$\tan^2 a + 1 = \sec^2 a$	Utilizando las identidades $\dfrac{\text{sen}\, a}{\cos a} = \tan a$ y $\dfrac{1}{\cos a} = \sec a$
$1 + \tan^2 a = \sec^2 a$	La propiedad conmutativa de la adición.

5.14 IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS DE ANGULOS COMPUESTOS.

Angulo compuesto es aquel ángulo formado por la suma, resta, multiplicación o división de dos ángulos simples. Si representamos geométricamente estos ángulos, obtenemos las Figs. 5.53, 5.54, 5.55 y 5.56.

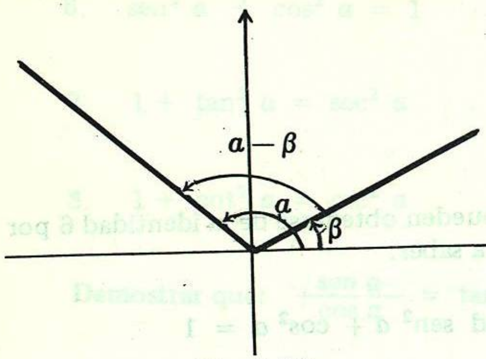


Fig. 5.53

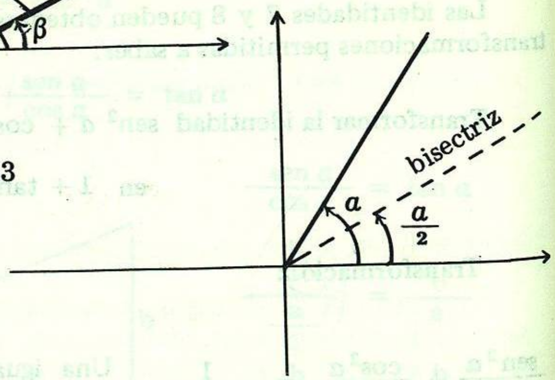


Fig. 5.54

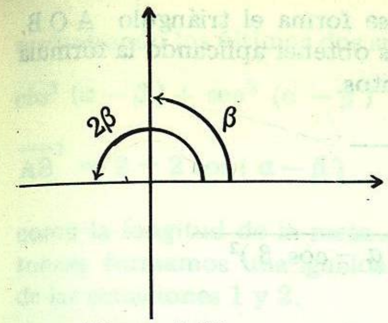


Figura 5.55

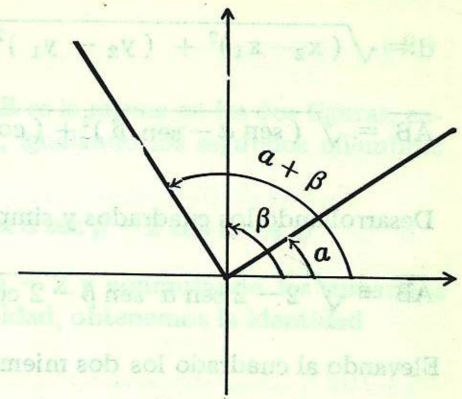


Figura 5.56

Coseno de la suma y diferencia de dos ángulos.

Para obtener la indentidad del coseno de la diferencia de dos ángulos, construyamos una circunferencia unitaria con centro en el origen y marquemos los ángulos a y β en posición normal. Fig.5.57

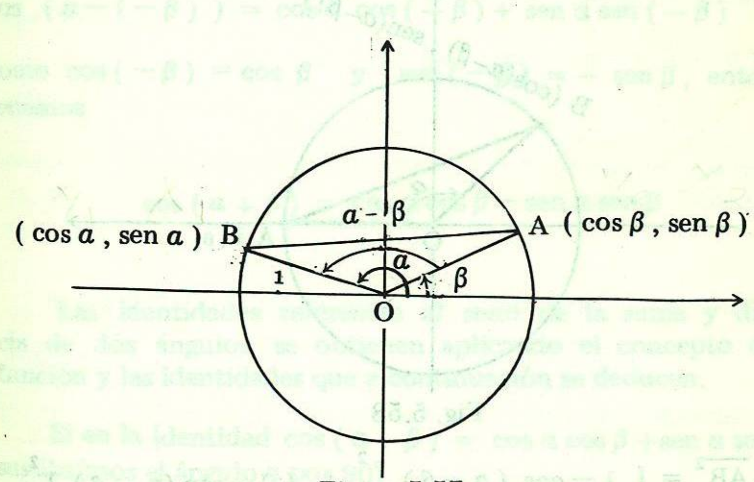


Figura 5.57

Las coordenadas de los puntos A y B que están en la circunferencia se asocian con el coseno y con el seno del ángulo respectivo.

