$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

Despejando d, obtenemos

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Igualdad que se conoce como fórmula general para obtener la distancia entre dos puntos en función de sus coordenadas.

Se lee: La distancia entre dos puntos es igual a la raíz cuadrada de la diferencia de abscisas al cuadrado, más la diferencia de ordenadas al cuadrado.

Ejemplo 5.6.1

Obtener la distancia entre los puntos (4, 7) y (8, 5).

Solución:

Cualesquiera de los puntos puede tomarse como primer punto.

$P_1\ (4, 7)$, $P_2\ (8, 5)$

Fórmula a usar

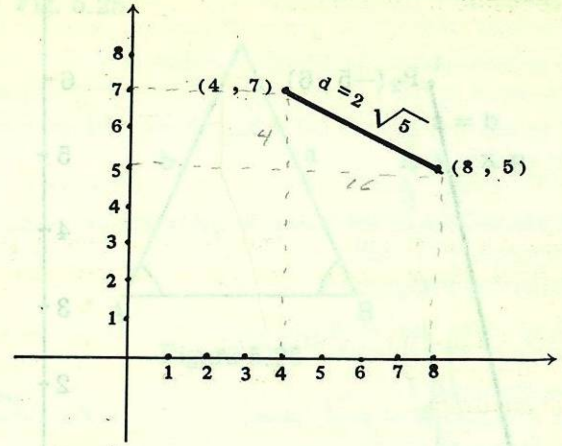
$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Sustituyendo los valores de las coordenadas, tenemos

$$d = \sqrt{(8-4)^2 + (5-7)^2}$$

$$d = \sqrt{16 + 4} \quad = \sqrt{20} \quad = 2\sqrt{5}$$

La figura siguiente corresponde a la gráfica de la distancia entre los dos puntos dados.



Ejemplo 5.6.2

Obtener la distancia entre los puntos (– 7, – 3) y (– 5, 6)

Solución:

Fórmula a usar

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$P_1\ (-7, -3)$, $P_2\ (-5, 6)$

