5.9 FUNCIONES TRIGONOMETRICAS PARA ANGULOS AGUDOS, OBTUSOS Y ENTRANTES.

Los triángulos rectángulos con ángulos agudos de 45°, 30° y 60°, son básicos para obtener las razones trigonométricas de ángulos obtusos y entrantes, si colocamos uno de estos triángulos en los diferentes cuadrantes del sistema cartesiano, cuidando que la base del triángulo coincida siempre con el eje de las " X ". En esta posición, las longitudes de los catetos del triángulo rectángulo pasan a ser coordenadas del vértice opuesto a la base, la longitud de la hipotenusa se considera como la distancia del punto al origen y como toda distancia, siempre es positiva. Con estas consideraciones, las funciones del ángulo agudo del triángulo rectángulo corresponden a las funciones del ángulo cuyo lado inicial es la parte positiva del eje " X " y el lado terminal coincide con la posición de la hipotenusa.

Al definir las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes, reportarán diferentes signos.

Las siguientes figuras muestran la posición del triángulo rectángulo en los diferentes cuadrantes, al cual llamaremos triángulo trigonométrico. Fig.5.33 y 5.34

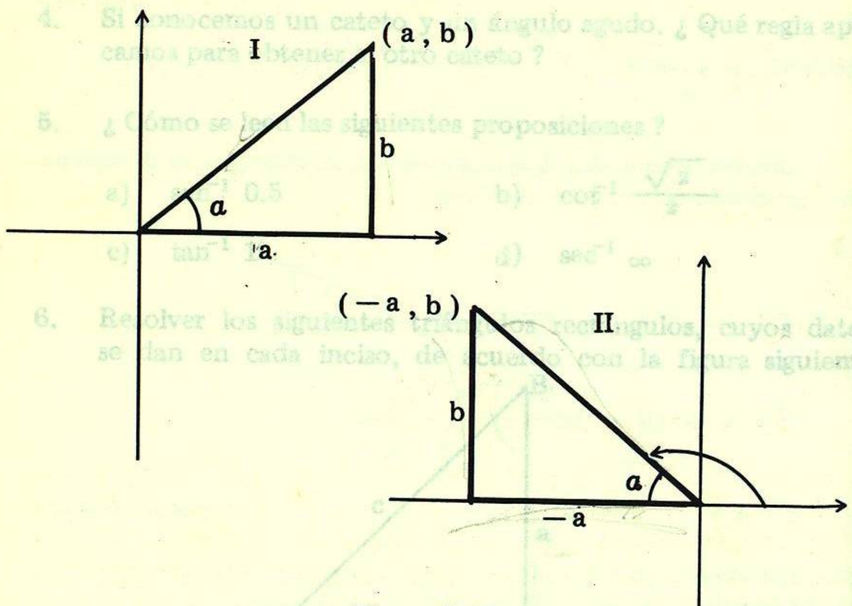


Figura 5.33

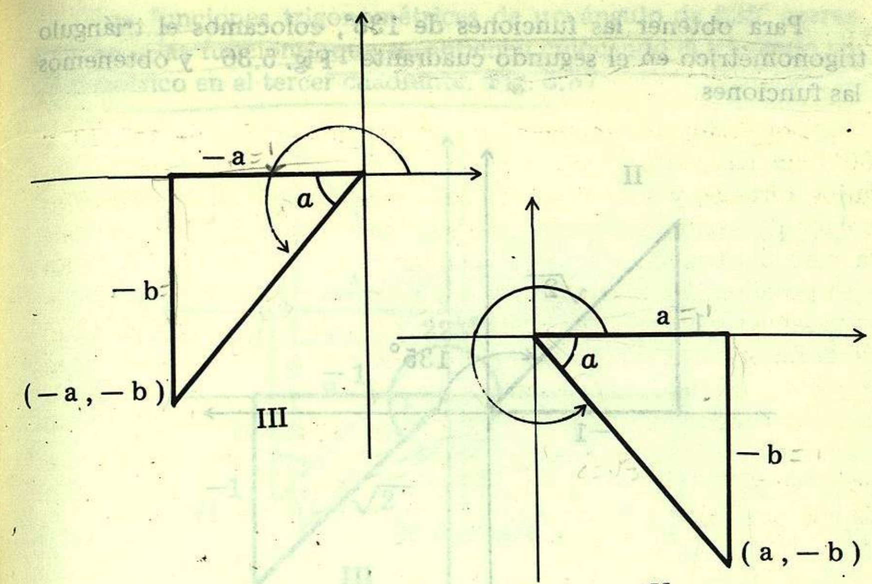


Figura 5.34

FUNCIONES DE 45°, 135°, 225° y 315°

Estas funciones se obtienen si colocamos el triángulo rectángulo de 45° en los diferentes cuadrantes. Así si lo colocamos en el primer cuadrante obtenemos la Fig. 535

