CAPITULO 4

PERMUTACIONES Y COMBINACIONES

4.1 INTRODUCCION

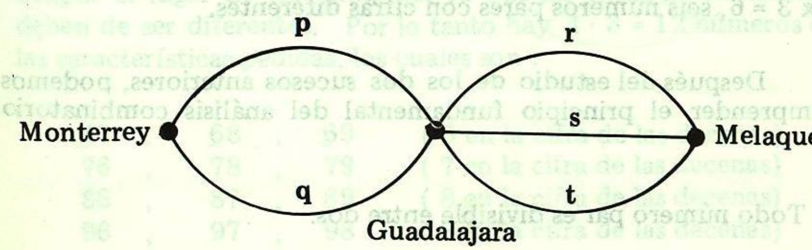
Un tipo especial del proceso de contar, básico en matemática, se presenta cuando estamos interesados en conocer el número de formas distintas en que, bajo ciertas condiciones puede realizarse un suceso.

4.2 ASPECTOS GENERALES DEL ANALISIS COMBINATORIO.

El estudio de los planteamientos siguientes conducirá al principio fundamental del análisis combinatorio.

Si queremos conocer de cuántas maneras distintas puede un viajero ir de Monterrey a Melaque, si hay dos caminos diferentes de Monterrey a Guadalajara y tres caminos diferentes de Guadalajara a Melaque, es necesario hacer el siguiente análisis.

Un diagrama ayuda al análisis



De Monterrey a Guadalajara hay dos caminos diferentes y por cada una de estas opciones, se presentan tres posibilidades para ir de Guadalajara a Melaque, por lo tanto los diferentes arreglos de caminos son:

p — r	q — r
p — s	q — s
p — t	q — t

llamando a los caminos por las letras que aparecen en el diagrama. Estos arreglos hacen un total de 6, número que se obtiene multiplicando 2 x 3 = 6 donde 2 es el número de caminos de Monterrey a Guadalajara y 3 es el número de caminos de Guadalajara a Melaque.

Si estamos ahora interesados en conocer cuántos números pares de dos cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5 y 6, debemos hacer el análisis siguiente. Para que un número sea par, su cifra final debe ser par.* En consecuencia el lugar de las unidades puede ser ocupado en dos formas diferentes porque hay dos números pares en los dígitos dados; una vez elegida la cifra en las unidades, quedan tres números para ocupar el lugar de las decenas, como observamos en la distribución siguiente

34 , 54 , 64 (4 en la cifra de las unidades)

36 , 46 , 56 (6 en la cifra de las unidades)

El número total de números diferentes se puede obtener sin necesidad de escribirlos, si multiplicamos el número de posibilidades como puede ocuparse el lugar de las unidades por el número de posibilidades como puede ocuparse el lugar de las decenas. O sea 2 x 3 = 6, seis números pares con cifras diferentes.

Después del estudio de los dos sucesos anteriores, podemos comprender el principio fundamental del análisis combinatorio.

* Todo número par es divisible entre dos.

Principio Fundamental

Si un suceso puede ocurrir independientemente de m_1 maneras diferentes, si un segundo suceso puede ocurrir independientemente de m_2 maneras diferentes, ambos sucesos sucesivamente pueden ocurrir de $m_1 \cdot m_2$ maneras diferentes.

Este principio es válido para un número finito de sucesos. El orden en que se consideren esos sucesos no afecta el resultado.

Ejemplo 1

De cuántas maneras se puede formar un comité integrado por un presidente, un secretario y un tesorero, si hay cuatro candidatos a presidente, tres candidatos a secretario y dos candidatos a tesorero.

4, 3, 2 /

Solución:

El cargo de presidente puede ser ocupado de 4 maneras diferentes, por cada una de ellas hay 3 maneras de ocupar el cargo de secretario y por cada una de las doce maneras de ocupar los cargos de presidente-secretario hay 2 maneras de ocupar el cargo de tesorero, por lo tanto tenemos $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ maneras diferentes de formar el comité.

