CAPITULO 3

PROGRESIONES

3.1 INTRODUCCION

De las sucesiones analizadas en el capítulo anterior revisten especial importancia la sucesión aritmética y la geométrica, conocidas también como progresiones.

3.2 PROGRESION ARITMETICA

Teniendo presente lo que es una sucesión, podemos **formalizar** la definición de progresión aritmética.

Definición. Progresión aritmética es el recorrido de una función lineal, cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los números naturales.

Definición Alternativa. Una progresión **aritmética es un** conjunto de **números** tales **que** cualesquiera de ellos, **después de** el **primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad fija llamada diferencia común.**

La diferencia común se obtiene restando a cualquier término **de la progresión, el término anterior.**

UANL

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Las progresiones siguientes son aritméticas.

3, 7, 11, 15, . . .

1, 2, 3, 4, . . .

5, 10, 15, 20, . . .

La diferencia común de la primera es 4, la de la segunda es 1 y 5 es la diferencia común de la tercera.

Para manejar una progresión aritmética cualquiera, usamos la siguiente nomenclatura.

a_1 = 1er. término

a_n = enésimo o último término

d = diferencia común

n = número de términos

S_n = suma enésima

Utilizando la nomenclatura y la definición alternativa de una progresión aritmética, formamos la siguiente tabla.

Orden del Término	1	2	3	4	. . .	n
Término	a_1	a_1+d	a_1+2d	a_1+3d	. . .	$a_1+(n-1)d$

La expresión del enésimo término se obtiene analizando los sumandos de los términos precedentes, el primer sumando es a_1, el coeficiente del segundo sumando de cada término es una unidad menor que el orden del término, en consecuencia el coeficiente de la diferencia común del enésimo término es una unidad menor que "n", lo cual se escribe (n —1) y la expresión final del enésimo término es $a_n = a_1 + (n-1)\,d$.

La progresión aritmética completa se escribe como

$$a_1\ ,\ a_1 + d\ ,\ a_1 + 2d\ ,\ . . . ,\ [a_1 + (n-1)\,d]$$

Conociendo el 1er. término y la diferencia común, podemos conocer los demás términos. El n- simo término se conoce también como el último término de una progresión finita.

Ejemplo 1

Obtener el veintiavo término de la progresión 3,7,11,15, . . .

Solución:

En esta progresión se tienen como datos $a_1 = 3$ y $n = 20$. Las incógnitas son d y a_n, entonces

$$d = 7 - 3 = 4$$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

Sustituyendo n = 20

$$a_{20} = 3 + (20-1)\,4 = 3 + 19\,(4) = 79$$

El veintiavo término es 79

Ejemplo 2

Obtener la progresión aritmética de ocho términos, si el primero es 4 y el último 39.

Solución:

Se dan $a_1 = 4$, $a_n = 39$, $n = 8$ entonces usndo la fórmula del último término, tenemos

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d$$

$$39 = 4 + (8-1)\,d = 4 + 7d$$

$$d = \frac{39-4}{7} = 5$$

Sumando esta diferencia común al primer término, obtenemos el segundo término y así sucesivamente los demás términos.

4, 9, 14, 19, 24, 29, 34, 39, . . . es la progresión pedida.

Con frecuencia es útil obtener la suma de los términos de una progresión aritmética finita que se expresa por el símbolo S_n (suma enésima) y cuya fórmula se obtiene de la manera siguiente

$$S_n = a_1 + (a_1 + d) + (a_1 + 2d) + \cdots + [\,a_1 + (n-1)\,d\,]$$

$$S_n = [\,a_1 + (n-1)d] + [\,a_1 + (n-2)d\,] + \cdots + (a_1 + d) + a_1$$

$$2S_n = [\,2a_1 + (n-1)d] + [\,2a_1 + (n-1)d] + \cdots + [2a_1 + (n-1)d]$$

$$2S_n = n\,[2a_1 + (n-1)d]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,[\,a_1 + (a_1 + (n-1)d\,)]$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

La descripción de los pasos en la deducción anterior son:

Primero. Se escriben los sumandos en orden natural.

Segundo. Se invierte el orden de los sumandos, observando que el coeficiente de la diferencia común del penúltimo término que no aparece escrito en la primera ecuación es $(n-2)$, el del antepenúltimo es $(n-3)$ y así se sigue hasta escribir a_1 que ocupa el lugar del último término.