Sustitución

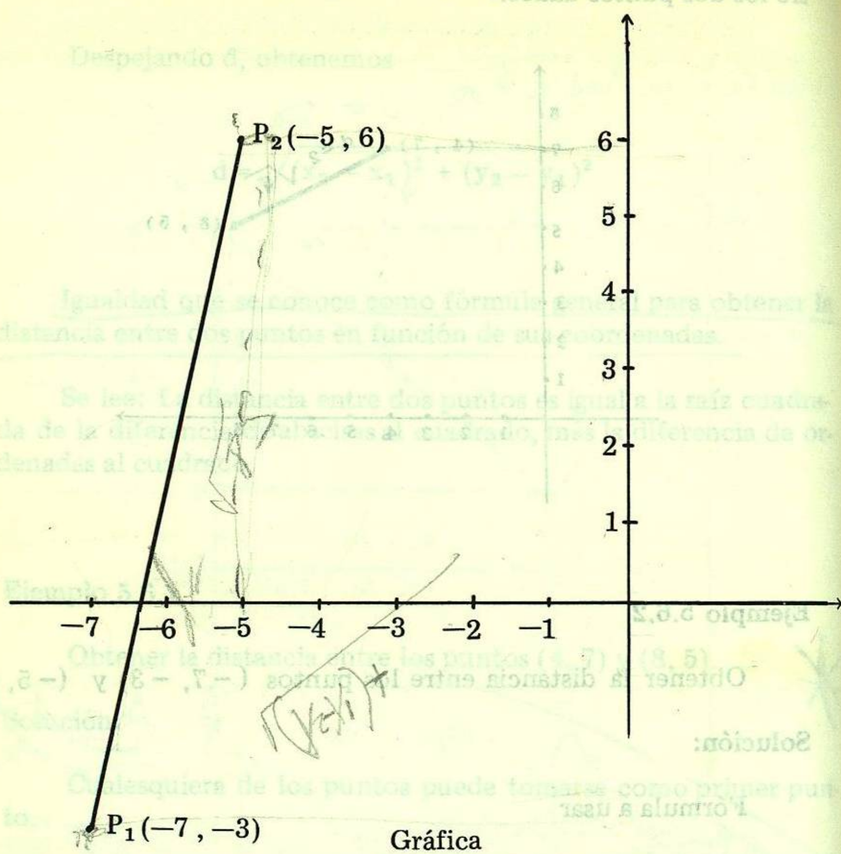
$$d = \sqrt{[-5-(-7)]^2 + [6-(-3)]^2}$$

$$d = \sqrt{(-5+7)^2 + (6+3)^2}$$

$$d = \sqrt{4 + 81}$$

$$d = \sqrt{85}$$

La gráfica del ejemplo 5.6.2 se presenta enseguida.

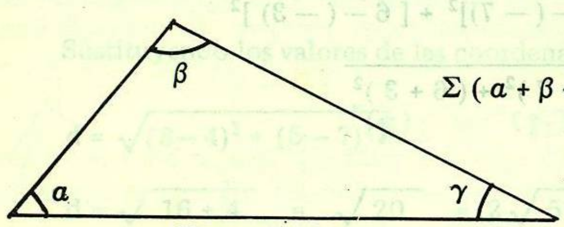


Gráfica

Teoremas de Amplia Aplicación

Teorema 1

La suma de los ángulos interiores de todo triángulo es igual a 180° Fig. 5.24



$$\Sigma\ (\alpha + \beta + \gamma\ ) = 180^\circ = 2\text{rt.}$$

Figura 5.24

Teorema 2

En todo triángulo los ángulos opuestos a los lados iguales son iguales. Ver Fig. 5.25

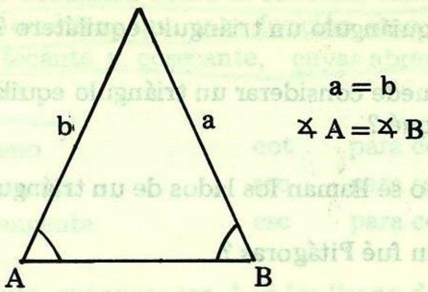


Figura 5.25

Teorema 3

Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de los ángulos internos opuestos. Fig. 5.26

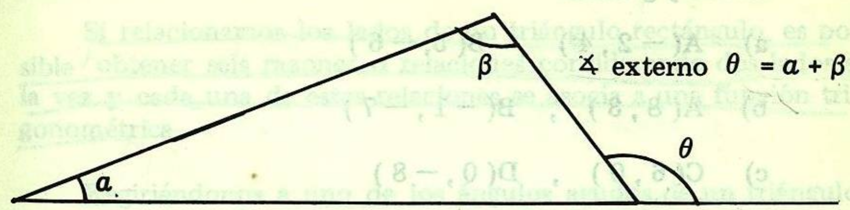


Figura 5.26

Teorema 4

Los ángulos opuestos por el vértice son iguales. Fig. 5.27

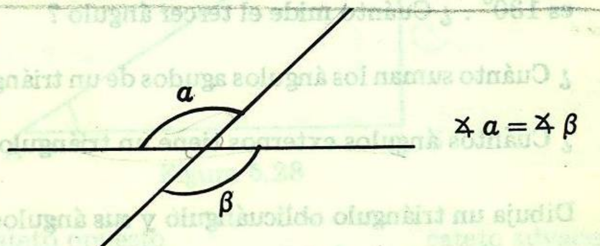


Figura 5.27

Ejercicio 5.2

1. ¿ Cómo se clasifican los triángulos, si se consideran
 a) los lados b) los ángulos ?

2. ¿ Es equiángulo un triángulo equilátero ?

3. ¿ Se puede considerar un triángulo equilátero como isósceles? ¿ Por qué ?