Ejemplo 2

Cuántos números de dos cifras diferentes pueden formarse con los dígitos 6, 7, 8 y 9?

Solución :

El lugar de las decenas, puede ser ocupado por cualquiera de los cuatro dígitos dados, quedando tres dígitos disponibles para ocupar el lugar de las unidades, ya que las cifras de los números deben de ser diferentes. Por lo tanto hay $4 \cdot 3 = 12$ números con las características pedidas, los cuales son :

67 ,	68 ,	69	(6 en la cifra de las decenas)
76 ,	78 ,	79	(7 en la cifra de las decenas)
86 ,	87 ,	89	(8 en la cifra de las decenas)
96 ,	97 ,	98	(9 en la cifra de las decenas)

4, 3, 2   12
2
24

Ejemplo 3

¿Cuántos números de dos cifras pueden formarse con los dígitos del problema anterior ?

Solución :

Al no especificarse que las cifras son diferentes, se permiten repeticiones y tanto el lugar de las unidades como el de las decenas pueden ser ocupado en 4 formas diferentes, entonces aplicando el principio fundamental, se obtienen $4 \cdot 4 = 16$ números de dos cifras. A los doce números del problema anterior se agregán 66 , 77 , 88 y 99.

Ejercicio 4.1

1. ¿En cúantas formas pueden distribuírse los tres primeros lugares de una competencia en la cual participan 10 países ?
2. Si se lanzan dos dados normales. ¿De cuántoas formas pueden caer ?
3. Una moneda de 100 pesos y otra de 200 pesos, se lanzan al suelo. ¿De cuántas maneras pueden caer ?
4. Un examen consta de ocho preguntas de falso y verdadero. ¿ De cuántas maneras diferentes puede contestarse el examen completo ?
5. ¿ Cuántos números de tres cifras diferentes menores que 400 pueden formarse con los enteros 1 , 2 , 3 , 4 , 5 ?
6. ¿De cuántas formas se pueden introducir 4 cartas en 2 buzones?
7. ¿ Cuántos números de a lo más dos cifras diferentes, pueden formarse con los dígitos 1 , 2 , 3 ?
8. Cuántos números de al menos dos cifras diferentes, pueden formarse con los dígitos 1 , 2 , 3 ?

(5)(4)(3)(2)

4.3 PERMUTACIONES

En el lenguaje diario y en el lenguaje matemático, **permutar significa cambiar el orden.**

Definición. Se llama permutación de un cierto número de objetos, a cada disposición u ordenación diferente de ellos.

Si analizamos las letras de las palabras *cosa* y *saco* observamos que constan de las mismas letras, sin embargo son vocablos diferentes porque son ordenaciones diferentes de las letras *a, c, o* y *s*.

Cuando tenemos n objetos y disponemos r de ellos ($r \leq n$) en un orden determinado, llamamos a esta disposición una permutación de n objetos tomados de r en r . Usamos el símbolo P (n, r) para señalar este hecho.

Los símbolos ${}_nP_r$, P_n^r , $P_{n,r}$ tienen el mismo significado que P (n , r).

El número total de permutaciones de n objetos tomados de r en r es equivalente al número de maneras en que pueden llenarse r lugares de entre n objetos.

Así el primer lugar puede ser llenado en n maneras diferentes, el segundo lugar puede ser ocupado en $n - 1$ formas diferentes, el tercero en $n - 2$ y así sucesivamente hasta el r-simo lugar que puede ser ocupado en $[\, n - (r - 1)\,]$ formas diferentes ya que el número que se le resta a la n es una unidad menor que el orden del lugar. Ver cuadro siguiente:

Maneras de ocuparlos	n	n—1	n—2	n—3	. . .	n—(r—1)
Orden de los lugares	1	2	3	4	. . .	r —simo

Si suprimimos el paréntesis en la expresión del r-simo lugar obtenemos $(n - r + 1)$.