Uniendo los puntos A y B se forma el triángulo A O B. La longitud del lado $\overline{AB}$ la podemos obtener aplicando la fórmula general de la distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$\overline{AB} = \sqrt{(\operatorname{sen} \alpha - \operatorname{sen} \beta)^2 + (\cos \alpha - \cos \beta)^2}$$

Desarrollando los cuadrados y simplificando

$$\overline{AB} = \sqrt{2 - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros obtenemos

$$\overline{AB}^2 = 2 - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta \qquad (1)$$

Si giramos el triángulo ABO de manera que el vértice A coincida con el punto (1,0), hacemos que el ángulo $\alpha - \beta$ esté en posición normal y que las coordenadas del vértice B sean ahora $(\cos(\alpha - \beta), \operatorname{sen}(\alpha - \beta))$. Fig. 5.58

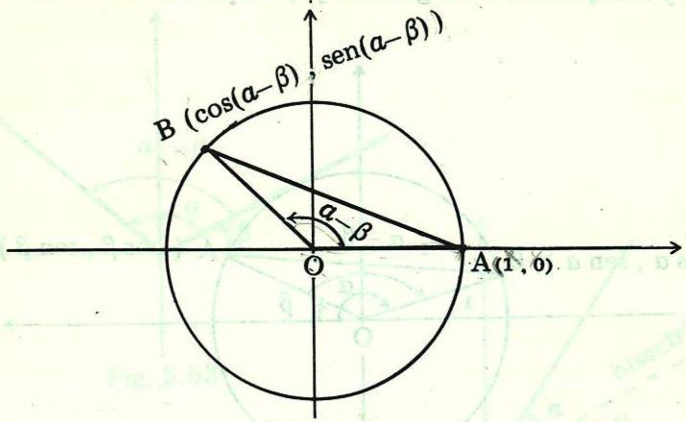


Fig. 5.58

$$\overline{AB}^2 = [\,1 - \cos(\alpha - \beta)\,]^2 + [\,0 - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)\,]^2$$

desarrollando los cuadrados de los binomios

$$\overline{AB}^2 = 1 - 2\cos(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta)$$

sustituyendo los últimos dos sumandos por la unidad, puesto que $\cos^2(\alpha - \beta) + \operatorname{sen}^2(\alpha - \beta) = 1$, tenemos

$$\overline{AB}^2 = 2 - 2\cos(\alpha - \beta) \qquad (2)$$

como la longitud de la recta AB es la misma en las dos figuras, entonces formamos una igualdad, igualando los segundos miembros de las ecuaciones 1 y 2.

$$2 - 2\cos(\alpha - \beta) = 2 - 2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta - 2 \cos \alpha \cos \beta$$

simplificando, dividiendo entre -2 y conmutando los sumandos del segundo miembro de la igualdad, obtenemos la identidad

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Si en esta identidad el ángulo β lo sustituímos por $(-\beta)$, entonces la identidad se transforma en:

$$\cos(\alpha - (-\beta)) = \cos \alpha \cos(-\beta) + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta)$$

como $\cos(-\beta) = \cos \beta$ y $\operatorname{sen}(-\beta) = -\operatorname{sen} \beta$, entonces tenemos

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

Las identidades referentes al seno de la suma y diferencia de dos ángulos, se obtienen aplicando el concepto de cofunción y las identidades que a continuación se deducen.

Si en la identidad $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$ sustituímos el ángulo α por 90°.

obtenemos $\cos(90° - \beta) = \cos 90° \cos \beta + \operatorname{sen} 90° \operatorname{sen} \beta$

cos 90°-B = cos 0° cos B + sen 1 sen B

como $\cos 90° = 0$ y $\operatorname{sen} 90° = 1$, entonces la identidad se transforma en

cos 90°-B = + sen B

$$\boxed{\cos(90^\circ - \beta) = \operatorname{sen}\beta}$$

si en esta identidad sustituímos el ángulo β por $(90^\circ - \beta)$, obtenemos

$$\cos\,(90^\circ - (90^\circ - \beta)) = \operatorname{sen}(90^\circ - \beta)$$

$$\boxed{\cos\beta = \operatorname{sen}(90^\circ - \beta)}$$

Con estas identidades, comprobamos que **cualquier función de un ángulo dado es igual a la cofunción de su complemento.**

Seno de la suma y diferencia de dos ángulos.