4. ¿ Cómo se llaman los lados de un triángulo rectángulo ?

5. ¿ Quién fué Pitágoras ?

6. Enuncia el teorema de Pitágoras

7. ¿ En qué teorema está basada la deducción de la fórmula de la destancia entre dos puntos ? Escríbela.

8. Obtener la distancia entre los puntos dados en los siguientes incisos y graficar

 a) A(− 2 , 4) , B(5, − 6)

 b) A(8 , 3) , B(− 1 , − 7)

 c) C(6 , 0) , D(0 , − 8)

 d) C(0 , 0) , D(x , y)

 e) A(x , y) , B(h , k)

9. La suma de dos de los ángulos interiores de un triángulo es 130° . ¿ Cuánto mide el tercer ángulo ?

10. ¿ Cuánto suman los ángulos agudos de un triángulo rectángulo?

11. ¿ Cuántos ángulos externos tiene un triángulo ?

12. Dibuja un triángulo oblicuángulo y sus ángulos externos.

13. ¿ Cómo son los ángulos opuestos por el vértice ?

 SI IGUALES

5.7 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

En todas las funciones existe una regla de correspondencia entre las variables independiente y dependiente, sin embargo en ocasiones la regla se considera como la función, éste es el caso de las funciones trigonométicas que son: función seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante, cuyas abreviaturas se escriben a continuación

sen	para seno	cot	para cotangente
cos	para coseno	sec	para secante
tan	para tangente	csc	para cosecante

Si A es un ángulo, entonces sen A se lee "seno de A".

Con las seis funciones se establecen tres pares afines formados por seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosencante; en estos pares de funciones una de ellas es cofunción de la otra.

Funciones trigonométricas de ángulos agudos.

Si relacionamos los lados de un triángulo rectángulo, es posible obtener seis razones o relaciones considerando dos lados a la vez y cada una de estas relaciones se asocia a una función trigonométrica.

Regiriéndonos a uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo Fig. 5.28, tenemos las siguientes definiciones.

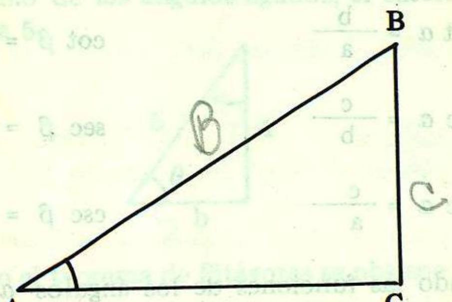


Figura 5.28

$$\text{sen } A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\tan A = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$$

$$\cot A = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} \qquad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$$

Si aplicamos las definiciones anteriores a los ángulos α y β del siguiente triángulo cuyos lados se designan por las letras a, b y c, podemos escribir lo siguiente Fig. 5.29

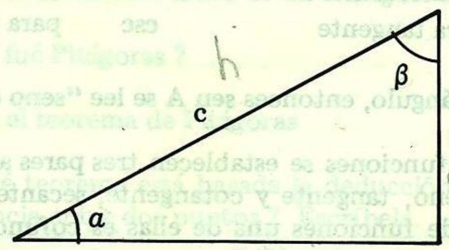


Figura 5.29

$$\text{sen } \alpha = \frac{a}{c} \qquad \text{sen } \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \qquad \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \qquad \tan \beta = \frac{b}{a}$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \qquad \cot \beta = \frac{a}{b}$$

$$\sec \alpha = \frac{c}{b} \qquad \sec \beta = \frac{c}{a}$$

$$\csc \alpha = \frac{c}{a} \qquad \csc \beta = \frac{c}{b}$$

Comparando las funciones de los ángulos α y β observamos que:

$$\text{sen } \alpha = \cos \beta \qquad \cot \alpha = \tan \beta$$
$$\cos \alpha = \text{sen } \beta \qquad \sec \alpha = \csc \beta$$
$$\tan \alpha = \cot \beta \qquad \csc \alpha = \sec \beta$$

Estas igualdades siempre se cumplen si los ángulos son complementarios y se puede decir que una función de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su complemento.

