CAPITULO 5

TRIGONOMETRIA

5.1 INTRODUCCION

La trigonometría tiene sus inicios antes de la era Cristiana, pero no fué sino hasta el siglo XVI cuando surge como poderosa herramienta que impulsa la matemática aplicada.

No obstante que el significado de la palabra trigonometría es la medición de triángulos, hoy en día su campo se extiende a las funciones trigonométricas, medición de líneas, ángulos y arcos de circunferencia.

5.2 CONCEPTOS GEOMETRICOS GENERALES.

Puntos , rectas y planos

Dos puntos determinan un segmento de recta.

Cuando varios puntos se pueden unir por una sola recta, entonces se dice que están alineados o son colineales.

Tanto las rectas como los planos son conjuntos de puntos.

En la figura 5.1 los puntos A , B y C estan alineados, pero D , E y F no lo están.

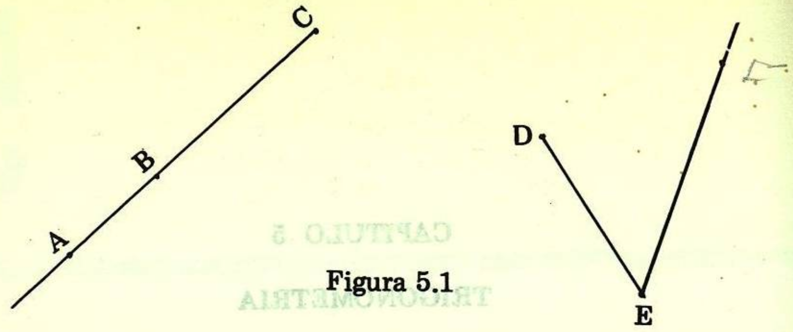


Figura 5.1

Recta horizontal es aquella recta que es paralela a una superficie de nivel, como el nivel de la superficie del agua. Fig. 5.2.

Recta vertical es la que sigue la dirección de la plomada. Fig. 5.3

Figura 5.2

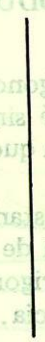


Figura 5.3

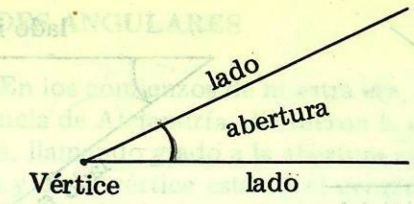
5.3 ANGULOS

VERTICE y lados ABERTURA Lados

Definición. Angulo es la abertura comprendida entre dos segmentos de recta que se unen en un punto común llamado vértice.

Los dos segmentos de recta se llaman los lados del ángulo.

Un ángulo se designa por una letra mayúscula colocada en el vértice, o bien por una letra griega situada en la abertura. Si los lados son OP y ON, entonces al ángulo se nombra por $\angle$ PON o por $\angle$ NOP, en esta notación es indiferente qué se nombre primero. La abertura de un ángulo no se afecta por la longitud de sus lados. Fig. 5.4.



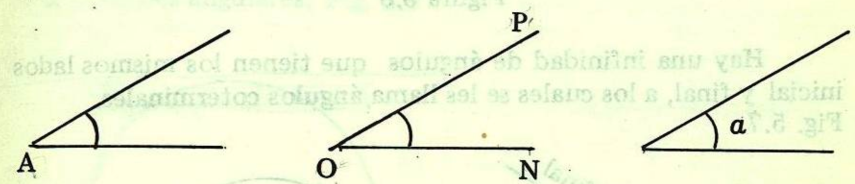


Figura 5.4

Generación de ángulos

Un ángulo se genera girando un segmento de recta alrededor de uno de sus extremos. Si el giro se hace en **contra de las manecillas del reloj,** (de un reloj con manecillas) entonces el ángulo se considera de **signo positivo** y si el ángulo se genera con un giro a **favor de las manecillas** del reloj, entonces se considera de **signo negativo.** Fig. 5.5

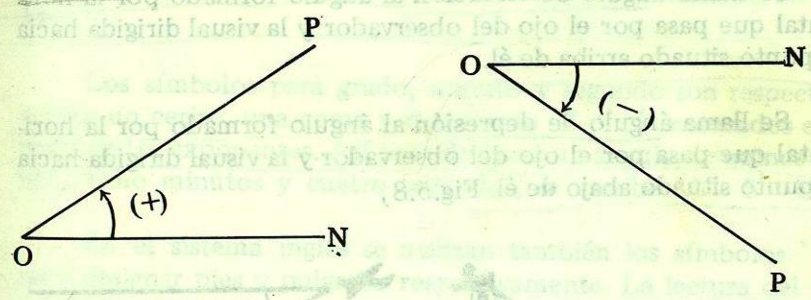


Figura 5.5

En trigonometría se habla de **ángulos orientados** en los cuales uno de los lados es el inicial y el otro es el lado final o terminal. Figura Fig. 5.6