Sustituyendo el ángulo β por $(\alpha + \beta)$ en la identidad $\operatorname{sen}\beta = \cos(90^\circ - \beta)$, obtenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\,(90^\circ - (\alpha + \beta))$$

reagrupando el segundo miembro, escribimos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos\,[(90^\circ - \alpha) - \beta]$$

Aplicando la identidad del coseno de la diferencia de dos ángulos al segundo miembro, tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \cos(90^\circ - \alpha)\cos\beta + \operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)\operatorname{sen}\beta$$

sustituyendo $\cos(90^\circ - \alpha)$ por $\operatorname{sen}\alpha$ y $\operatorname{sen}(90^\circ - \alpha)$ por $\cos\alpha$ obtenemos

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

En forma análoga, podemos demostrar la identidad del seno de la diferencia de dos ángulos y obtener

$$\boxed{\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

Obtención de la tangente de la suma de dos ángulos.

Utilizando las identidades básicas, podemos demostrar que:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

Demostración:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$$

sustituyendo $\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ y $\cos(\alpha + \beta)$ por sus respectivas igualdades, tenemos

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}$$

dividiendo el numerador y el denominador entre $\cos\alpha\cos\beta$. escribimos

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} + \dfrac{\cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta} - \dfrac{\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}$$

reduciendo a la unidad los factores iguales, obtenemos la identidad por demostrar

$$\boxed{\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}}$$

En forma análoga se obtiene

$$\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

Funciones trigonométricas de ángulo doble

Si hacemos que el ángulo α sea igual al ángulo β en las identidades del seno, coseno y tangente, de la suma de dos ángulos, obtenemos las identidades de ángulo doble que se dan a continuación.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

sec
cos

Demostrar que: $\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

Demostración:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$$

si $\beta=\alpha$, tenemos

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\operatorname{sen}\alpha$$

conmutando el orden de los factores del segundo sumando, en el segundo miembro y sumando los términos semejantes, tenemos

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$$

Se deja como ejercicio al estudiante, la demostración de las identidades del $\cos 2\alpha$ y $\tan 2\alpha$.

Demostraremos dos identidades muy usuales a partir de la identidad $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Demostrar que: $\operatorname{sen}^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$

Demostración:

Usando la identidad

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

sustituyendo el $\cos^2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha$, tenemos

$$\cos 2\alpha = 1-\operatorname{sen}^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\alpha$$

despejando el $\operatorname{sen}^2\alpha$, obtenemos

$$2\operatorname{sen}^2\alpha = 1-\cos 2\alpha$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

Demostrar que: $\cos^2\alpha = \dfrac{1+\cos 2\alpha}{2}$

Demostración:

Con la misma identidad del coseno del ángulo doble usado en la demostración anterior y sustituyendo el $\operatorname{sen}^2\alpha$ por $1-\cos^2\alpha$ obtenemos $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

despejando el $\cos^2\alpha$, escribimos

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Funciones trigonométricas de la mitad de un ángulo.

Si sacamos la raíz cuadrada a los dos miembros de las identidades

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \quad \text{y} \quad \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

obtenemos las identidades

$$\operatorname{sen} \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

Como la relación de los ángulos que aparecen en el primero y segundo miembros es uno a dos, entonces podemos sustituír el ángulo α por $\frac{\alpha}{2}$ y así obtener las identidades de la mitad del ángulo

$$\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}$$

Ejercicio 5.7

1. **Demostrar que:** $\cos \alpha \sec \alpha = 1$

2. **Demostrar que:** $\tan \alpha \cot \alpha = 1$

3. **Exprese cada una de las identidades de los problemas anteriores en otra forma.**

4. **Demostrar que:** $\dfrac{\cos \alpha}{\operatorname{sen} \alpha} = \cot \alpha$

5. **Tranformar la identidad.** $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ **en** $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$

6. **Completa las siguientes proposiciones**

$\cos(\alpha - \beta) =$ cos α cos β + sen α sen β

$\cos(\alpha + \beta) =$ cos α cos β − sen α sen β

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) =$ sen α cos β + cos α sen β