Obtención de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo dado el valor de una de ellas.

Cuando tenemos el valor de una función trigonométrica de un ángulo agudo, podemos asociar los elementos de la razón con los lados del triángulo rectángulo y obtener las funciones restantes sin necesidad de obtener el valor del ángulo.

Ejemplo 5.7.1

Si $\text{sen } \theta = \frac{4}{5}$,

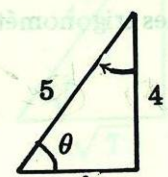
Obtener las demás funciones trigonométricas de θ

Solución:

$$\text{sen } \theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}, \text{ y como sen } \theta = \frac{4}{5} \implies$$

$$\frac{\text{c. opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{4}{5}$$

Con estos datos construyamos el triángulo rectángulo, en donde θ es uno de los ángulos agudos, el cateto opuesto vale 4 y la hipotenusa 5.



Aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene el valor del cateto faltante

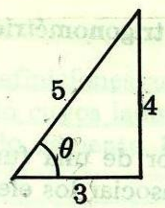
$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$16 + b^2 = 25$$

16 + 9 = 25

$$b = \sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$$

Las funciones trigonométricas se obtienen del siguiente triángulo rectángulo.



$$\text{sen}\,\theta = \frac{4}{5}\ ,\ \cos\theta = \frac{3}{5}\ ;\ \tan\theta = \frac{4}{3}$$

$$\cot\theta = \frac{3}{4}\ ,\ \sec\theta = \frac{5}{3}\ ,\ \csc\theta = \frac{5}{4}$$

Cabe señalar que los valores de los datos del triángulo rectángulo que se obtienen a partir de una función, no son únicos ya que el valor de una fracción se puede obtener por un número infinito de relaciones numéricas, por ejemplo $\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{12}{15}$, ect. Sin embargo los valores de las funciones son las que corresponden al ángulo θ

Ejemplo 5.7.2

Obtener la demás fuciones trigonométricas de θ.

$$\text{Si } \tan\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

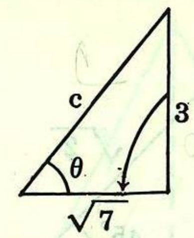
Solución:

$$\tan\theta = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}\ ,\ \Longrightarrow\ \text{como}$$

$$\tan\theta = \frac{3}{\sqrt{7}}\ ,\ \text{se tiene}$$

$$\frac{\text{c. opuesto}}{\text{c. adyacente}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

Construyamos el siguiente triángulo rectángulo.



El valor de la hipotenusa c , lo obtenemos aplicando el teorema de Pitágoras.

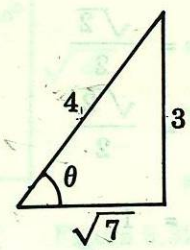
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 = 3^2 + \left(\sqrt{7}\right)^2$$

$$c^2 = 16$$

$$c = 4$$

Por lo tanto las funciones trigonométricas se obtienen del siguiente triángulo.



$$\text{sen}\,\theta = \frac{3}{4}\ ,\ \cos\theta = \frac{\sqrt{7}}{4}\ ,\ \tan = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

$$\cot = \frac{\sqrt{7}}{3}\ ,\ \sec\theta = \frac{4}{\sqrt{7}}\ ,\ ,\csc\theta = \frac{4}{3}$$

Funciones Trigonométricas de los Angulos 45°, 30° y 60°

Si construímos un triángulo rectángulo isósceles cuyos catetos sean iguales e iguales a la unidad, estaremos construyendo un triángulo cuyos ángulos agudos son iguales e iguales a 45°. Fig. 5.30