En consecuencia el número de permutaciones de n objetos tomados de r en r se escribe

$$P(n, r) = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1)$$

Si el segundo miembro de esta igualdad se multiplica y se divide por $(n-r)!$ se obtiene

$$P(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$P(n, r) = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}{(n-r)!}$$

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Entonces $\boxed{P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}}$ es la fórmula para obtener el número de permutaciones de n objetos tomados de r en r.

Si estamos interesados en obtener el número de permutaciones de n objetos tomados todos a la vez, obtenemos una fórmula reducida al hacer r = n y sustituírla en la fórmula anterior.

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$P(n, n) = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = \frac{n!}{1} = n!$$

Por lo tanto la fórmula que nos dá el número de permutaciones de n objetos tomados todos a un mismo tiempo es:

$$P(n, n) = n!$$

Ejemplo 1

Obtener el número de permutaciones de las cinco letras a, b, c, d y e, tomadas de tres en tres.

Solución:

La fórmula a usar es $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Sustituyendo valores

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 1} = 60$$

Ejemplo 2

De cuántas maneras pueden sentarse cinco alumnos en un salón de clase que tiene ochos bancos individuales.

Solución:

Usamos la fórmula $P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$

Sustituímos los valores $n = 8$, $r = 5$

entonces $P(8, 5) = \frac{8!}{(8-5)!} = \frac{8!}{3!}$

$$= \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}} = 6720$$

Ejemplo 3

¿De cuántas maneras pueden colocarse tres libros en un estante?

Solución:

Esta pregunta se asocia con el número de permutaciones de tres elementos tomados todos a la vez.

La fórmula apropiada es $P(n, n) = n!$

$P(3, 3) = 3! = 6$

Permutaciones con elementos repetidos.

El número P de permutaciones de n elementos, tomados todos a la vez, repitiéndose uno de ellos q veces, otro de ellos r veces, un tercero s veces, etc., está dada por

$$P = \frac{n!}{q!\ r!\ s!}$$

Ejemplo 4

Determinar el número de permutaciones de las diez letras de la palabra CUERNAVACA.

Solución:

Como la palabra Cuernavaca tiene letras repetidas, entonces la fórmula conveniente es $P = \dfrac{n!}{q!\,r!}$

$n = 10$, $q = 3$ $r = 2$

puesto que la palabra tiene **10** letras de las cuales 3 son a y 2 son c

Sustituyendo estos valores, tenemos

$$P = \frac{10!}{3!\ 2!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot \overset{2}{\cancel{4}} \cdot \cancel{3!}}{\cancel{3!}\ \cancel{2} \cdot 1} = 302,400$$

302,400 maneras diferentes de permutar las letras.

Con frecuencia en este análisis se obtienen cantidades grandes de formas diferentes de presentar un suceso y por esto suele llamarse formas sofisticadas.

Permutaciones circulares

El número de formas en que se pueden colocar n elementos diferentes alrededor de una mesa circular es igual a $(n - 1)!$

$$P \text{ circulares} = (n-1)!$$

Ejemplo 5

¿De cuántas maneras se pueden sentar seis personas en una mesa redonda?

Solución:

Usando la fórmula para permutaciones circulares y sustituyendo valores, tenemos

$P_c = (n-1)!$, $n = 6$

$P_c = (6-1)! = 5! = 120$ maneras diferentes

Ejercicio 4.2

1. Calcular las permutaciones siguientes:

   $P(4, 2)$, $P(8, 5)$, $P(15, 3)$

2. Obtener el número de permutaciones de ocho libros tomados de cuatro en cuatro.

3. De cuántas maneras pueden sentarse 15 alumnos en un salón de clase que tiene 20 bancos individuales.

4. ¿De cuántas formas pueden colocarse 10 libros en un estante?