Tercero. Se suman miembro a miembro las dos ecuaciones, obteniéndose en cada una de ellas el mismo resultado.

$$a_1 + [a_1 + (n-1)d] = 2a_1 + (n-1)d$$

$$(a_1 + d) + [a_1 + (n-2)d] = 2a_1 + (n-1)d$$

Cuarto. Como hay "n" sumandos iguales, entonces la

$$S_n = n\,[2a_1 + (n-1)\,d\,]$$

Quinto. Se despeja S_n

Sexto. Se sustituye $a_1 + (n-1)\,d$ por a_n en la penúltima igualdad

Una progresión aritmética se conoce si conocemos el primer término, el último término, la diferencia común, el número de términos y la suma enésima. ¡Si de estos cinco elementos se conocen tres, es posible obtener los otros dos resolviendo las ecuaciones apropiadas.

Ejemplo 3

Una progresión aritmética tiene 25 términos, siendo el primero igual a la unidad y dos la diferencia común. Obtener el último término y la suma de ellos.

Solución:

Como datos tenemos $n = 25$, $a_1 = 1$ y $d = 2$ siendo los elementos desconocidos a_n y S_n

Las fórmulas para el último término y la suma enésima son conocidas

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$S_n = \frac{n}{2}\,(a_1 + a_n)$$

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Sustituyendo los valores conocidos en estas fórmulas, tenemos

$$a_{25} = 1 + (25-1)\,2 = 49$$

$$S_{25} = \frac{25}{2}(1 + 49) = \frac{25\,(50)}{2} = 625$$

Por lo tanto la progresión es 1, 3, 5, 7, 9, . . . , 49

Ejemplo 4

El primer término de una progresión aritmética es 3, el último es 95, la diferencia común es 4, se desconocen el número de términos y la suma enésima.

Solución:

Los datos son: $a_1 = 3$, $a_n = 95$, $d = 4$

Los elementos desconocidos son: n y S_n

Sustituyendo valores conocidos en $a_n = a_1 + (n-1)\,d$ y despejando n obtenemos:

$\frac{a_n - a_1}{d} = n-1$

$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$

$$95 = 3 + (n-1)4$$

$$\frac{95-3}{4} = n - 1$$

$$n = \frac{95-3}{4} + 1$$

$$n = 23 + 1$$

$$n = 24$$

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$S_n = 12\,(3 + 95) = 1176$$

Ejemplo 5

La suma de los primeros quince términos de una progresión aritmética es 540 y la diferencia entre ellos es 5. Formar la progresión.

Solución:

Datos: $S_n = 540$, $d = 5$, $n = 15$

Incógnitas a_1 y a_n

Usando las fórmulas conocidas y sustituyendo valores en ellas, tenemos

$$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$$

$$540 = \frac{15}{2}(a_1 + a_n)$$

$1080 = 15a_1 + 15a_n$ Ecuación con dos incógnitas

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_1 + 14(5)$$

$a_n - a_1 = 70$ Ecuación con dos incógnitas

Ya que no es posible resolver las ecuaciones aisladamente, se simultanizan para obtener a_1 y a_n

$$15a_1 + 15a_n = 1080$$

$$-\,a_1 + a_n = 70$$

$$15a_1 + 15a_n = 1080$$

$$-15a_1 + 15a_n = 1050$$

$$30a_n = 2130$$

$$a_n = 71$$

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

Sustituyendo $a_n = 71$ en la ecuación $a_n - a_1 = 70$ obtenemos

$$71 - 70 = a_1$$

$$a_1 = 1$$

Progresión pedida

1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71

Ejercicio 3.1

1. ¿ Qué es una progresión aritmética ?
2. Enumera los cinco elementos necesarios para conocer una progresión aritmética.
3. Escribe la expresión matemática del enésimo o último término.
4. Escribe en forma general la expresión de una progresión aritmética de n términos.
5. ¿ Cómo se obtiene la diferencia común de una progresión aritmética dada ?
6. Demostrar la fórmula para obtener la suma enésima de una progresión aritmética de n términos.

Obtener el último término de cada uns de las progresiones aritméticas dadas a continuación.