$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) =$ sen α cos β − cos α sen β

7. **Demuestra que:**

$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

8. **Completa las siguientes proposiciones**

$\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{\text{Tan}\,\alpha + \text{Tan}\,\beta}{1 - \text{Tan}\,\alpha\, \text{Tan}\,\beta}$

$\tan(\alpha - \beta) = \dfrac{\text{Tan}\,\alpha - \text{Tan}\,\beta}{1 + \text{Tan}\,\alpha\, \text{Tan}\,\beta}$

9. **Demuestra la primera identidad del problema anterior.**

10. **Deduce las identidades trigonométricas de la mitad de un ángulo.**

5.15 TIRANGULOS OBLICUANGULOS

Hemos mencionado que un triángulo rectángulo está resuelto, cuando conocemos sus tres lados y sus tres ángulos, esto también es válido para los triángulos oblicuángulos cuyo análisis nos ocupa por ahora. Los elementos desconocidos en cualquier triángulo pueden llegar a tres, siempre y cuando dentro de los elementos conocidos se incluya la longitud de uno de sus lados. Para resolver un triángulo oblicuángulo es necesario conocer nuevas leyes que nos ayuden en esta tarea. Estas leyes se conocen con el nombre de **ley de los senos y ley de los cosenos**, las cuales se enuncian y se demuestran enseguida.

Ley de los senos

Enunciado:

En todo triángulo, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos a dichos lados.

Si tenemos el triángulo oblicuángulo ABC cuyos lados son a, b y c, Fig. 5.59

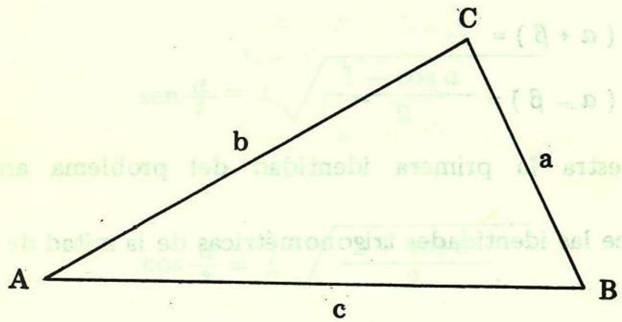


Figura 5.59

entonces la expresión matemática de la ley de los senos es:

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Demostración:

Colocamos el triángulo oblicuángulo de la Fig. 5.59 sobre el plano cartesiano, haciendo que el vértice A coincida con el origen, por lo tanto el ángulo A está en posición normal (ver Fig. 5.60) y en esta posición obtenemos las coordenadas del vértice que no está sobre el eje " X " o sea el vértice C. De este vértice bajamos una perpendicular al lado AB, siendo h la altura del triángulo.

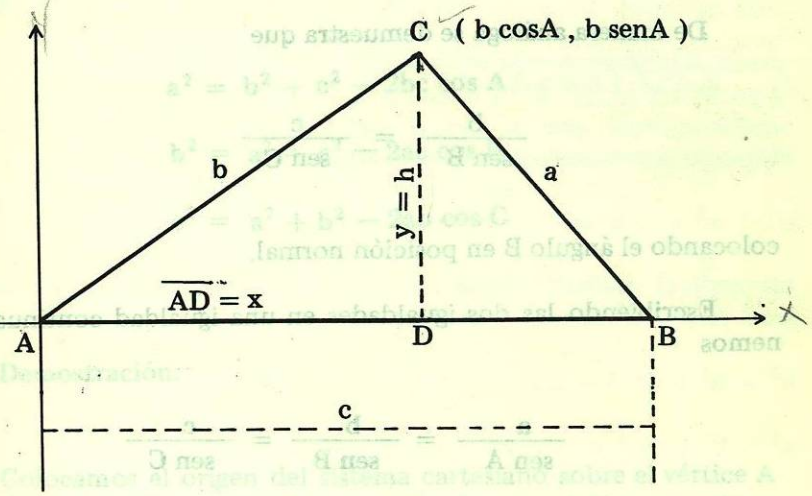


Figura 5.60

Las coordenadas del vértice C corresponden a las distancias AD y h respectivamente y forman los catetos del triángulo rectángulo ADC, los cuales se expresan en función del ángulo A por las igualdades.

$$x = \overline{AD} = b \cos A$$
$$y = h = b \text{ sen } A$$

Refiriéndonos ahora al triángulo rectángulo BCD, tenemos

$$h = a \text{ sen } B$$

Por lo tanto

Si $h = b \text{ sen } A$ y $h = a \text{ sen } B$, entonces $b \text{ sen } A = a \text{ sen } B$, igualdad que puede escribirse en la forma

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

De manera análoga se demuestra que

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

colocando el ángulo B en posición normal.