5. ¿De cuántas formas pueden colocarse 7 libros en un estante de tal manera que 2 de ellos estén siempre juntos?

6. Obtener el número de permutaciones de las letras de la palabra ISSSTE.

7. Obtener el número de permutaciones de las letras de la palabra Torreón.

8. De cuántas maneras pueden sentarse 4 personas en una mesa redonda.

9. Obtener el número de permutaciones de 20 maestros tomados de 6 en 6.

10. ¿De cuántas maneras se pueden colocar 5 macetas en un corredor?

11. De una colección de 9 cuadros se quieren formar filas de 3 cuadros. Hallar el número de filas que se pueden obtener.

12. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar 4 personas en una fila?

4.4 COMBINACIONES

Definición. Una combinación es un conjunto o colección de objetos en un orden no especificado.

El número de combinaciones de n objetos tomados de r en r, se asocia con el número de subconjuntos de r elementos que tiene un conjunto de n elementos.

Si $A = \{ a, b, c, d, e \}$

¿Cuántas combinaciones de dos letras se pueden obtener?

Esto equivale a preguntarse. ¿Cuántos subconjuntos de dos elementos tiene el conjunto A?

La respuesta es

$\{ a, b \}$, $\{ a, c \}$, $\{ a, d \}$, $\{ a, e \}$,

$\{ b, c \}$, $\{ b, d \}$, $\{ b, e \}$, $\{ c, d \}$;

$\{ c, e \}$, $\{ d, e \}$

Diez es el número de combinaciones de dos letras de las cinco letras dadas.

Para indicar el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r se usa el símbolo $C(n, r)$ que también puede ser ${}_nC_r$, C_n^r, $C_{n,r}$.

La diferencia primordial entre permutación y combinación es el orden de los objetos o elementos. Por cada combinación hay r! permutaciones.

Así tenemos

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} \quad \text{y como} \quad P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

$$\Rightarrow \quad C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

fórmula para calcular el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r

El número de combinaciones de n objetos tomados todos a la vez es igual a 1.

Ejemplo 1

¿Cuántas ternas para la candidatura de director pueden formarse de un grupo de 15 maestros?

Solución:

Se pide el número de combinaciones de quince elementos tomados de tres en tres.

Usando la fórmula

$$C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

donde $n = 15$, $r = 3 \Longrightarrow$

$$C(15,3) = \frac{15!}{(15-3)!\,3!} = \frac{15!}{12!\,3!}$$

$$= \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 12!} = 455$$

Ejemplo 2

¿Cuántas combinaciones pueden formarse con las letras de la palabra PANUCO tomadas de dos en dos?

Solución:

$$\text{fórmula} \quad C(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

$n = 6$, $r = 2$

$$C(6,2) = \frac{6!}{4!\;2!} = 15$$

$$\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2}$$

Esas combinaciones son

PA, PN, PU, PC, PO

AN, AU, AC, AO, NU

NC, NO, UC, UO, CO

Ejercicio 4.3

1. ¿Qué es una combinación?
2. ¿Cuál es la diferencia básica entre combinación y permutación?
3. Escribe la fórmula que te dá el número de combinaciones de n objetos tomados de r en r.
4. Calcular las siguientes combinaciones.

   C (4, 2), C (10, 4), C (12, 3)

5. ¿Cuántos grupos de 5 alumnos se pueden formar con 20 alumnos sobresalientes de una preparatoria para que la representen en un concurso?

6. ¿Cuántas diagonales tiene un cuadrado? ¿Cuántas un hexágono?