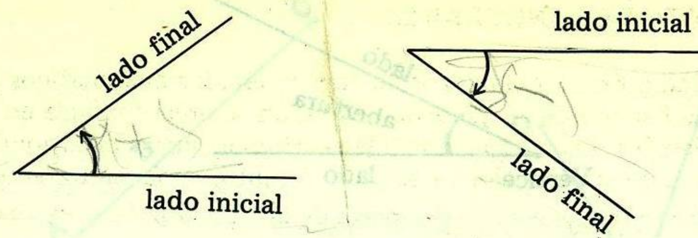


Figura 5.6

Hay una infinidad de ángulos que tienen los mismos lados inicial y final, a los cuales se les llama ángulos coterminales. Fig. 5.7

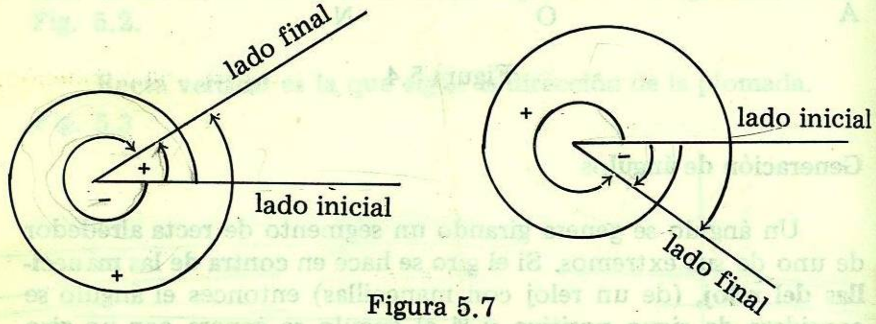


Figura 5.7

Se llama ángulo de elevación al ángulo formado por la horizontal que pasa por el ojo del observador y la visual dirigida hacia un punto situado arriba de él.

Se llama ángulo de depresión al ángulo formado por la horizontal que pasa por el ojo del observador y la visual dirigida hacia un punto situado abajo de él. Fig.5.8,

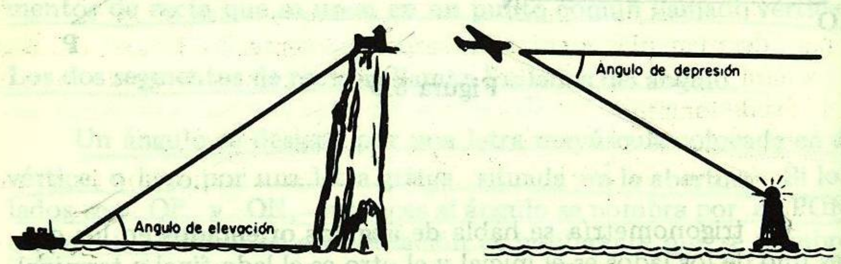
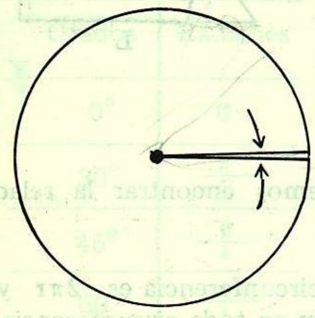


Figura 5.8

5.4 UNIDADES ANGULARES

Grado. En los comienzos de nuestra era, los matemáticos griegos de la Escuela de Alejandría, dividieron la circunferencia en 360 partes iguales, llamando grado a la abertura angular correspondiente a ese arco y cuyo vértice está en el centro de la circunferencia, por lo tanto el grado es $\frac{1}{360}$ parte de una revolución y es una de las unidades angulares. Fig. 5.9



$1° = \frac{1}{360}$ parte de una revolución.

Figura 5.9

Dividieron también el grado en 60 partes iguales llamadas minutos (primera parte menor) y cada minuto lo dividieron en 60 partes iguales llamadas segundos (segunda parte menor de un grado).

Los símbolos para grado, minuto y segundo son respectivamente un cerito, una coma y dos comas $°, ', ''$ colocados en el lugar de los exponentes. Así para designar un ángulo de quince grados, ocho minutos y cuatro segundos, se escribe $15° \; 8' \; 4''$

En el sistema inglés se utilizan también los símbolos $'$, $''$ para designar pies y pulgadas respectivamente. La lectura del texto hará distinguir cuando se trate de fracciones de grado o unidades de longitud.

Radián. Otra unidad angular de amplia aplicación es el radián.

Definición. Radián es el ángulo cuya longitud del arco subtendido es igual a la longitud del lado.