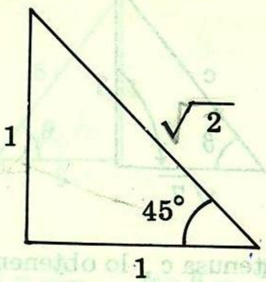


Figura 5.30

La hipotenusa la obtenemos aplicando el Teorema de Pitágoras.

$$h^2 = 1 + 1$$

$$h^2 = 2$$

$$h = \sqrt{2}$$

Las funciones trigonométricas para este ángulo de 45° son:

$$\text{sen } 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\cot 45° = \frac{1}{1} = 1$$

$$\sec 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 45° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

TRIANGULO Equilátero

Construyamos enseguida un triángulo equilátero cuyos lados tengan una longitud de dos unidades. Como todo triángulo equilátero es equiángulo, cada ángulo mide 60°, puesto que la suma de los ángulos interiores es 180°. Fig.5.31

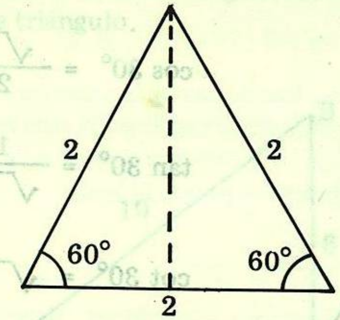
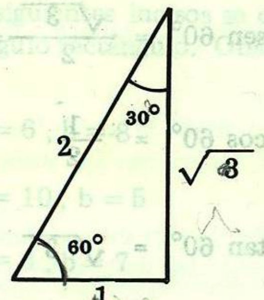


Figura 5.31

La bisectriz* del ángulo opuesto a la base, lo es también de ésta última y del triángulo mismo. Tomando cualesquiera de estas mitades del triángulo inicial, tenemos un triángulo rectángulo cuyos ángulos agudos miden 30° y 60°, de este triángulo obtenemos las funciones correspondientes a los ángulos agudos de 30° y 60°. Aplicando el **Teorema de Pitágoras** obtenemos el valor del cateto desconocido. Fig. 5.32



$$a^2 + b^2 = c^2$$

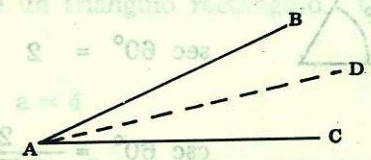
$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$a = \sqrt{4 - 1}$$

$$a = \sqrt{3}$$

Figura 5.32

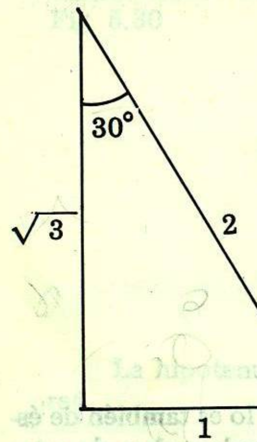
* La recta $\overline{AD}$ es la BISECTRIZ del ángulo BAC si y solo si $\measuredangle$ BAD = $\measuredangle$ DAC.



Teorema. Todo ángulo tiene exactamente una bisectriz.

sen β

Funciones de 30°



$$\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

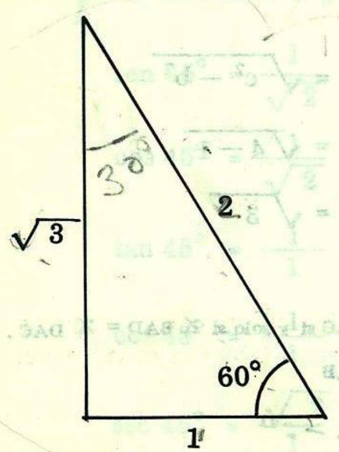
$$\tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

