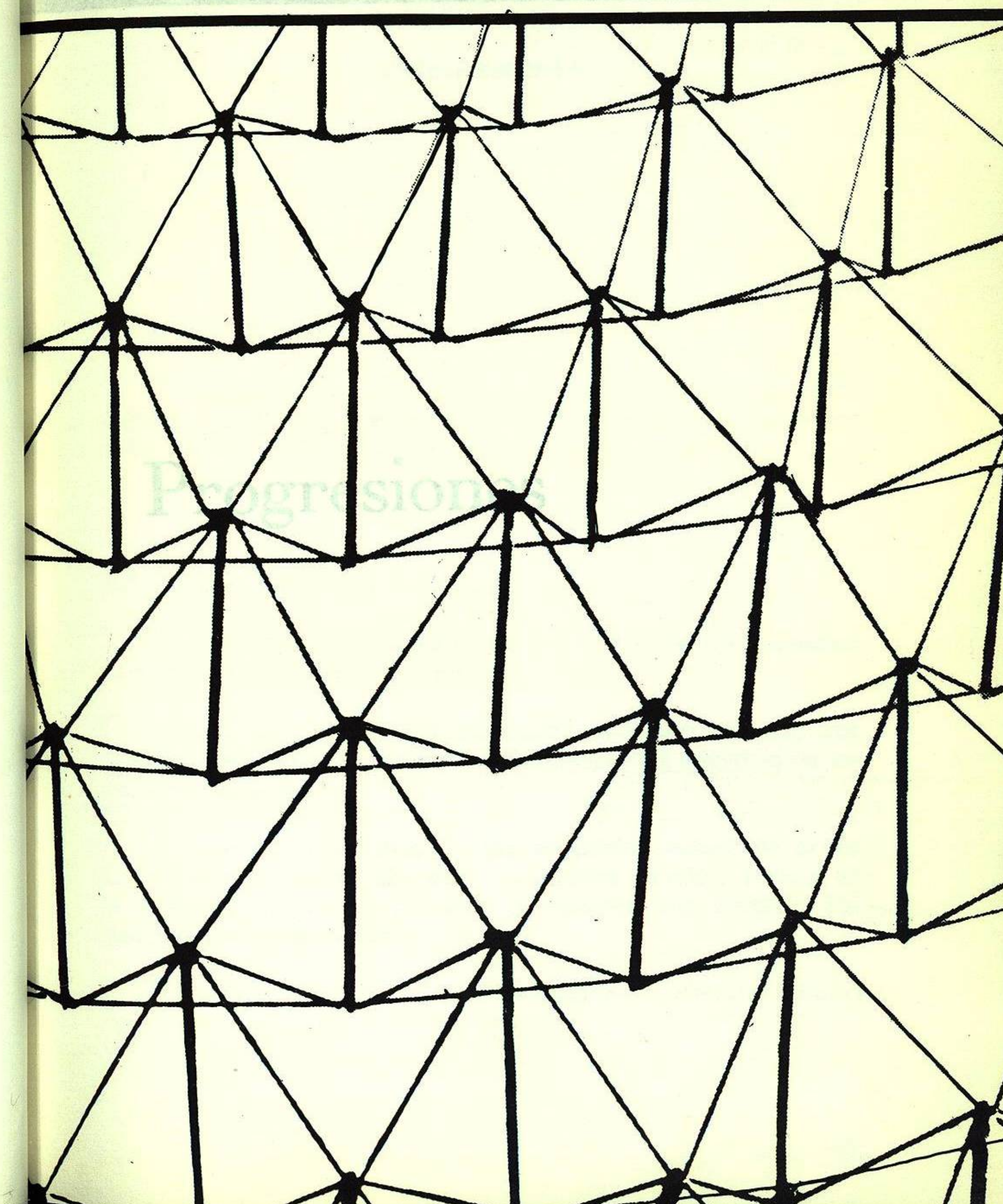
5. $\sum_{n=1}^{\infty} n$ 6. $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$ 7. $\sum_{n=1}^{\infty} 2n-1$