Si el vértice de este ángulo lo ubicamos en el centro de una circunferencia, tenemos un radián en la Fig. 5.10

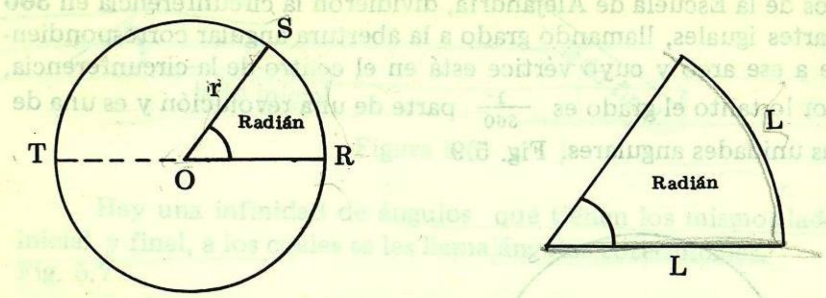


Figura 5.10

Analizando la figura 5.10 podemos encontrar la relación entre radianes y grados.

Sabemos que la longitud de la circunferencia es $2\pi r$ y en este giro completo hay 360°, también en toda circunferencia los arcos son proporcionales a los ángulos centrales que los subtienden, en consecuencia tenemos

$$\frac{\measuredangle ROS}{\measuredangle ROT} = \frac{\overset{\frown}{RS}}{\overset{\frown}{RST}}$$

sustituyendo los valores correspondientes, tenemos

$$\frac{1 \text{ Radián}}{180^\circ} = \frac{r}{\pi r}$$

simplificando y despejando

$$1 \text{ Radián} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.3^\circ \text{ aprox.}$$

$$\pi \text{ radianes} = 180^\circ$$

Con esta relación $\pi = 180^\circ$ podemos formar una tabla de equivalencias de grados a radianes para los valores angulares más usuales, obteniendo múltiplos y submúltiplos de π.

Si $\pi = 180^\circ \Longrightarrow 2\pi = 2(180^\circ) = 360^\circ$

Si $\pi = 180^\circ \Longrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

Y así sucesivamente.

Tabla de equivalencias.

Grados	Radianes	Grados	Radianes
0°	0	210°	$\frac{7\pi}{6}$
30°	$\frac{\pi}{6}$	225°	$\frac{5\pi}{4}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	240°	$\frac{4\pi}{3}$
60°	$\frac{\pi}{3}$	270°	$\frac{3\pi}{2}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	300°	$\frac{5\pi}{3}$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	315°	$\frac{7\pi}{4}$
135°	$\frac{3\pi}{4}$	330°	$\frac{11\pi}{6}$
150°	$\frac{5\pi}{6}$	360°	2π
180°	π		

5.5 CLASIFICACION DE LOS ANGULOS

Angulo nulo es aquel ángulo cuyo lado final coincide con el inicial. Fig. 5.11

Lado inicial y lado final

Figura 5.11

Angulo agudo es un ángulo cuya abertura es mayor que 0° pero menor que la abertura de un cuadrante. Fig. 5.12

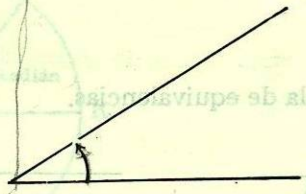


Figura 5.12

Angulo recto. Cuando una recta corta a otra formando ángulos adyacentes iguales, entonces estos ángulos son rectos. Fig. 5.13

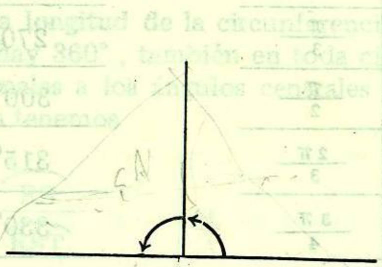


Figura 5.13

Angulo obtuso es el ángulo cuya abertura es mayor que la de un ángulo recto y menor que la abertura de dos ángulos rectos. Fig. 5.14

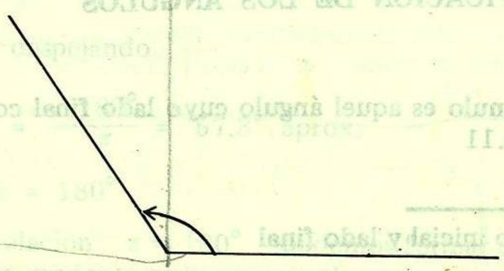


Figura 5.14

Angulo de lados colineales o llano es aquel ángulo cuyo lado final es prolongación del lado inicial o sea que sus lados forman una recta Fig. 5.15

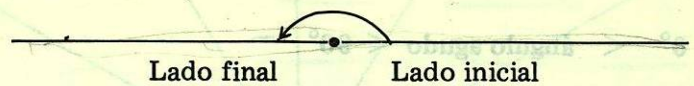


Figura 5.15

Angulo entrante es aquel ángulo cuya abertura es mayor que un ángulo de lados colineales pero menor que una revolución completa. Fig. 5.16