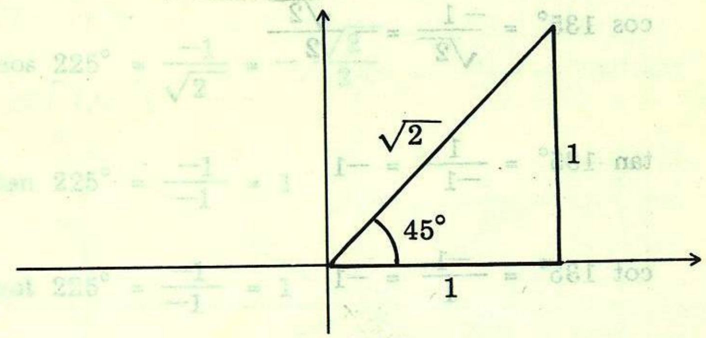


Figura 5.35

Si el triángulo trigonométrico está ubicado en el primer cuadrante, los valores de las funciones trigonométricas coinciden con las obtenidas considerando el triángulo respectivo como figura libre. Véanse los valores de las funciones trigonométricas de 45° dadas en la pág. 108

Para obtener las funciones de 135°, colocamos el triángulo trigonométrico en el segundo cuadrante Fig. 5.36 y obtenemos las funciones

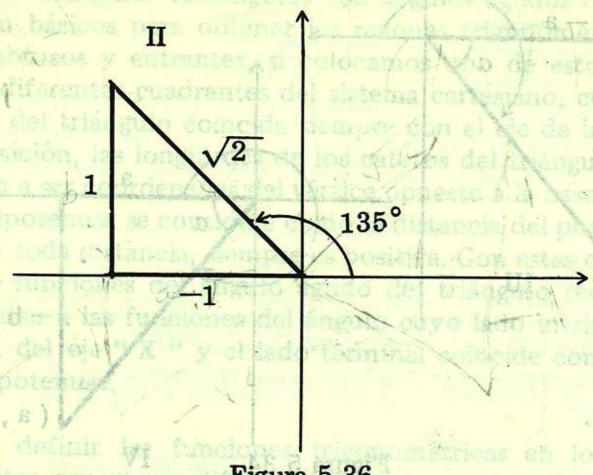


Figura 5.36

$$\text{sen } 135° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 135° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 135° = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\cot 135° = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\sec 135° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\csc 135° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

Las funciones trigonométricas de un ángulo de 225° corresponden a las funciones que se obtienen colocando el triángulo trigonométrico en el tercer cuadrante. Fig. 5.37

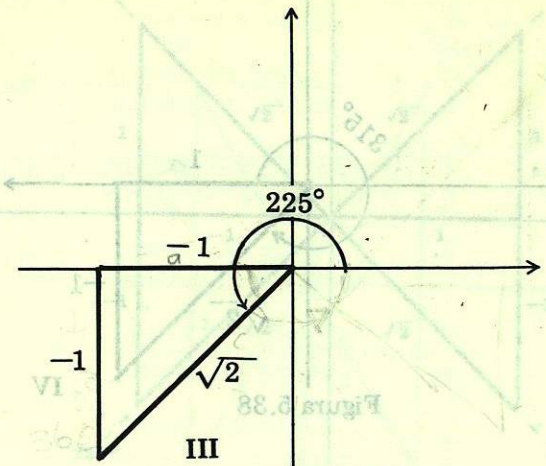


Figura 5.37

$$\text{sen } 225° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 225° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 225° = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\cot 225° = \frac{-1}{-1} = 1$$

$$\sec 225° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

$$\csc 225° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Ahora si colocamos el triángulo trigonométrico en el cuarto cuadrante, se tienen las funciones de 315°. Ver Fig. 5.38

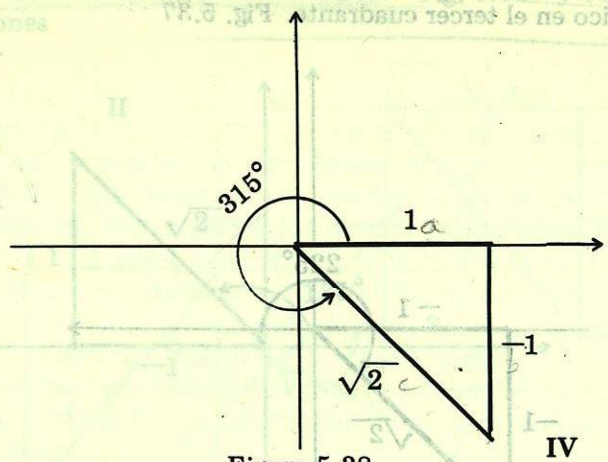


Figura 5.38

$$\text{sen } 315° = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 315° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan 315° = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\cot 315° = \frac{1}{-1} = -1$$

$$\sec 315° = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$\csc 315° = \frac{\sqrt{2}}{-1} = -\sqrt{2}$$