$$\cot 30° = \sqrt{3}$$

$$\sec 30° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

$$\csc 30° = 2$$

Funciones de 60°



$$\text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60° = \sqrt{3}$$

$$\cot 60° = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

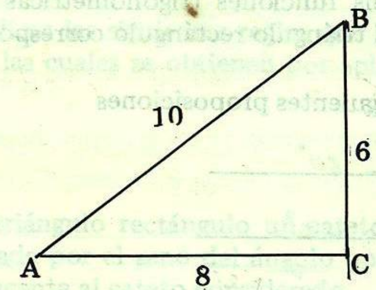
$$\sec 60° = 2$$

$$\csc 60° = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}$$

Ejercicio 5.3

1. Enumera las seis funciones trigonométricas.

2. Obtener las seis funciones trigonométricas para el ángulo A del siguiente triángulo.



3. Obtener las seis funciones trigonométricas para el ángulo B del triángulo del problema anterior.

4. Menciona las cofunciones del sen a , sec a , tan a

   csca, cosa, cota

5. En los siguientes incisos se dan los valores de los catetos de un triángulo rectángulo. Obtener el valor de la hipotenusa.

   i) $a = 6$, $b = 8$

   ii) $a = 10$, $b = 5$

   iii) $a = 3$, $b = 7$

   iv) $a = 4$, $b = 12$

6. En los siguientes incisos se dan los valores de la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo. Obtener el valor del otro cateto.

   i) $c = 8$, $a = 4$

   ii) $c = 10$, $b = 5$

iii) $c = 15$, $a = 6$

iv) $c = \sqrt{2}$, $a = 1$

7. ¿ Qué valores tienen los lados de los triángulos rectángulos de donde se obtienen las funciones de 45° , 30° y 60° ?

8. Obtener las seis funciones trigonométricas de 45° , 30° y 60° a partir del triángulo rectángulo correspondiente.

9. Completa las siguientes proposiciones

sen 30° = cos 60°

tan 45° = cot 45°

sec 70° = csc 30°

cot 60° = tan 30°

csc 15° = sec 75°

cos 85° = sen 15°

10. ¿ En que te besaste para llenar los espacios de la pregunta anterior ?

11. Si el lado de un cuadrado mide 8 unidades de longitud. ¿Cuánto mide su diagonal ? Construye la figura.

12. En los siguientes incisos se dá el valor de una función trigonométrica de un ángulo. Obtener las demás funciones trigonométricas del ángulo dado.

a) $\cos\theta = \frac{4}{9}$ b) $\tan\lambda = \frac{3}{8}$

c) $\sec\beta = \frac{10}{7}$ d) $\operatorname{sen}\gamma = \frac{5}{12}$

e) $\cot\phi = \frac{8}{5}$ f) $\csc\theta = \frac{12}{11}$

13. Si los lados de un rectángulo miden 10 y 6 unidades. ¿ Cuánto mide su diagonal ? Construye la figura.

5.8 RESOLUCION DE TRIANGULOS RECTANGULOS

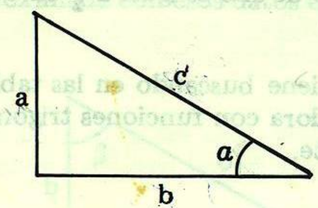
Resolver un triángulo rectángulo significa conocer las longitudes de los tres lados y los valores angulares de los tres ángulos.

Consideraremos los diferentes casos que se pueden presentar, conociendo dos de sus lados o bien uno de sus ángulos agudos y un lado.

Es útil aplicar las siguientes reglas que facilitan la obtención de los catetos, las cuales se obtienen por aplicación de las funciones.

Regla 1

En todo triángulo rectángulo un cateto es igual a la hipotenusa, multiplicada por el seno del ángulo opuesto o por el coseno del ángulo adyacente al cateto considerado.