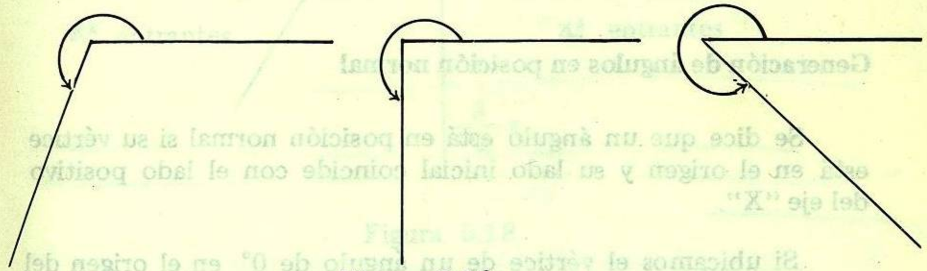


Figura 5.16

Angulo perigonal o perígono es aquel que corresponde a un giro completo. En este ángulo los lados inicial y final también coinciden. Fig. 5.17

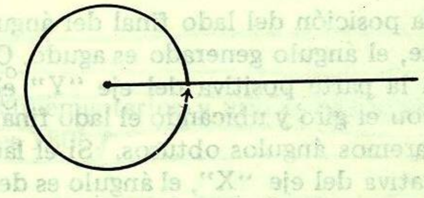


Figura 5.17

La abertura de un ángulo perigonal representa una circunferencia a la cual corresponden 360°

Con esta base, los límites en grados para las diferentes clases de ángulo son:

ángulo nulo $= 0°$

$0° <$ ángulo agudo $< 90°$

ángulo recto $= 90°$

$90° <$ ángulo obtuso $< 180°$

ángulo de lados colineales $= 180° = 2$rt.

$180° <$ ángulo entrante $< 360°$

ángulo perigonal $= 360° = 4$rt.

Generación de ángulos en posición normal

Se dice que un ángulo está en posición normal si su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el lado positivo del eje "X".

Si ubicamos el vértice de un ángulo de 0° en el origen del sistema cartesiano y sus lados inicial y final coincidiendo con la parte positiva del eje de las "X" y giramos su lado terminal en contra de las manecillas del reloj, estaremos generando diferentes ángulos positivos dependiendo de la posición donde se detenga el lado terminal.

Si la posición del lado final del ángulo se ubica en el primer cuadrante, el ángulo generado es agudo. Cuando el lado final coincide con la parte positiva del eje "Y" el ángulo es recto. Continuando con el giro y ubicando el lado final en el segundo cuadrante, generaremos ángulos obtusos. Si el lado final coincide con la parte negativa del eje "X", el ángulo es de lados colineales. Generaremos éngulos entrantes cuando detenemos el giro en cualquier posición del tercer y cuarto cuadrantes. Por último tendremos un giro completo o ángulo perigonal al detener el lado terminal sobre el lado inicial colocado en la parte positiva del eje "X". En la figura 5.18 se dan gráficamente los ángulos descritos.