Si colocamos los cuatro triángulos en un solo diagrama, lograremos la Fig. 5.39

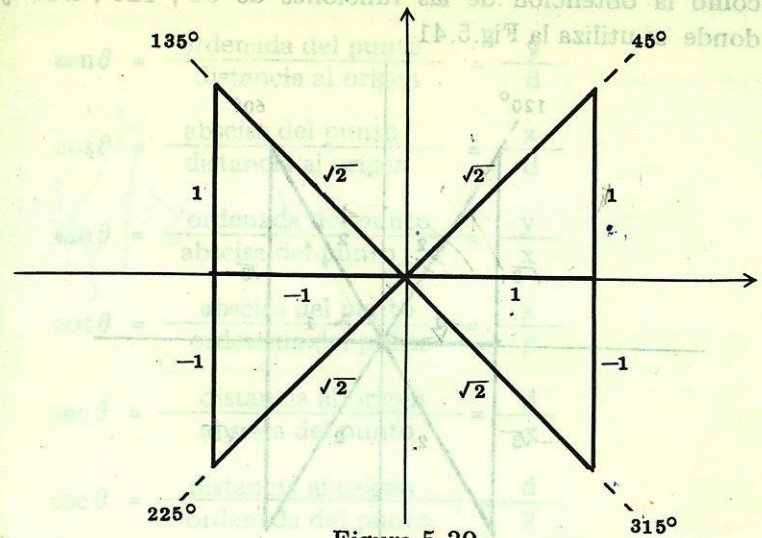


Figura 5.39

FUNCIONES DE 30°, 150°, 210° y 330°

De manera análoga al análisis hecho en la exposición del punto anterior, se tienen las funciones trigonométricas para los ángulos de 30°, 150°, 210° y 330° utilizando la Fig. 5.40

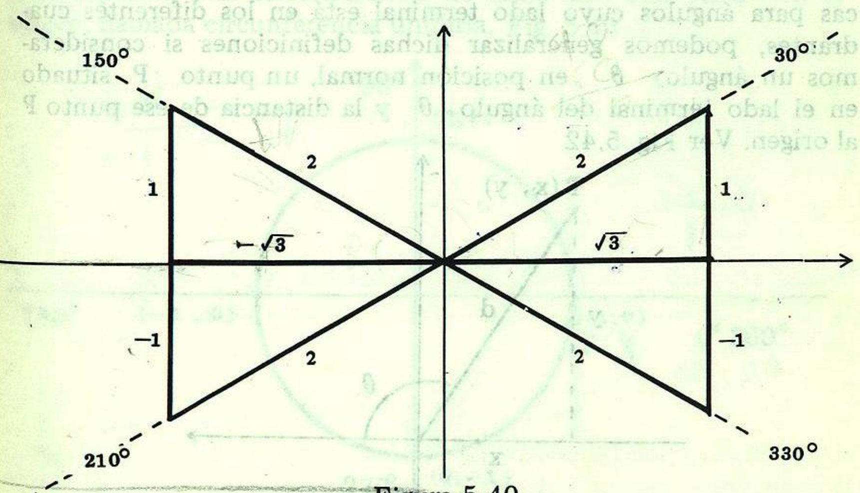


Figura 5.40

La obtención se deja como ejercicio al estudiante, así también como la obtención de las funciones de 60°, 120°, 240° y 300° donde se utiliza la Fig.5.41