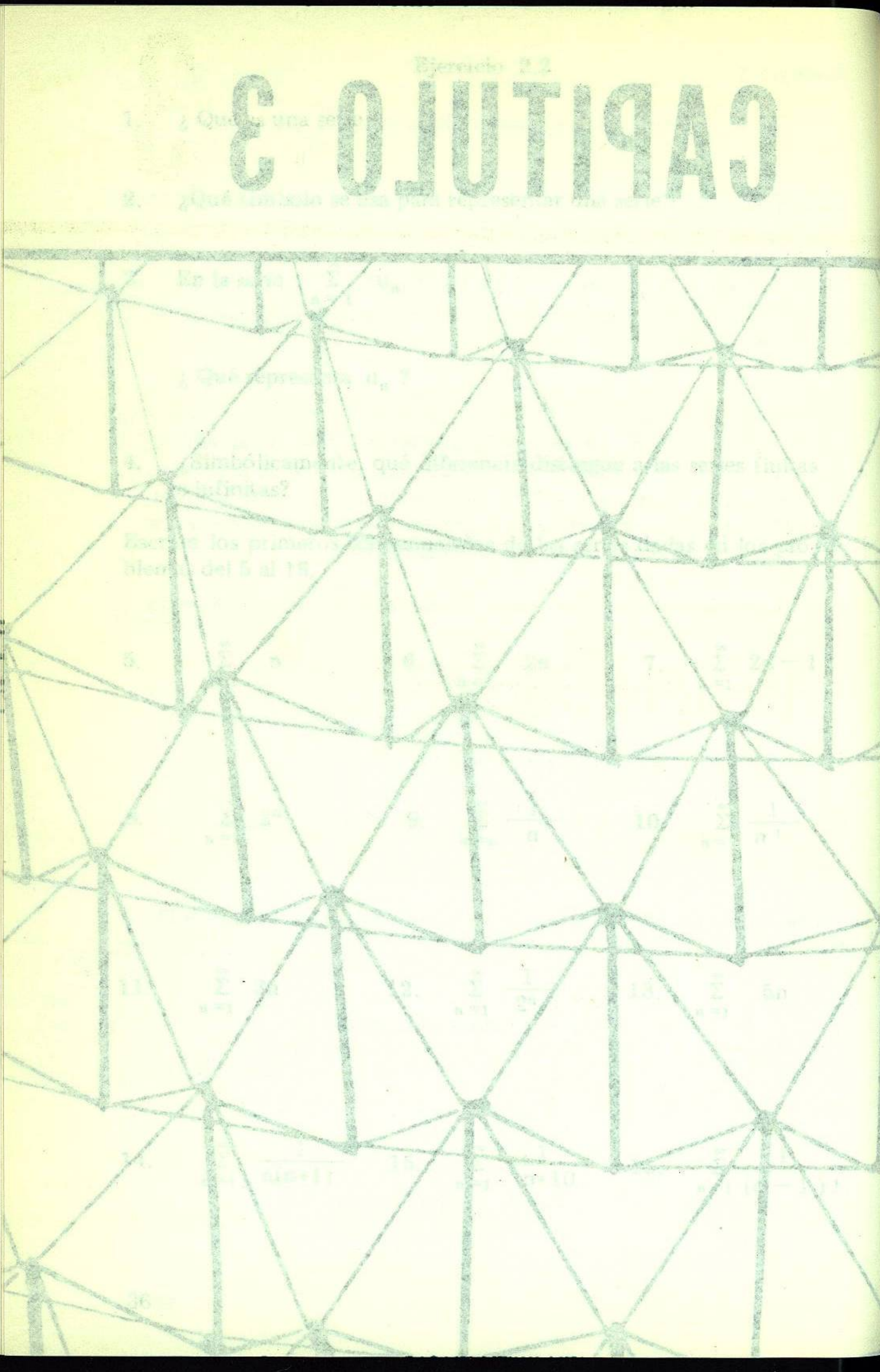
8. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$ 9. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 10. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty} 3n$ 12. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ 13. $\sum_{n=1}^{\infty} 5n$

14. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ 15. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+10}$ 16. $\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!}$

CAPITULO 3





3

Progresiones