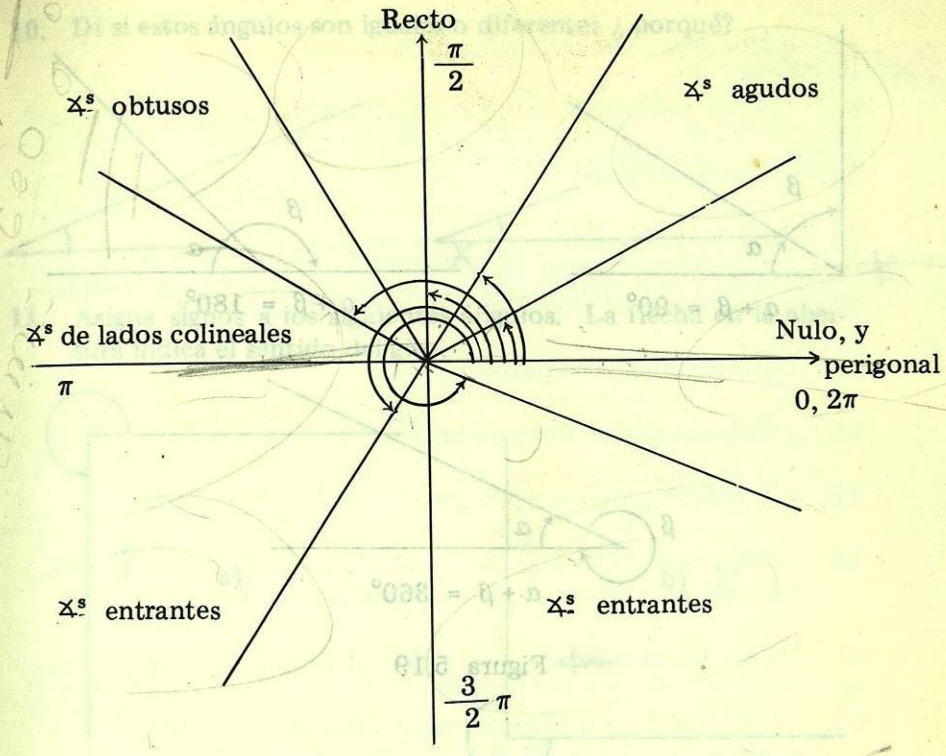


Figura 5.18

Definiciones

Angulos complementarios

Dos ángulos son complementarios si su suma es 90°.

Angulos suplementarios

Dos ángulos son suplementarios y uno es el suplemento del otro si la suma de ellos es 180°.

Angulos conjugados

Dos ángulos son conjugados y uno es el conjugado del otro si la suma de ellos es 360° En la figura 5.19 se presentan estos ángulos.

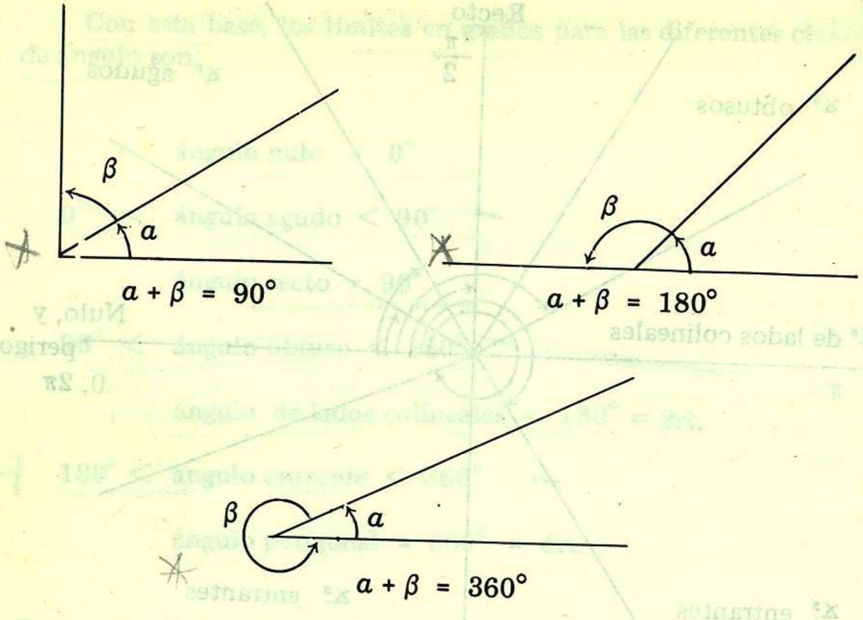
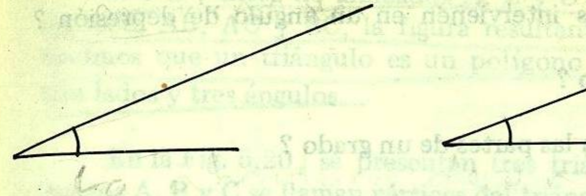