7. 1, 6, 11, 16, . . . hasta el 15o. término.
8. 7, 10, 13, 16, . . . hasta el 18o. término.
9. 2, 1, 0, −1, . . . hasta el 11o. término.
10. 3, 1, −1, −3, . . . hasta el 12o. término.

Determinar en cada uno de los problemas del 11 al 15 los elementos faltantes de las progresiones aritméticas, si se conocen tres de ellos.

11. $a_1 = 1$, $d = 4$, $n = 12$
12. $a_1 = -4$, $d = 2$, $n = 8$
13. $a_1 = 1$, $d = -1$, $a_n = -5$
14. $n = 16$, $d = 5$, $S_n = 680$
15. $n = 20$, $d = 4$, $S_n = 840$

En los problemas del 16 al 18, determinar la ley de desarrollo de las sucesiones dadas.

16. 4, 3, 2, 1, 0, −1, −2, . . . $5 - n$
17. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, . . . $2n$

$2n + 1$

18. − 3, −7, −11, −15, −19, . . . $-4(n) - 1$

3.3 PROGRESION GEOMETRICA

Definición. Progresión geométrica es el recorrido de una **función exponencial**,* cuyo dominio es todo o parte del conjunto de los números naturales.

Definición Alternativa. Una progresión geométrica es el conjunto de números tales que, cualesquiera de ellos después del primero, se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad fija llamada **razón común**.

La razón común se obtiene dividiendo, cualquier término de la progresión entre el anterior.

Son progresiones geométricas las siguientes

$2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

$3, 9, 27, 81, 243, \ldots$

$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$

En toda progresión geométrica se distinguen los siguientes elementos

a_1 = 1er. término

a_n = enésimo o último término

r = razón común

n = número de términos

S_n = suma enésima

Si escribimos una progresión geométrica en función de estos elementos y utilizamos la definición alternativa, obtenemos

* La función exponencial se define como

$$Exp_a = \{ (x, y) \mid y = a^x,\ a \neq 1,\ a > 0,\ x \in R,\ y > 0 \}$$

ORDEN DEL TERMINO	1	2	3	4	5	6	. . .	n
TERMINO	a_1	$a_1 r$	$a_1 r^2$	$a_1 r^3$	$a_1 r^4$	$a_1 r^5$	. . .	$a_1 r^{n-1}$

La potencia de la razón en el enésimo término es $(n-1)$ o sea una unidad menor que el orden del término, esta misma relación se cumple en todos los términos.

La fórmula del enésimo término es

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

La expresión general de una progresión geométrica es

$$a_1,\ a_1 r,\ a_1 r^2,\ \ldots,\ a_1 r^{n-1}$$

Si conocemos el primer término y la razón común, podemos ir escribiendo término a término una progresión

Ejemplo 1

Obtener el doceavo término de la progresión geométrica $2, 4, 8, 16, 32, \ldots$

Solución:

En esta progresión geométrica tenemos como datos $a_1 = 2$, $n = 12$ y como incógnitas a_n y r, entonces

$$r = \frac{8}{4} = 2$$

$$a_n = a_1 r^{n-1}$$

Sustituyendo los datos, tenemos

$$a_{12} = 2(2)^{12-1} = 2(2)^{11} = 2(2048) = 4096$$

$$a_{12} = 4096$$

El doceavo término es 4096

1020115181

Ejemplo 2

Obtener la progresión geométrica de siete términos, si el primero es $\frac{1}{3}$ y el último $\frac{1}{2187}$

Solución:

Obtenemos los siguientes datos del enunciado del problema

$$n = 7\ ,\quad a_1 = \frac{1}{3}\ ,\quad a_7 = \frac{1}{2187}$$

Como $a_n = a_1 r^{n-1}$ entonces

$$a_7 = \frac{1}{3}(r)^{7-1}$$

$$\frac{1}{2187} = \frac{1}{3} r^6 \quad \text{de donde}$$

$$r^6 = \frac{\frac{1}{2187}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{2187} = \frac{1}{729}$$

$$r = \sqrt[6]{\left(\frac{1}{3}\right)^6}$$

$$= \frac{1}{3}$$

La progresión buscada es

$$\frac{1}{3}\ ,\ \frac{1}{9}\ ,\ \frac{1}{27}\ ,\ \frac{1}{81}\ ,\ \frac{1}{243}\ ,\ \frac{1}{729}\ ,\ \frac{1}{2187}$$