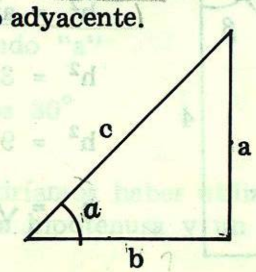


$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c} \quad \Longrightarrow \quad a = c \operatorname{sen}\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \Longrightarrow \quad b = c\cos\alpha$$

Regla 2

En todo triángulo rectángulo un cateto es igual al otro cateto, multiplicado por la tangente del ángulo opuesto o por la cotangente del ángulo adyacente.



$$\tan \alpha = \frac{a}{b} \implies a = b \tan \alpha$$

$$\cot \alpha = \frac{b}{a} \implies b = a \cot \alpha$$

Cuando las incógnitas de un triángulo rectángulo son los ángulos agudos, estos se obtienen a través de una función trigonométrica que relacione dos lados conocidos. Al despejar el valor angular se utiliza la abreviatura de la función escogida, elevada a la potencia -1, como sen^{-1}, $\cos^{-1}$, etc. que significa ángulo cuyo seno o ángulo cuyo coseno respectivamente.

La siguiente proposición es un ejemplo de lo anteriormente explicado.

Si $\text{sen}\, \alpha = \frac{1}{2} \implies \alpha = \text{sen}^{-1} \frac{1}{2}$

Lo cual se lee " si seno de alfa es igual a $\frac{1}{2}$ entonces alfa es el ángulo cuyo seno es $\frac{1}{2}$"

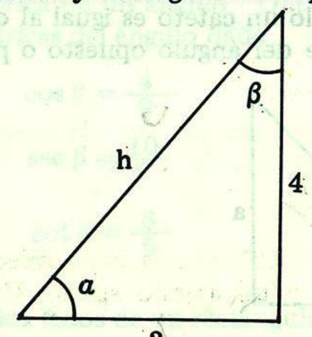
El ángulo se obtiene buscando en las tablas trigonométricas o bien en una calculadora con funciones trigonométricas, el valor angular correspondiente.

Ejemplo 5.8.1

Los catetos de un triángulo rectángulo miden 3 y 4 unidades de longitud. Encontrar la hipotenusa y los ángulos agudos.

Solución:

Construyamos el triángulo rectángulo correspondiente a los catetos dados y obtengamos la hipotenusa



$$h^2 = a^2 + b^2$$

$$h^2 = 3^2 + 4^2$$

$$h^2 = 9 + 16$$

$$h = \sqrt{25} = 5$$

Escogemos la función tangente para obtener los valores angulares.

$$\tan \alpha = \frac{4}{3} \qquad \tan \beta = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{4}{3} \qquad \beta = \tan^{-1} \frac{3}{4}$$

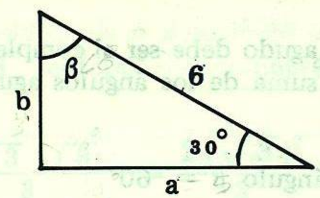
$$\alpha = \tan^{-1} 1.333\ldots \qquad \beta = \tan^{-1} 0.75$$

Ejemplo 5.8.2

Uno de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es de 30° y la hipotenusa mide 6. Resolver el triángulo.

Solución:

La figura aproximada con esos datos es:



Utilizando una de las funciones trigonométricas que relacione el ángulo y el lado dados con uno de los catetos desconocidos se tiene:

$\cos 30° = \frac{a}{6}$ entonces,

Despejando "a"

$a = 6 \cos 30°$

También podríamos haber utilizado la regla directa puesto que conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo. Utilizándola tenemos:

$$a = 6 \cos 30^\circ$$

$$b = 6 \text{ sen } 30^\circ$$

.866

Un cateto es igual a la hipotenusa multiplicada por el seno del ángulo opuesto o por el coseno del ángulo adyacente.

Sabemos que:

$$\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{entonces}$$

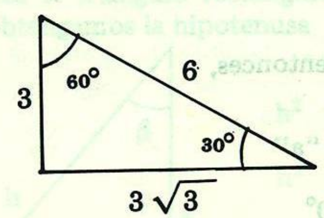
$$a = 6\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3\sqrt{3}$$

$$b = 6\left(\frac{1}{2}\right) = 3$$

El otro ángulo agudo debe ser el complemento del ángulo de 30°, puesto que la suma de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo es 90°.