Figura 5.19

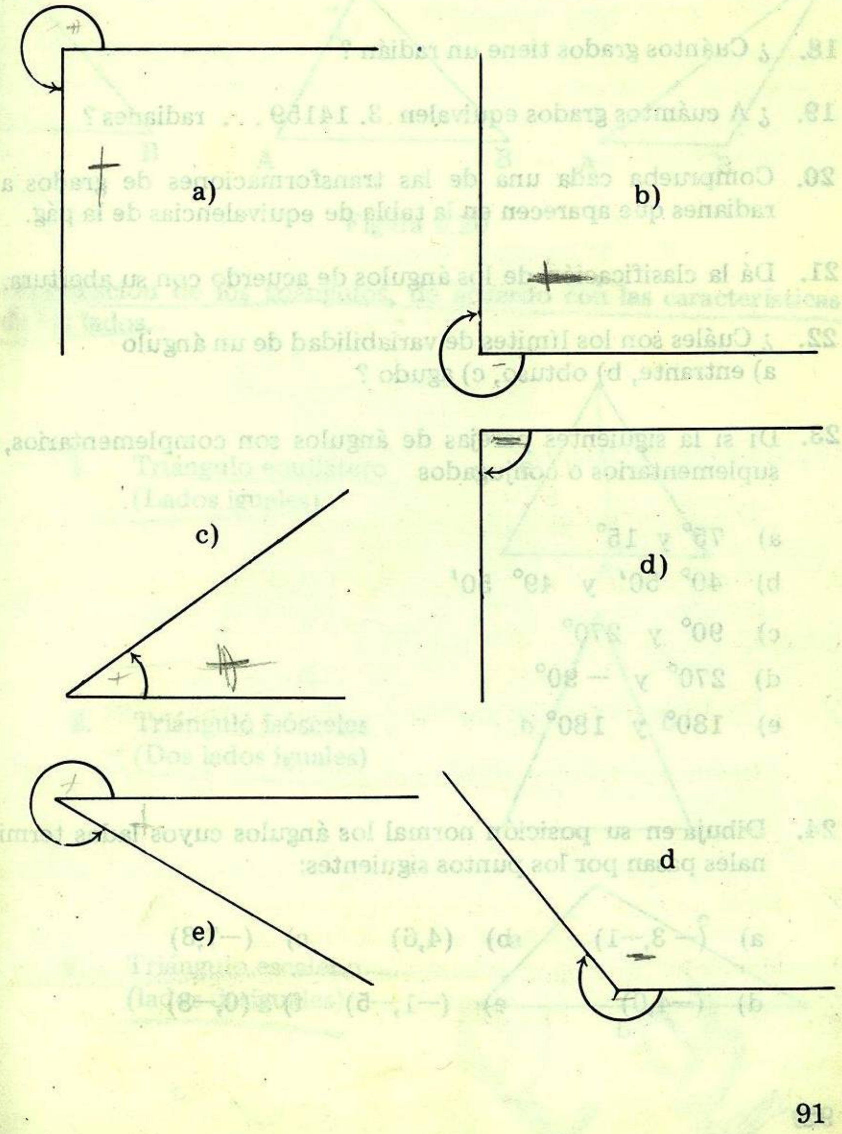
Ejercicio 5.1

1. ¿ Cuál es el campo de la trigonometría actualmente ?
2. ¿ Qué siglo marcó su desarrollo ?
3. ¿ Qué característica distingue a las rectas horizontal y vertical ?
4. ¿ Que es un ángulo orientado ?
5. ¿ Cómo se generan los ángulos positivos y negativos ?
6. ¿ Cuántos radianes hay en un círculo ?
7. ¿ Cuándo dos ángulos son coterminales ?
8. Dado un ángulo, ¿ cuántos ángulos coterminales tiene ?
9. Menciona tres ángulos coterminales de los siguientes ángulos:
   a) $-45°$ b) $32°$ c) $-15°$ d) $67° \; 30'$

10. Dí si estos ángulos son iguales o diferentes ¿ porqué?



11. Asigna signos a los siguientes ángulos. La flecha en la abertura indica el sentido del giro.



12. ¿ Cómo se forma el ángulo de elevación ?

13. ¿ Qué elementos intervienen en un ángulo de depresión ?

14. ¿ Que es un grado ?

15. ¿ Cómo se llaman las partes de un grado ?

16. ¿ Cuáles son las unidades angulares más conocidas ?

17. Dá la definición de radián

18. ¿ Cuántos grados tiene un radián ?

19. ¿ A cuámtos grados equivalen 3. 14159 . . . radianes ?

20. Comprueba cada una de las transformaciones de grados a radianes que aparecen en la tabla de equivalencias de la pág.

21. Dá la clasificación de los ángulos de acuerdo con su abertura.

22. ¿ Cuáles son los límites de variabilidad de un ángulo
a) entrante, b) obtuso, c) agudo ?

23. Dí si la siguientes parejas de ángulos son complementarios, suplementarios o conjugados

a) 75° y 15°
b) $40^\circ\ 50'$ y $49^\circ\ 50'$
c) 90° y 270°
d) 270° y -90°
e) 180° y 180°

24. Dibuja en su posición normal los ángulos cuyos lados terminales pasan por los puntos siguientes:

a) (– 3,–1) b) (4,6) c) (–7,3)
d) (–4,0) e) (–1,–5) f) (0,–8)

12/8/88

5.6 TRIANGULOS

Si tres puntos no alineados A, B y C se unen por segmentos de recta $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, la figura resultante se llama triángulo y decimos que un triángulo es un polígono cerrado que consta de tres lados y tres ángulos.

En la Fig. 5.20, se presentan tres triángulos diferentes. Los puntos A, B y C se llaman vértices del triángulo.