Escribiendo las dos igualdades en una igualdad continua, tenemos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

Ley de los cosenos

Enunciado

En todo triángulo, el cuadrado de uno de los lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados por el coseno del ángulo comprendido.

La expresión matemática de la ley de los cosenos para cada uno de los lados a, b y c del triángulo ABC de la Fig. 5.61 es:

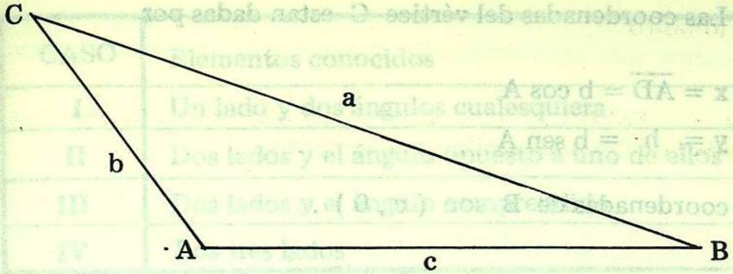


Figura 5.61

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Demostración:

Colocamos el origen del sistema cartesiano sobre el vértice A del triángulo ABC, quedando el ángulo A en posición normal como se muestra en la Fig. 5.62

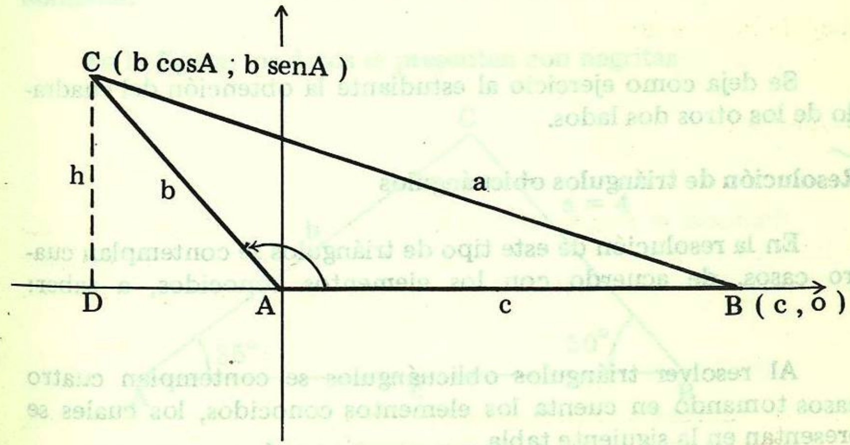


Figura 5.62

Las coordenadas del vértice C estan dadas por

$$x = \overline{AD} = b \cos A$$
$$y = \ h \ = b \operatorname{sen} A$$

y las coordenadas de B son (c , 0) .

Aplicando la fórmula de la distancia entre dos puntos, obtenemos la longitud del lado a.

$$a = \sqrt{\ (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A - 0)^2}$$

elevando al cuadrado los dos miembros nos queda

$$a^2 = (b \cos A - c)^2 + (b \operatorname{sen} A)^2$$

elevando al cuadrado, sacando factor común y aplicando la identidad $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$, obtenemos

$$a^2 = b^2 \cos^2 A - 2 bc \cos A + c^2 + b^2 \operatorname{sen}^2 A$$

$$a^2 = b^2 (\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A) + c^2 - 2 bc \cos A$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 bc \cos A$$

Se deja como ejercicio al estudiante la obtención del cuadrado de los otros dos lados.

Resolución de triángulos obicuángulos

En la resolución de este tipo de triángulos se contemplan cuatro casos, de acuerdo con los elementos conocidos, a saber:

Al resolver triángulos oblicuángulos se contemplan cuatro casos tomando en cuenta los elementos conocidos, los cuales se presentan en la siguiente tabla.

CASO	Elementos conocidos
I	Un lado y dos ángulos cualesquiera
II	Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos
III	Dos lados y el àngulo comprendido
IV	Los tres lados

Los casos I y II se resuelven aplicando la ley de los senos y los casos III y IV con la ley de los cosenos.