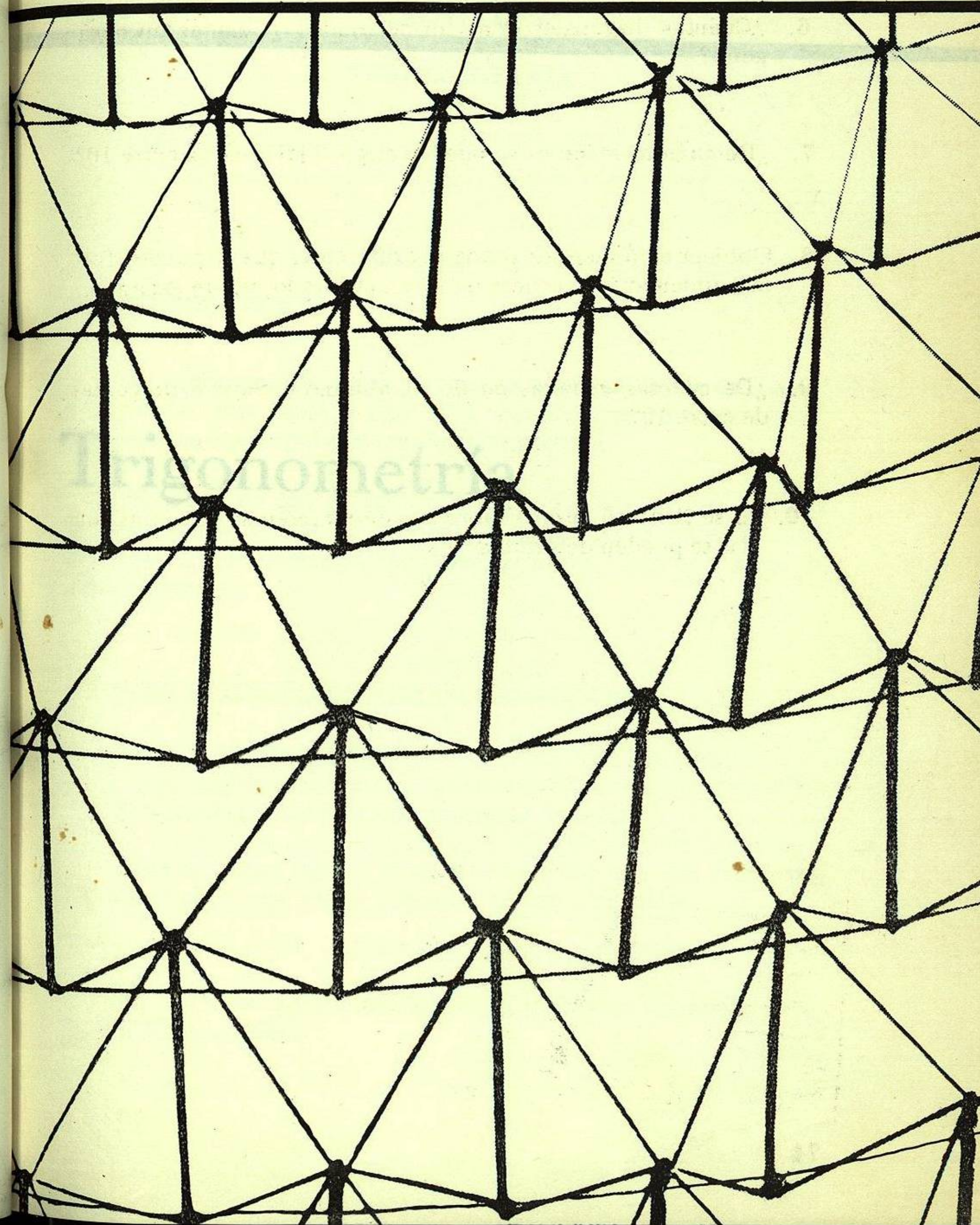
7. ¿De cuántas maneras se pueden elegir 3 idiomas de entre 10?