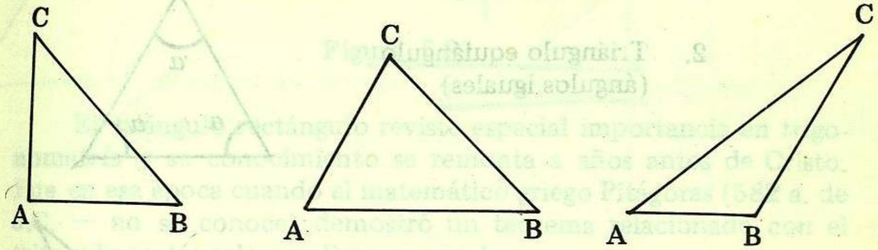
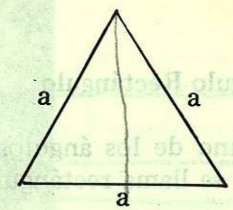


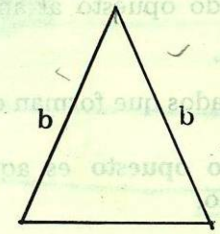
Figura 5.20

Clasificación de los triángulos, de acuerdo con las características de los lados.

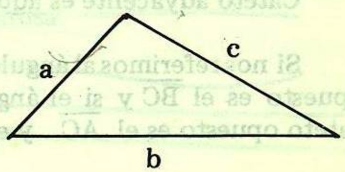
1. Triángulo equilátero
(Lados iguales)



2. Triángulo isósceles
(Dos lados iguales)

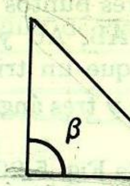


3. Triángulo escaleno
(lados desiguales)



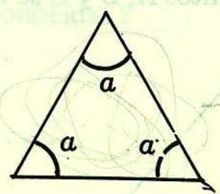
Clasificación de los triángulos atendiendo a las características de los ángulos.

1. Triángulo rectángulo
(un ángulo recto)

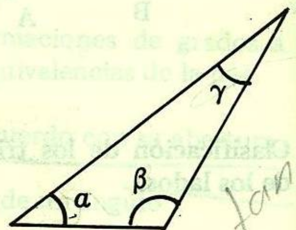


90

2. Triángulo equiángulo
(ángulos iguales)



3. Triángulo oblicuángulo
(ángulos diferentes)



rectang
equiang
Oblicu

El Triángulo Rectángulo

Si uno de los ángulos de un triángulo es recto, entonces el triángulo se llama rectángulo.

El lado opuesto al ángulo recto recibe el nombre de hipotenusa.

Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos.

Cateto opuesto es aquél que está frente al ángulo agudo considerado.

Cateto adyacente es aquél que forma parte del ángulo agudo.

Si nos referimos al ángulo A de la Fig. 5.21, emtonces el cateto opuesto es el $\overline{BC}$ y si el ángulo concîderado es el B, entonces el cateto opuesto es el $\overline{AC}$ y el adyacente el BC.

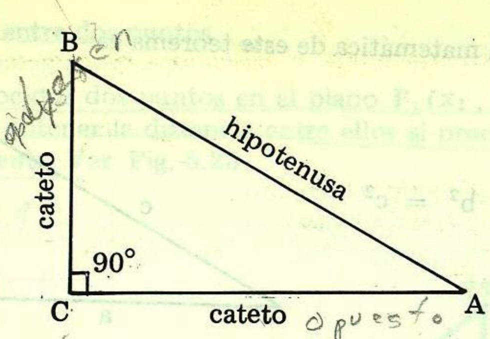
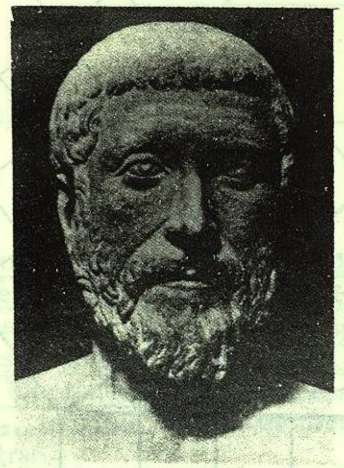


Figura 5.21

El triángulo rectángulo reviste especial importancia en trigonometría y su conocimiento se remonta a años antes de Cristo. Fue en esa época cuando el matemático griego Pitágoras (582 a. de J.C. — no se conoce) demostró un teorema relacionado con el triángulo rectángulo que lleva su nombre.

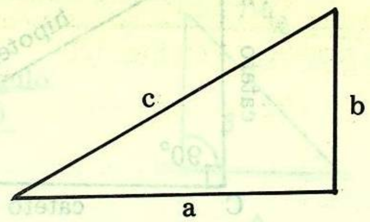


Teorema de Pitágoras

En todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

La expresión matemática de este teorema es:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