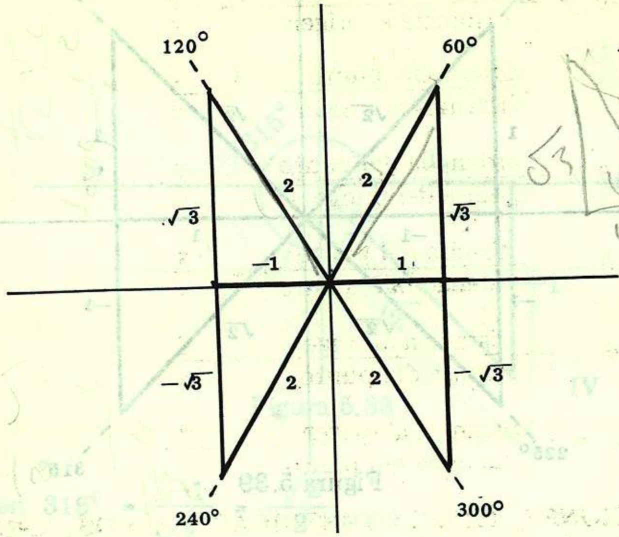


Figura 5.41

5.10 OBTENCION DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE CUALQUIER ANGULO.

Partiendo de las definiciones de las funciones trigonométricas para ángulos cuyo lado terminal está en los diferentes cuadrantes, podemos generalizar dichas definiciones si consideramos un ángulo θ en posición normal, un punto P situado en el lado terminal del ángulo θ y la distancia de ese punto P al origen. Ver Fig. 5.42

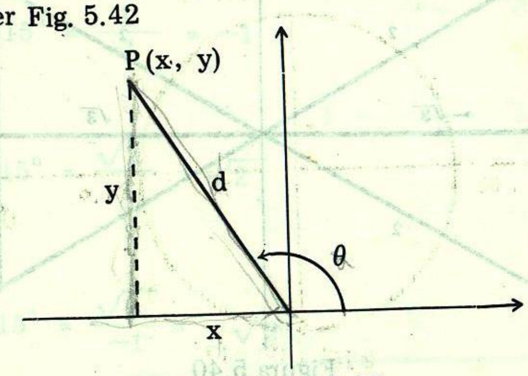


Figura 5.42

Definición de las funciones

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\text{ordenada del punto}}{\text{distancia al origen}} = \frac{y}{d}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{abscisa del punto}}{\text{distancia al origen}} = \frac{x}{d}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{ordenada del punto}}{\text{abscisa del punto}} = \frac{y}{x}$$

$$\cot\theta = \frac{\text{abscisa del punto}}{\text{ordenada del punto}} = \frac{x}{y}$$

$$\sec\theta = \frac{\text{distancia al origen}}{\text{abscisa del punto}} = \frac{d}{x}$$

$$\csc\theta = \frac{\text{distancia al origen}}{\text{ordenada del punto}} = \frac{d}{y}$$

FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DE LOS ANGULOS DE 0°, 90°, 180°, 270° y 360°

Estos ángulos tienen la características de que sus lados terminales coinciden con alguno de los ejes coordenados.

Las funciones trigonométricas de estos ángulos se obtienen construyendo una circunferencia de radio uno con centro en el origen, llamada circunferencia unitaria. Fig. 5.43

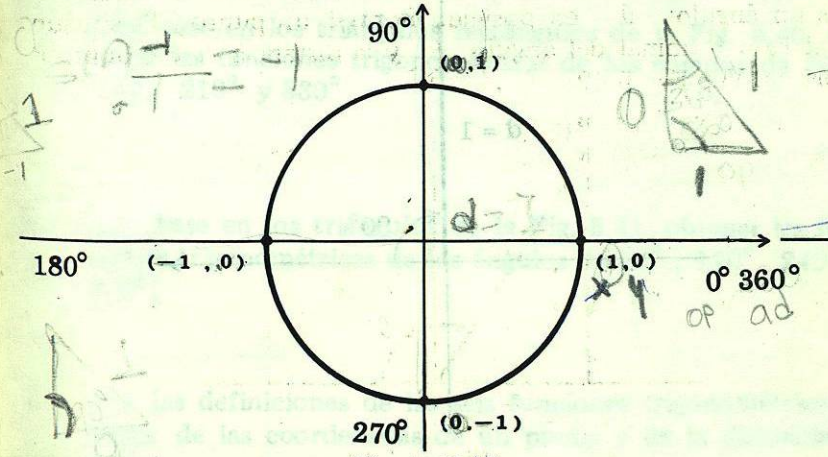


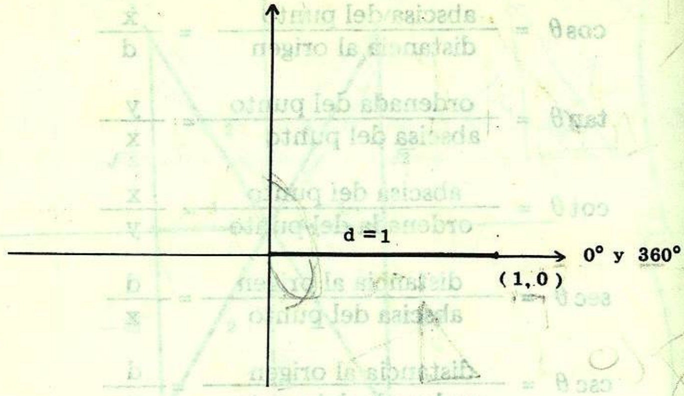
Figura 5.43

sen $= \frac{1}{1} = 1$

cos $\frac{0}{1} = 0$

Si localizamos puntos sobre los lados terminales de los ángulos múltiplos de $\frac{\pi}{2}$ tenemos como coordenadas (1, 0), (0, 1), (—1, 0), (0,—1) y aplicando las definiciones generales, obtenemos