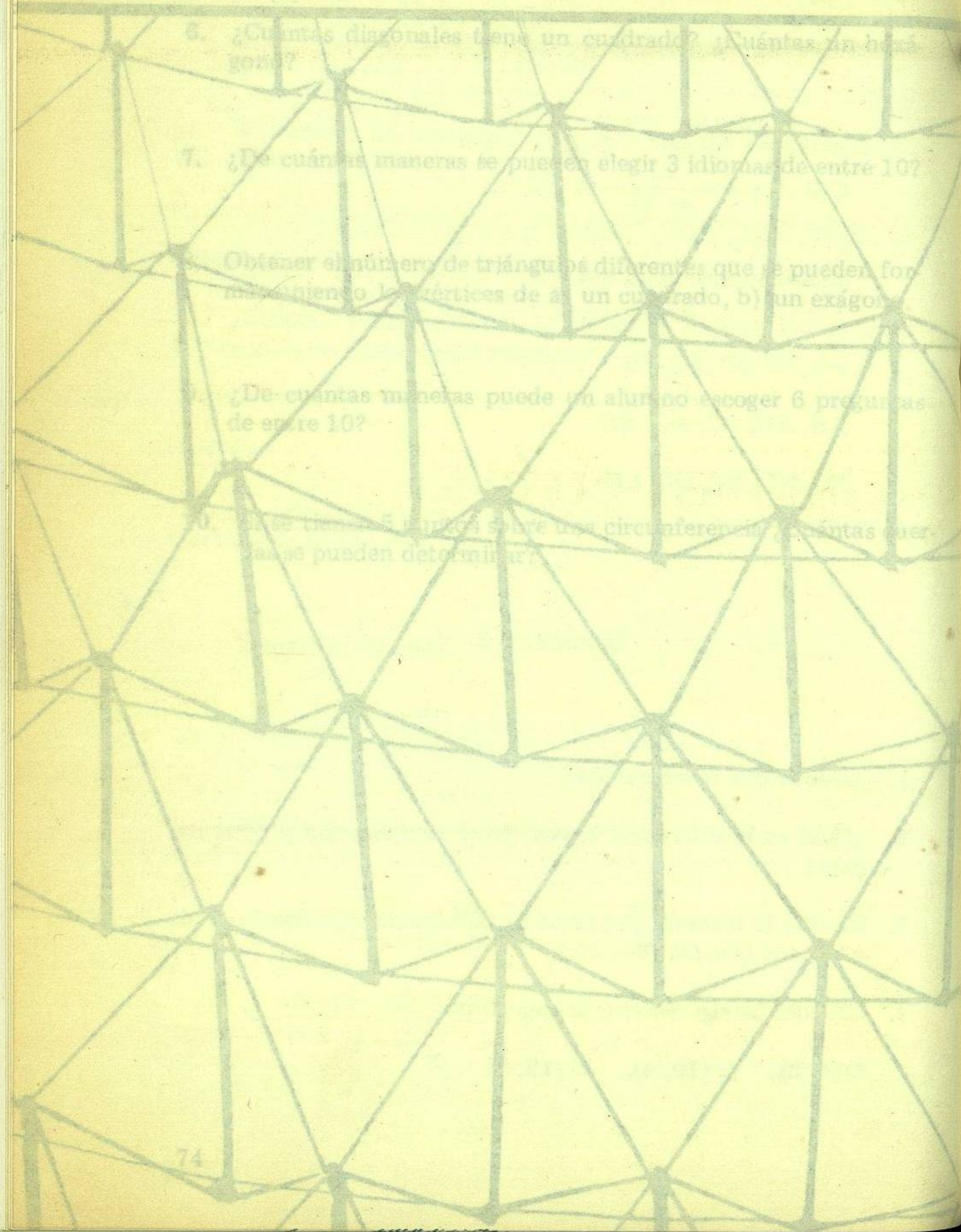
8. Obtener el número de triángulos diferentes que se pueden formar uniendo los vértices de a) un cuadrado, b) un exágono.

9. ¿De cuántas maneras puede un alumno escoger 6 preguntas de entre 10?

10. Si se tienen 5 puntos sobre una circunferencia ¿Cuántas cuerdas se pueden determinar?

CAPITULO 5





5

Trigonometría