La interpretación gráfica del teorema de Pitágoras se da en la Fig. 5.22

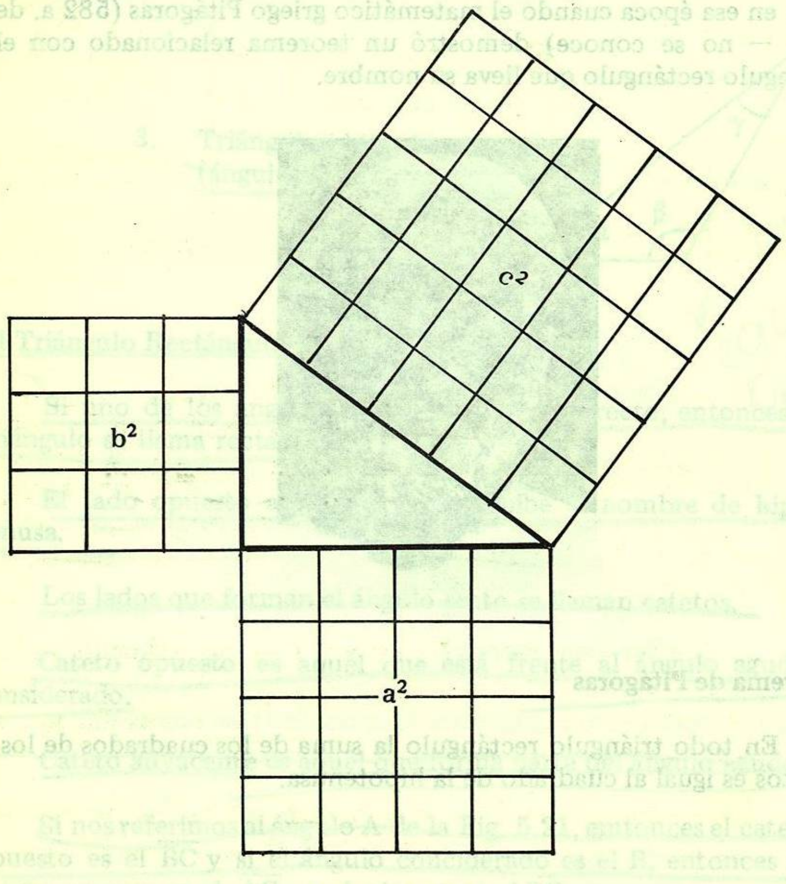


Figura 5.22

Distancia entre dos puntos

Conocidos dos puntos en el plano $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$, podemos obtener la distancia entre ellos si procedemos de la manera siguiente. Ver Fig. 5.23

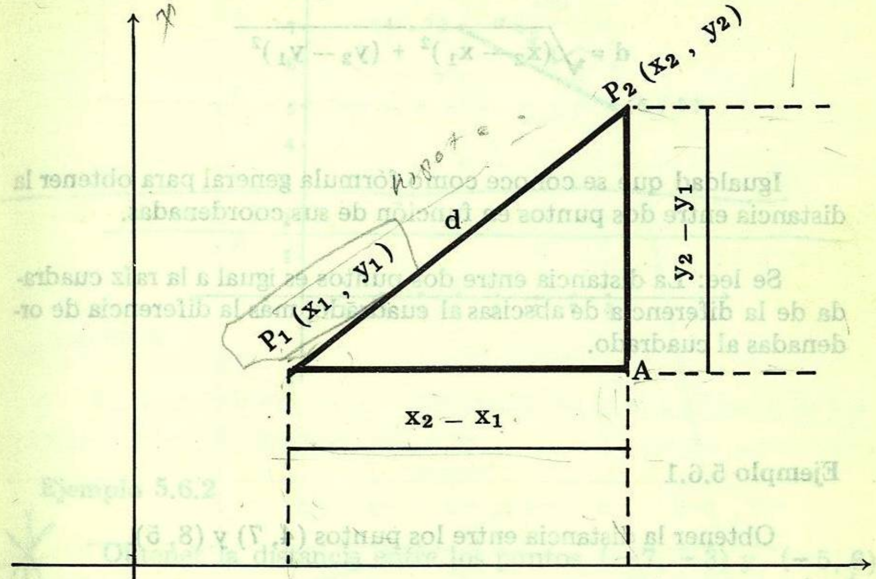


Figura 5.23

Trazamos una línea paralela al eje " X " partiendo de P_1 y bajamos una línea perpendicular al eje " X " a partir de P_2. Estas rectas se cortan en ángulo recto por ser respectivamente perpendiculares a los ejes coordenados, formando el triángulo rectángulo $P_1 A P_2$, cuya hipotenusa es la longitud de la recta que une los puntos P_1 y P_2, longitud que corresponde a la distancia que queremos encontrar.

La longitud del cateto horizontal $P_1 A$ del triángulo rectángulo, la obtenemos por diferencia de abscisas $x_2 - x_1$, la longitud del cateto vertical la obtenemos restando las ordenadas $y_2 - y_1$

La distancia entre los dos puntos dados se obtiene aplicando el Teorema de Pitágoras para obtener el valor de la hipotenusa señalada con la letra d.