Al resolver un triángulo oblicuángulo es recomendable hacer siempre el dibujo del triángulo marcando en la figura los datos y los elementos desconocidos, identificando el caso correspondiente. Cuando se aplique la ley de los cosenos, se sugiere calcular primeramente el más pequeño de los ángulo desconocidos.

Se ilustran con ejemplos los diferentes casos

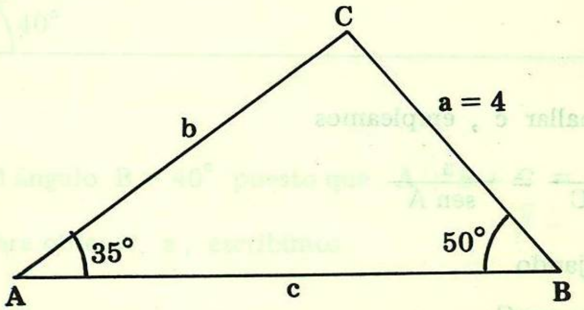
Casos I Datos: Un lado y dos ángulos cualesquiera.

Ejemplo 5.15.1

Resolver el triángulo ABC . si a=4 , A=35° y B=50°

Solución:

En la figura, los datos se presentan con negritas



Las incógnitas son b, c y C.

Al escribir las razones de acuerdo con la ley de los senos, hay que cuidar que intervengan los datos y **solo un elemento desconocido.**

Para hallar la incógnita b , escribimos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

despejando

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$$

sustituyendo valores

$$b = \frac{4 \text{ sen } 50°}{\text{sen } 35°}$$

$$b = \frac{4\ (0.7660)}{0.5736} = 5.3417$$

El ángulo C se obtiene aplicando la igualdad

$A + B + C = 180°$, de donde

$C = 180° - A - B$

$C = 180° - 35° - 50° = 95°$

Para hallar c , empleamos

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

despejando

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

sustituyendo valores

$$c = \frac{4 \text{ sen } 95°}{\text{sen } 35°}$$

$$c = \frac{4\ (0.996)}{0.574} = 7$$

b = 5

Respuesta c = 7

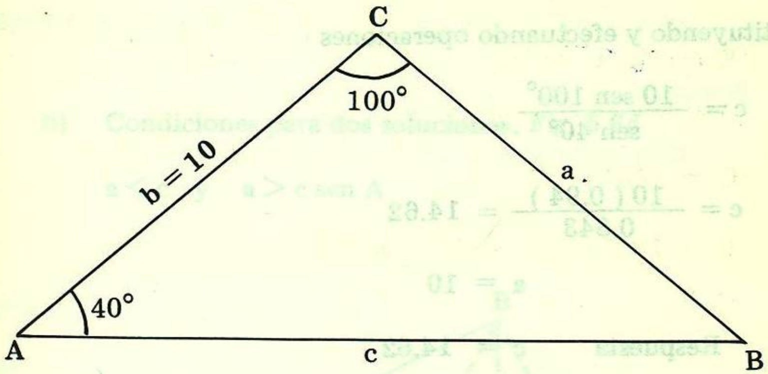
$\measuredangle$ C = 95

Ejemplo 5.15.2

Encontrar a , c y B del triángulo ABC si b=10 , A=40° y C=100°

Solución:

Dibujamos el triángulo, señalando los datos e incógnitas



El ángulo B = 40° puesto que A + B + C = 180°

$B = 180° - A - C$

$= 180° - 40° - 100°$

$B = 40°$

Para obtener a , escribimos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}$$

despejando

$$a = \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$

(10)(.6428)
.6428 = 10

sen A = sen B ya que A = B , entonces

$a = b$

$a = 10$

Comprobamos aquí, que los lados opuestos a los ángulos iguales son iguales.

Para obtener c escribimos

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

despejando

$$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$$

sustituyendo y efectuando operaciones

$$c = \frac{10 \text{ sen } 100^\circ}{\text{sen } 40^\circ}$$

$$c = \frac{10\,(0.94)}{0.643} = 14.62$$

$a = 10$

Respuesta $c = 14.62$

$\measuredangle B = 40^\circ$

Caso II Datos: Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Este es el caso conocido como ambiguo, ya que puede haber una, dos o ninguna solución cuando el ángulo conocido es

agudo, o bien una o ninguna solución, si el ángulo conocido es recto u obtuso.