También en las progresiones geométricas es útil obtener una fórmula para la suma enésima representada por S_n

Si representamos por S_n la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica, tenemos

$$S_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1}$$

Multiplicando los dos miembros de esta igualdad por r, obtenemos

$$r S_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n$$

Restando la segunda ecuación de la primera se obtiene

$$S_n = a_1 + \cancel{a_1 r} + \cancel{a_1 r^2} + \cancel{\cdots} + \cancel{a_1 r^{n-1}}$$

$$- r S_n = -(\cancel{a_1 r} + \cancel{a_1 r^2} + \cancel{\cdots} + a_1 r^n)$$

$$S_n - r S_n = a_1 - a_1 r^n$$

Factorizando el primer miembro de la ecuación

$$S_n (1-r) = a_1 - a_1 r^n$$

Despejando S_n

$$S_n = \frac{a_1 - a_1 r^n}{1-r} \quad ; \quad r \neq 1$$

Esta fórmula representa la suma de los primeros n términos de una progresión geométrica finita.

El valor de la razón debe ser diferente de 1 evitando así que el denominador se haga cero.

Para conocer completamente una progresión geométrica es necesario tener determinados los cinco elementos básicos, a_1, a_n, r, n y S_n, que se identifican como el primer término, último término, razón común, número de términos y suma enésima. Conociendo tres de ellos podemos obtener los dos restantes aplicando las fórmulas del enésimo término y suma enésima.

Elemplo 3

Obtener la suma de los primeros diez términos de la progresión geométrica dada a continuación

1 , 3 , 9 , 27 , . . . hasta el 10º término

Solución :

Fórmula a usar : $S_n = \dfrac{a_1 - a_1 r^n}{1 - r}$; $r \neq 1$

Datos : $a_1 = 1$, $n = 10$

El valor de la razón se obtiene dividiendo 9 entre 3 o bién 27 entre 9, por lo tanto $r = 3$.

Sustituyendo estos datos en la fórmula a usar, tenemos

$$S_{10} = \frac{1 - 1\,(3)^{10}}{1 - 3} = \frac{1 - 5049}{-2} = 29{,}524$$

Se deja al estudiante la comprobación del valor del décimo término que es $a_{10} = 19{,}683$, con el cual se conoce completamente la progresión.

Definición. Se llaman **medios geométricos** a los términos comprendidos entre dos términos cualesquiera de una progresión geométrica.

Los dos términos cualesquiera de la definición anterior, se asocian respectivamente con el primero y último término de una progresión.

Ejemplo 4.

Insertar tres medios geométricos entre $\dfrac{1}{27}$ y $\dfrac{1}{2187}$

Solución :

Con los dos términos dados y los tres por insertar se forma una progresión de 5 términos.

Haciendo $a_1 = \dfrac{1}{27}$ y $a_5 \ \dfrac{1}{2187}$ y aplicando la fórmula del enésimo término, tenemos

$$a_n = a_1 \, r^{n-1}$$

$$a_5 = \frac{1}{27} \, r^4$$

$$\frac{1}{2187} = \frac{1}{27} \, r^4$$

$$r^4 = \frac{\dfrac{1}{2187}}{\dfrac{1}{27}}$$

$$r = \pm \, \frac{1}{3}$$

Por lo tanto los medios geométricos son: $\pm \dfrac{1}{81}, \dfrac{1}{243}, \pm \dfrac{1}{729}$

Ejercicio 3.2

En los problemas del 1 al 6 se dan tres elementos de una progresión geométrica. Determinar los elementos faltantes.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

1. $a_1 = 2,\ a_n = 4096,\ n = 12$

2. $a_1 = \dfrac{1}{2},\ r = \dfrac{1}{2},\ n = 9$

3. $r = -3,\ n = 5,\ a_n = 162$

4. $n = 5,\ r = \dfrac{1}{3},\ S_n = \dfrac{4}{9}$

5. $S_n = \dfrac{364}{405},\ r = \dfrac{1}{3},\ a_1 = \dfrac{3}{5}$

6. $a_1 = 27,\ a_n = \dfrac{1}{81},\ r = \dfrac{1}{3}$

7. Insertar dos medios geométricos entre $\dfrac{3}{5}$ y $\dfrac{3}{320}$

8. Intercalar cuatro medios geométricos entre 27 y $\dfrac{1}{27}$.

9. Una pelota se deja caer de una altura de 1 m. Si en cada rebote alcanza un tercio de la altura desde la cual ha caído esa vez, ¿Qué altura alcanzará en el cuarto rebote? ¿Qué distancia total recorrerá al tocar el suelo por sexta vez?