Funciones de 0° y 360°



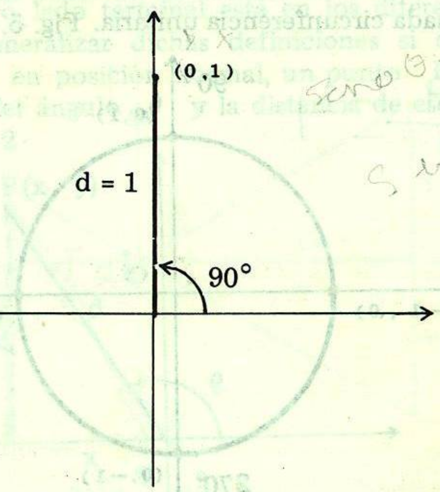
$\text{sen}\,0° = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\cot 0° = \frac{1}{0} = \infty$

$\cos 0° = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $\sec 0° = \frac{1}{1} = 1$

$\tan 0° = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\csc 0° = \frac{1}{0} = \infty$

Las funciones de 360° tienen los mismos valores que las de 0°

Funciones de 90°



$\text{sen}\ 90° = \frac{1}{1} = 1$ $\qquad$ $\cot\ 90° = \frac{0}{1} = 0$

$\cos\ 90° = \frac{0}{1} = 0$ $\qquad$ $\sec\ 90° = \frac{1}{0} = \infty$

$\tan\ 90° = \frac{1}{0} = \infty$ $\qquad$ $\csc\ 90° = \frac{1}{1} = 1$

Se deja al estudiante como ejercicio la obtención de las funciones de 180° y 270°.

Ejercicio 5.5

1. ¿ En qué posición debe estar colocado el triángulo trigonométrico, en el sistema cartesiano ?

2. Dibuja el triángulo trigonométrico en los diferentes cuadrantes

3. Con base en los triángulos rectángulos de la Fig. 5.40, obtener las funciones trigonométricas de los ángulos de 30° , 150° , 210° y 330° .

4. Con base en los triángulos de la Fig. 5.41, obtener las funciones trigonométricas de los ángulos de 60° , 120° , 240° y 300°.

5. Dar las definiciones de las seis funciones trigonométricas a partir de las coordenadas de un punto y de la distancia al origen.

6. Obtener las funciones trigonométricas de 180° y 270°, a partir de la circunferencia unitaria.

7. ¿ En cúales cuadrantes es positiva la función coseno ?

8. Forma una tabla donde especifiques el signo de las funciones en los diferentes cuadrantes.

9. En cada uno de los siguientes incisos, obtener las funciones trigonométricas del ángulo en posición normal cuyo lado final pasa por el punto indicado.

a) $(\sqrt{3}, -1)$ c) $(0, -1)$

b) $(-1, 1)$ d) $(-1, -1)$

5.11 FUNCIONES DE ANGULOS NEGATIVOS EN TERMINOS DEL ANGULO POSITIVO

En la Fig. 5.44 se presenta un ángulo positivo θ y el negativo de este ángulo $(-\theta)$. Fig. 5.44

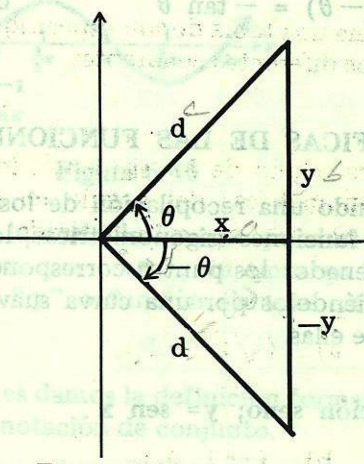


Figura 5.44

Obteniendo las funciones trigonométricas de θ y $(-\theta)$ podemos establecer la relación entre ellas.