Analizaremos las soluciones posibles, si el ángulo conocido es agudo.

a). Condiciones para una solución. Fig. 5.63

$a < c$ pero $a = c \text{ sen } A$

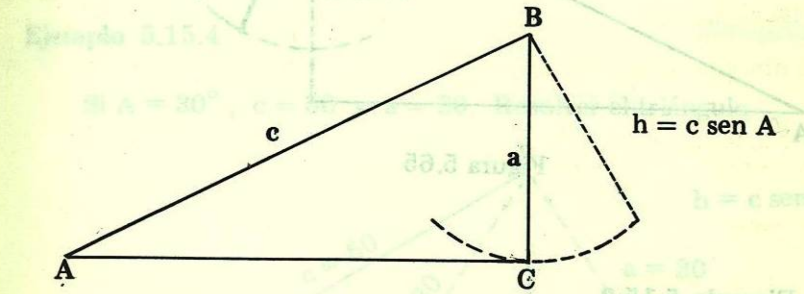


Figura 5.63

b) Condiciones para dos soluciones. Fig. 5.64

$a < c$ y $a > c \text{ sen } A$

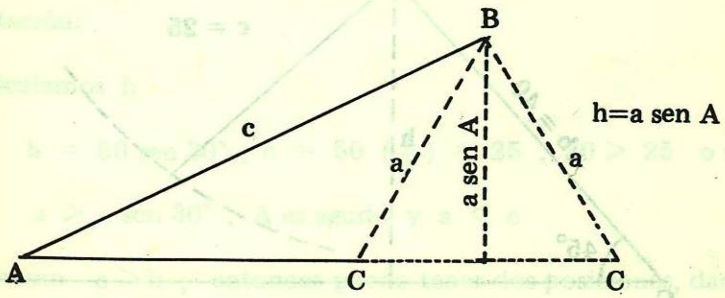


Figura 5.64

c). **Condiciones para no - solución. Fig. 5.65**

$$a < c \quad y \quad a < c \text{ sen } A$$

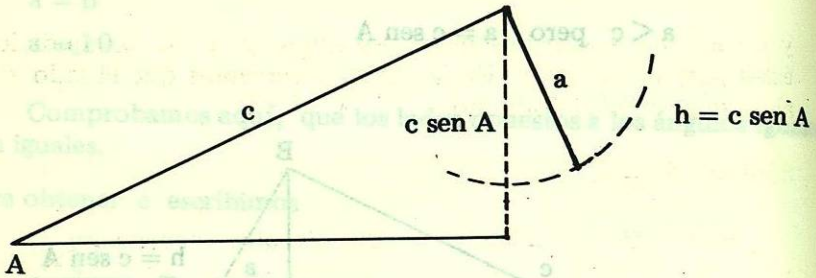


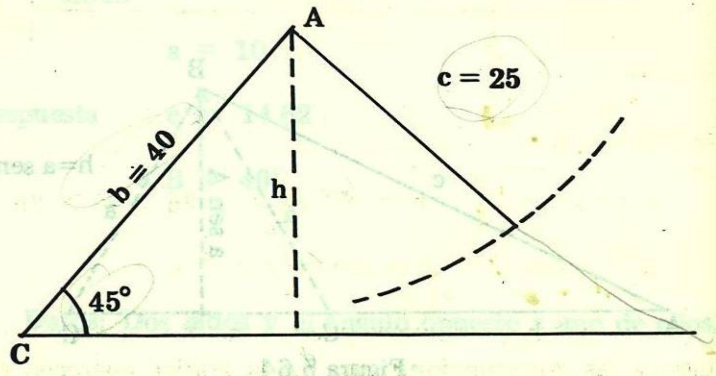
Figura 5.65

Ejemplo 5.15.3

Si $C = 45°$, $b = 40$ y $c = 25$. Resolver el triángulo

Solución:

Construímos la figura de acuerdo con los datos.