Por lo tanto el ángulo $\beta = 60^\circ$

El diagrama del triángulo resuelto se presenta enseguida.



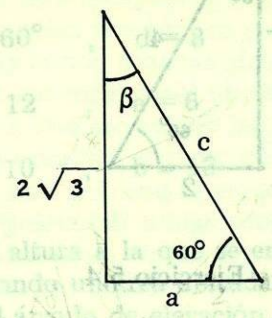
Ejemplo 5.8.3

Resolver el triángulo rectángulo que tiene un ángulo agudo de 60° y el cateto opuesto a él mide $2\sqrt{3}$ ..

∢A = 60°
b = 2√3

Solución:

El diagrama inicial del triángulo rectángulo en cuestión es:



Usando la regla directa que nos dice que un cateto es igual al otro cateto, multiplicado por la cotangente del ángulo adyacente, tenemos:

$$a = 2\sqrt{3} \quad \cot 60^\circ \quad , \quad \cot 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{entonces} \quad a = \frac{2\sqrt{3}\ \sqrt{3}}{3} = \frac{2(\sqrt{3})^2}{3} = 2$$

Una vez conocidos los dos catetos, la hipotenusa la obtenemos aplicando el Teorema de Pitágoras.

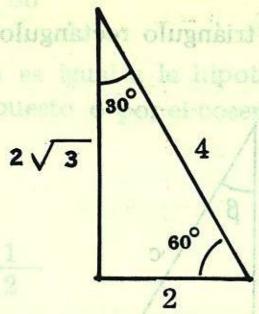
$$c^2 = (2)^2 + (2\sqrt{3})^2$$

$$c^2 = 4 + 12 = 16$$

$$c = 4$$

El ángulo $\beta = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

El diagrama final del triángulo resuelto es:



Ejercicio 5.4

1. ¿ Que significa resolver un triángulo rectángulo ?

2. ¿ Cuántos elementos se deben conocer como mínimo para poder resolver un triángulo rectángulo ?

3. Si conocemos la hipotenusa y un ángulo agudo. ¿ Qué regla aplicamos para encontrar los catetos ?

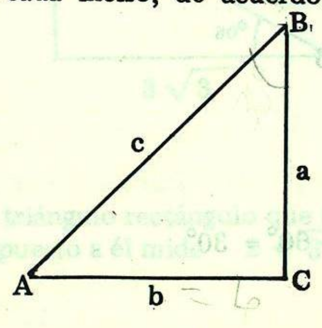
4. Si conocemos un cateto y un ángulo agudo. ¿ Qué regla aplicamos para obtener el otro cateto ?

5. ¿ Cómo se leen las siguientes proposiciones ?

   a) $\text{sen}^{-1}\ 0.5$ b) $\cot^{-1} \frac{\sqrt{2}}{2}$

   c) $\tan^{-1} 1$ d) $\sec^{-1} \infty$

6. Resolver los siguientes triángulos rectángulos, cuyos datos se dan en cada inciso, de acuerdo con la figura siguiente



a) $\measuredangle B = 30°$, $b = 6$

b) $\measuredangle A = 45°$, $a = 4$

c) $\measuredangle B = 70°$, $c = 10$

d) $\measuredangle A = 60°$, $d = 8$

e) $c = 12$, $a = 6$

f) $a = 10$, $b = 13$

7. Encontrar la altura a la que se encuentra un aeroplano que está sobrevolando un área ubicada a 2,000 m de una batería antiaérea. El ángulo de elevación del avión, desde la batería es de 30°.

8. Un aeroplano vuela a una altura de 2,200 m sobre el nivel del mar, cuando pasa sobre su portaviones. En el mismo instante se advierte la presencia de un submarino, cuyo ángulo de depresión es de 28°, desde el aeroplano. Calcular la distancia entre el submarino y el portaviones.