$\text{sen } \theta = \dfrac{y}{d}$ $\text{sen } (-\theta) = \dfrac{-y}{d}$

$\cos \theta = \dfrac{x}{d}$ $\cos (-\theta) = \dfrac{x}{d}$

$\tan \theta = \dfrac{y}{x}$ $\tan (-\theta) = \dfrac{-y}{x}$

$\cot \theta = \dfrac{x}{y}$ $\cot (-\theta) = \dfrac{x}{-y}$

$\sec \theta = \dfrac{d}{x}$ $\sec (-\theta) = \dfrac{d}{x}$

$\csc \theta = \dfrac{d}{y}$ $\csc (-\theta) = \dfrac{d}{-y}$

Comparando las dos columnas, tenemos

$\text{sen}\ (-\theta) = -\text{sen}\ \theta$ $\qquad$ $\cot\ (-\theta) = -\cot\ \theta$

$\cos\ (-\theta) = \cos\ \theta$ $\qquad$ $\sec\ (-\theta) = \sec\ \theta$

$\tan\ (-\theta) = -\tan\ \theta$ $\qquad$ $\csc\ (-\theta) = -\csc\ \theta$

5.12 GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS.

Haciendo una recopilación de los valores angulares de cada una de las funciones trigonométricas, localizando en el sistema de ejes coordenados los puntos correspondientes a cada pareja ordenada y uniéndolos por una curva suave, obtenemos la gráfica de cada una de ellas.

Función seno; y= sen x

TABLA DE VALORES

x	y	x	y
0°	0	210°	−0.5
30°	0.5	225°	−0.71
45°	0.71	240°	−0.86
60°	0.87	270°	−1
90°	1	300°	−0.87
120°	0.87	315°	−0.71
135°	0.71	330°	−0.5
150°	0.5	360°	0
180°	0		

Los valores angulares los transformamos a radianes y en esa forma los localizamos sobre el eje de las "X", los valores de la función se localizan sobre el eje "Y". Ver figura Fig. 5.45

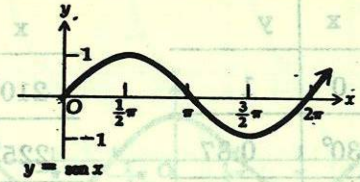


Figura 5.45

Los valores dados a la variable x se pueden ampliar a ángulos negativos y mayores que 2π, sin embargo los valores de la variable dependiente "y" o función siempre estarán entre − 1 y 1.

Con los datos anteriores damos la definición formal de la función seno expresada en la notación de conjunto.

$$\text{Sen} = \left\{ (x, y) \mid y = \text{sen}\ x\ ,\ x \in R\ ;\ y \in [-1\ ;\ 1] \right\}$$

La cual se lee: La función seno es igual al conjunto de parejas ordenadas (x , y), tal que y = sen x , el dominio de la función son los números reales y el recorrido de la función es el intervalo cerrado de − 1 a 1.

Las seis funciones trigonométricas son funciones periódicas, repitiéndose el período un número infinito de veces por lo tanto la gráfica se presenta en la Fig. 5.46

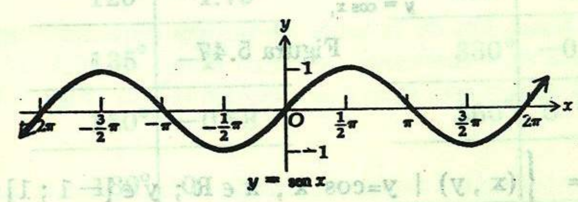


Figura 5.46

Funcion coseno ; $y = \cos x$

TABLA DE VALORES

x	y
0°	1
30°	0.87
45°	0.71
60°	0.5
90°	0
120°	−0.5
135°	−0.71
150°	−0.87
180°	−1

x	y
210°	−0.87
225°	−0.71
240°	−0.5
270°	0
300°	0.5
315°	0.71
330°	0.87
360°	1

Localizando los puntos correspondientes a cada uno de los pares ordenados de la tabla anterior, obtenemos la gráfica de la función coseno. Fig. 5.47

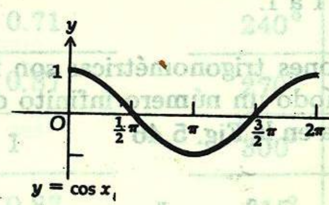


Figura 5.47

Definición

$$\mathrm{Cos} = \left\{ (x, y) \mid y = \cos x, \; x \in R \; ; \; y \in [-1 \; ; 1] \right\}$$

Lo cual se lee: la función coseno es igual al conjunto de parejas ordenadas (x,y), tal que $y = \cos x$, el dominio de la función son los números reales y el recorrido de la misma es el intervalo cerrado de -1 a 1.

Si repetimos el período, obtenemos la Fig. 5.48 para la función coseno.