10. El tercer término de una progresión geométrica es 3 y el octavo es $\frac{1}{243}$. Obtener los dos primeros términos.

11. Definir lo siguiente:

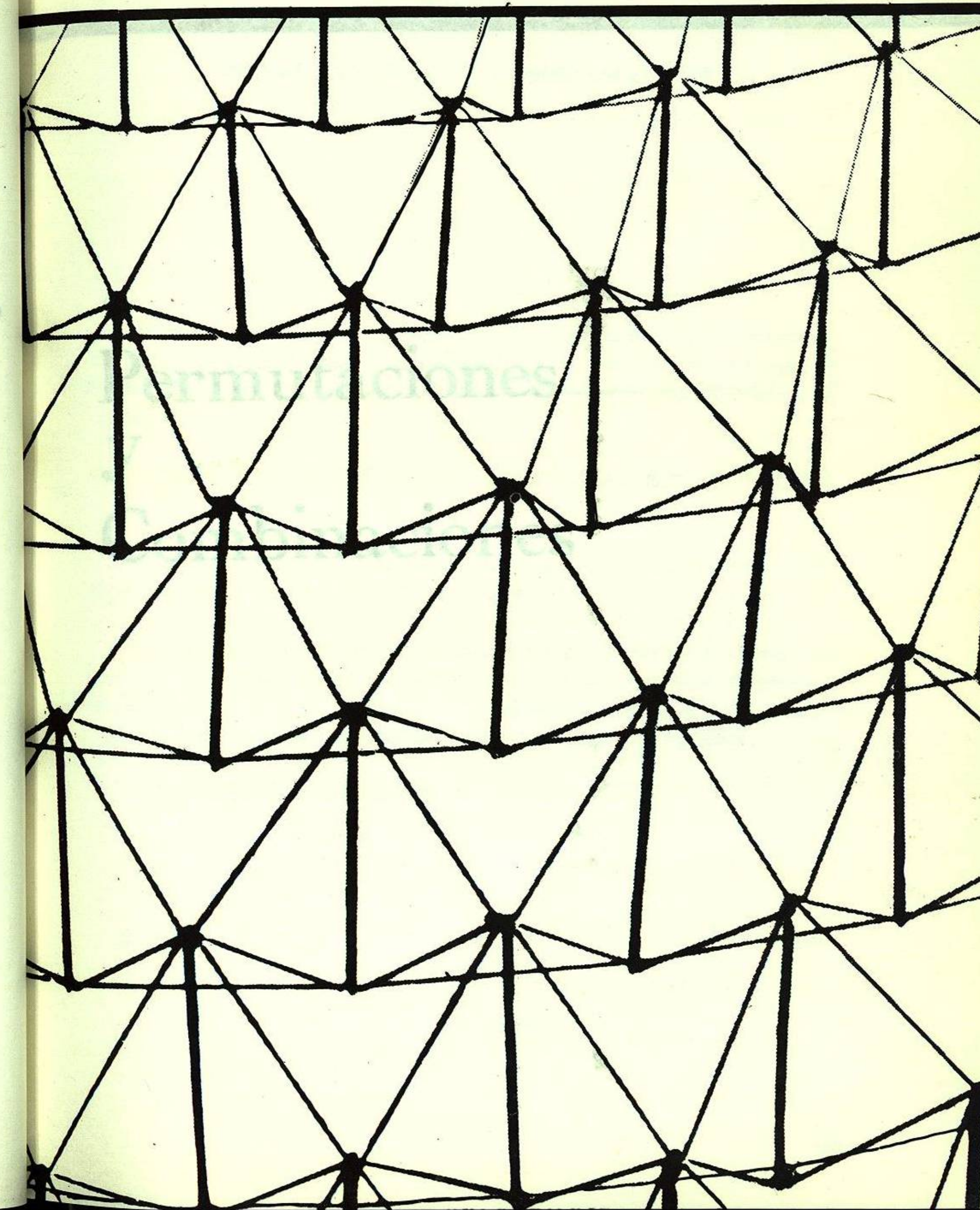
    a) Progresión geométrica.

    b) Función exponencial.