Comparamos c con la longitud de la perpendicular trazada desde A al lado opuesto

$$h = b \text{ sen } 45°$$

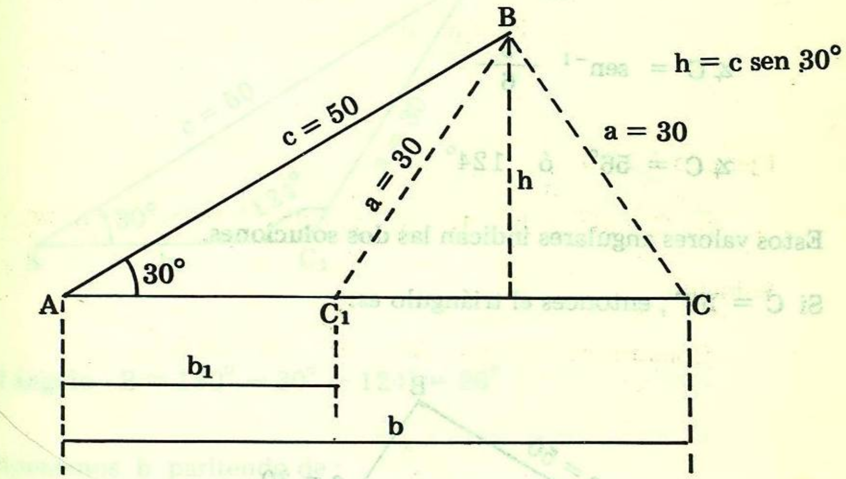
$$h = b \text{ sen } c = \frac{40\sqrt{2}}{2} = 20\sqrt{2} = 28.28$$

entonces $25 < 28.3$ o sea $c < b$ sen C

y de los datos sabemos que C es agudo y $c < b$, condiciones éstas para no solución. En la figura observamos que el lado c no alcanza a cerrar el polígono.

Ejemplo 5.15.4

Si $A = 30°$, $c = 50$ y $a = 30$. Resolver el triángulo



Solución:

Calculamos h

$$h = 50 \text{ sen } 30° \;,\; h = 50 \left(\tfrac{1}{2}\right) = 25 \;,\; 30 > 25 \text{ o sea}$$

$$a > c \text{ sen } 30° \;,\; A \text{ es agudo y } a < c$$

y como $a > h$, entonces puede tener dos posiciones, dando así lugar a las dos soluciones que en la gráfica aparecen con líneas punteadas.

Aplicando la ley de los senos al triángulo ABC para obtener el ángulo C , tenemos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

despejando

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } A}{a}$$

sustituyendo

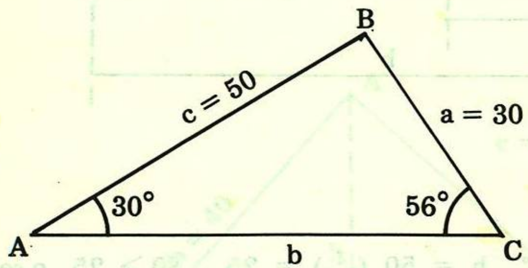
$$\text{sen } C = \frac{50 \text{ sen } 30^\circ}{30} = \frac{50\ (0.5)}{30} = \frac{5}{6}$$

$$\measuredangle C = \text{sen}^{-1} \frac{5}{6}$$

$$\measuredangle C = 56^\circ \quad \text{ó} \quad 124^\circ$$

Estos valores angulares indican las dos soluciones.

Si C = 56°, entonces el triángulo es:



El ángulo B = 180° − A − C

$$B = 180^\circ - 30^\circ - 56^\circ = 94^\circ$$

Para obtener **b** , aplicamos la ley de los senos

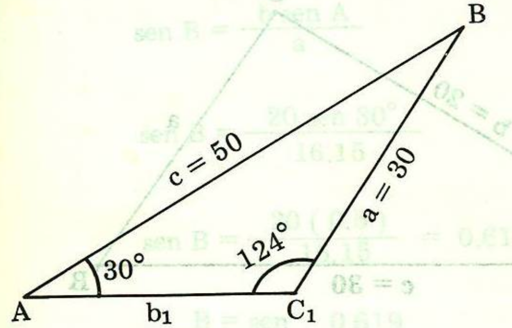
$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$$

$$b = \frac{30 \text{ sen } 94^\circ}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$b = \frac{30\ (0.99)}{0.5} = 59.4$$

Si C = 124° , el triángulo correspondiente es



El ángulo $B = 180^\circ - 30^\circ - 124^\circ = 26^\circ$

Obtenemos **b** paritendo de :

$$\frac{b}{\text{sen } B} = \frac{a}{\text{sen } A}$$

$$b_1 = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}$$

$$b_1 = \frac{30 \text{ sen } 26^\circ}{\text{sen } 30^\circ}$$

$$b_1 = \frac{30\ (0.45)}{0.5} = 27$$