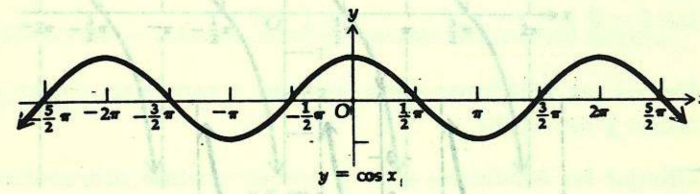


Figura 5.48

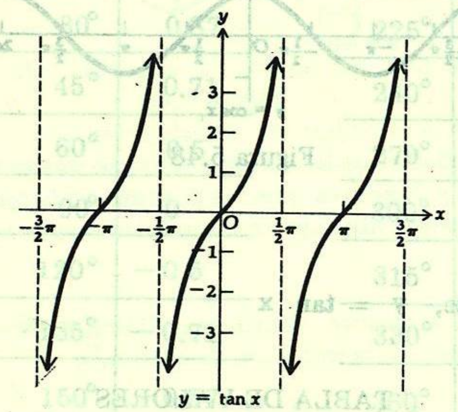
Función tangente, $y = \tan x$

TABLA DE VALORES

x	y
0°	0
30°	0.58
45°	1
60°	1.73
90°	∞
120°	−1.73
135°	−1
150°	−0.58
180°	0

x	y
210°	0.58
225°	1
240°	1.73
270°	∞
300°	−1.73
315°	−1
330°	−0.58
360°	0

El análisis de esta tabla nos indica que para los valores angulares de 90° y 270°, el valor de la función es infinito, en estos casos la curva se fuga al infinito, teniendo como límite una recta vertical llamada asíntota. Estas rectas se dibujan a través de cada uno de los puntos $\frac{\pi}{2} + n\,\pi$ donde n es un número entero. Ver Fig. 5.49



Definición

$$\text{Tan} = \left\{ (x, y) \mid y = \tan x,\ x \in R,\ x \neq \left(\frac{\pi}{2} + n\,\pi\right)\ ;\ y \in R \right\}$$

La construcción de la tabla de valores para las funciones **cotangente, secante y cosecante** se dejan como ejercicio al estudiante. Las gráficas respectivas se dan a continuación. Figs. 5.50 5.51 y 5.52

Los puntos de las curvas localizadas a la izquierda del eje "Y" se obtienen dando valores angulares negativos a la variable x.

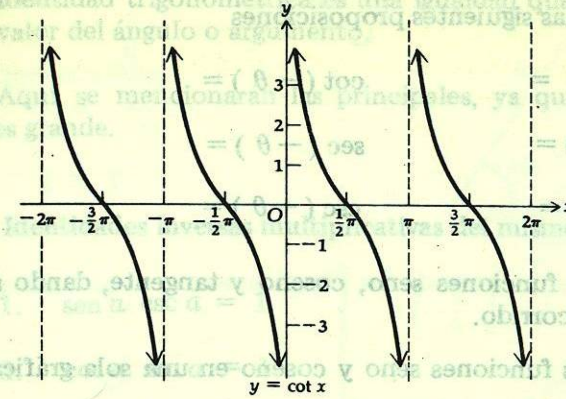


Figura 5.50

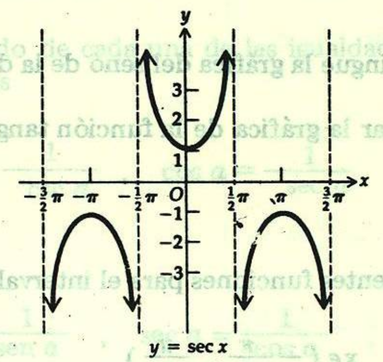


Figura 5.51

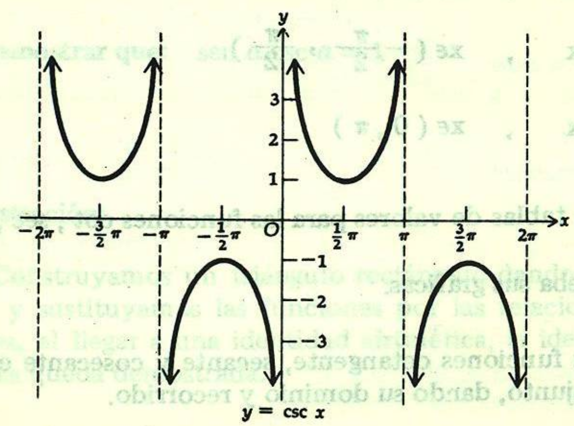


Figura 5.52

Ejercicio 5.6

1. **Completa las siguientes proposiciones**

   $\text{sen}(-\theta) =$ $\qquad$ $\cot(-\theta) =$

   $\cos(-\theta) =$ $\qquad$ $\sec(-\theta) =$

   $\tan(-\theta) =$ $\qquad$ $\csc(-\theta) =$

2. **Define las funciones seno, coseno y tangente, dando su dominio y recorrido.**