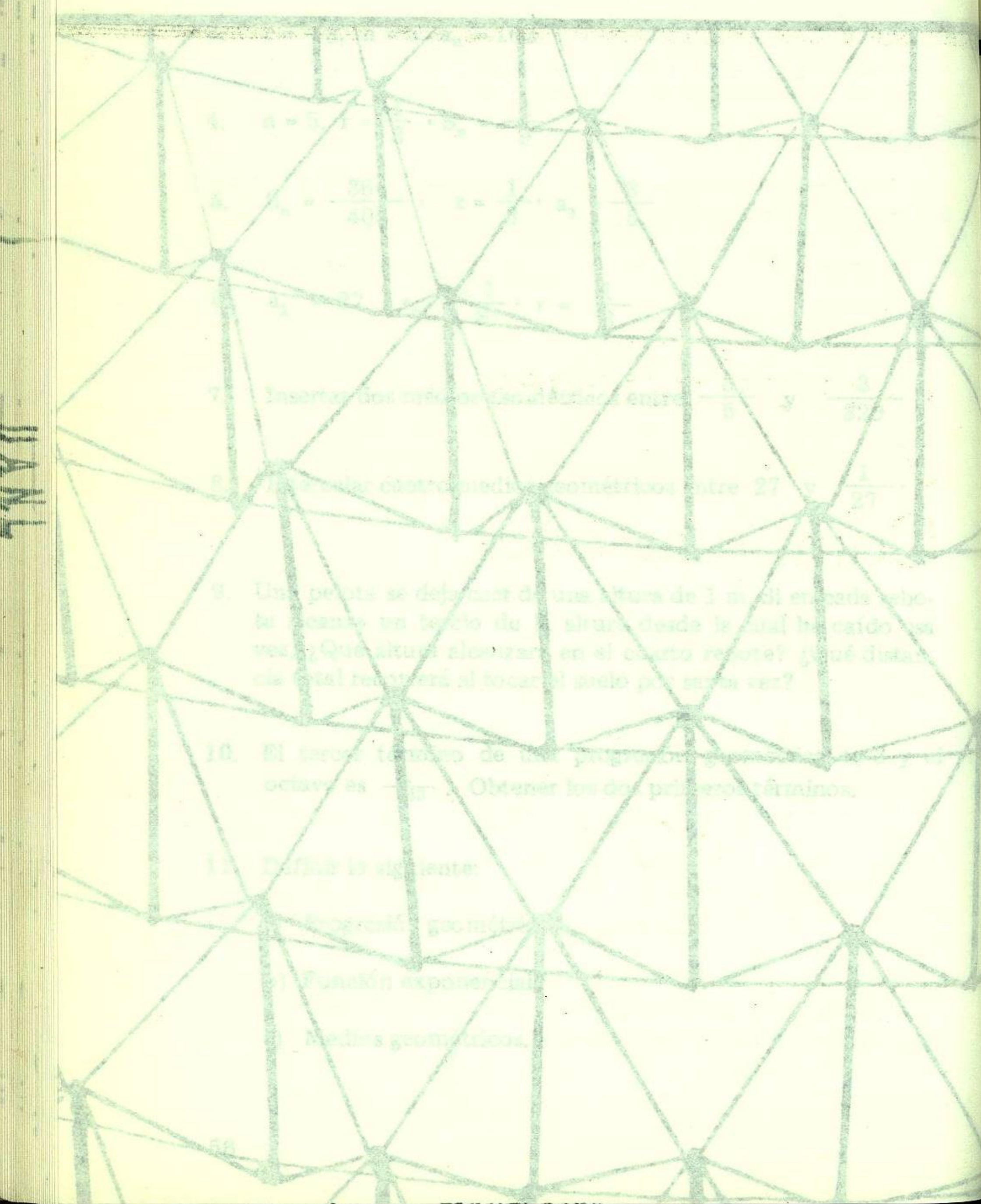
    c) Medios geométricos.

UANL

CAPITULO 4



BIBLIOTECA UNIVERSITARIA



4

Permutaciones y Combinaciones

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
UANL