3. **Dibujar las funciones seno y coseno en una sola gráfica para el período de 0° a 360°**

4. **¿ En qué se distingue la gráfica del seno de la del coseno ?**

5. **¿ Se puede trazar la gráfica de la función tangente sin despegar el lápiz ?**

6. **Grafica las siguientes funciones para el intervalo que se indica**

   a) $\tan x \quad , \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

   b) $\cot x \quad , \quad x \in (0, \pi)$

   c) $\sec x \quad , \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

   d) $\csc x \quad , \quad x \in (0, \pi)$

7. **Forma las tablas de valores para las funciones cot , sec , y csc y comprueba sus gráficas.**

8. **Define las funciones cotangente, secante y cosecante en forma de conjunto, dando su dominio y recorrido.**

5.13 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS

Identidad trigonométrica es una igualdad que se cumple para todo valor del ángulo o argumento.

Aquí se mencionarán las principales, ya que el número de ellas es grande.

Identidades inversas multiplicativas del mismo ángulo.

1. $\text{sen}\,a \csc a = 1$

2. $\cos a \sec a = 1$

3. $\tan a \cot a = 1$

Despejando de cada una de las igualdades una de las funciones, obtenemos

$$\text{sen}\ a = \frac{1}{\csc a}\ , \quad \cos a = \frac{1}{\sec a}\ , \quad \tan a = \frac{1}{\cot a}$$

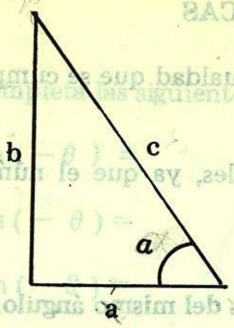
o bien

$$\csc a = \frac{1}{\text{sen}\ a}\ , \quad \sec a = \frac{1}{\cos a}\ , \quad \cot a = \frac{1}{\tan a}$$

Demostrar que: $\text{sen}\ a \csc a = 1$

Demostración:

Construyamos un triángulo rectángulo dando nombres a sus lados y sustituyamos las funciones por las relaciones correspondeintes, al llegar a una identidad airtmética, la identidad trigonométrica queda demostrada.



$$\text{sen}\,\alpha \csc \alpha = 1$$

$$\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b} = 1$$

$$\frac{bc}{bc} = 1$$

$$1 \equiv 1$$

Las demostraciones de las identidades 2 y 3 se dejan al estudiante.

Identidades Pitagóricas

4. $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \tan\ \alpha$

5. $\dfrac{\cos\ \alpha}{\text{sen}\ \alpha} = \cot\ \alpha$

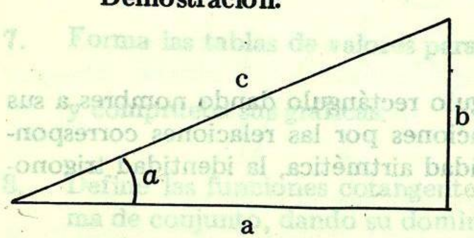
6. $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$

7. $1 + \tan^2\ \alpha = \sec^2\ \alpha$

8. $1 + \cot^2\ \alpha = \csc^2\ \alpha$

Demostrar que: $\dfrac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \tan\ \alpha$

Demostración:



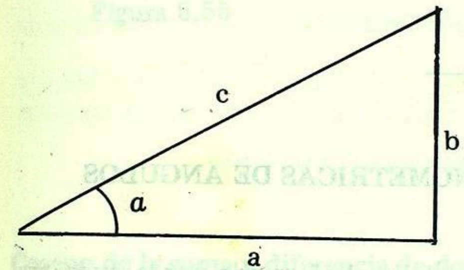
$$\frac{\text{sen}\ \alpha}{\cos\ \alpha} = \tan\ \alpha$$

$$\frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{a}$$

$$\frac{b}{a} \equiv \frac{b}{a}$$

Demostrar que: $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$

Demostración:



$$\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$$

$$\left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2 = 1$$

$$\frac{b^2}{c^2} + \frac{a^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{b^2 + a^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{c^2}{c^2} = 1$$

$$1 \equiv 1$$

Las identidades 7 y 8 pueden obtenerse de la identidad 6 por transformaciones permitidas a saber:

Transformar la identidad $\text{sen}^2\ \alpha + \cos^2\ \alpha = 1$

en $1 + \tan^2\ \alpha = 1$

Transformación:

$$\frac{\text{sen}^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} + \frac{\cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha} = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Una igualdad no se altera si los dos miembros se dividen entre la misma cantidad.