

Caso III Datos: Dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

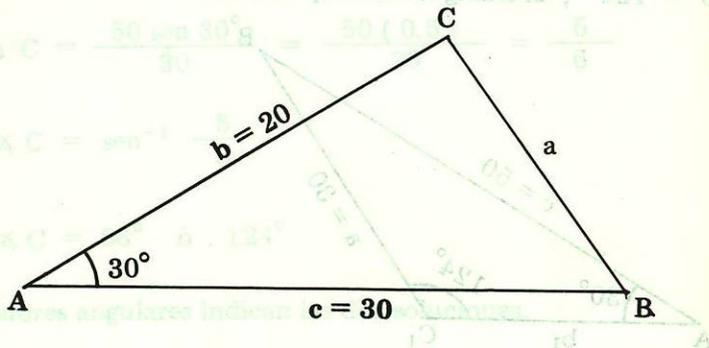
Con estos elementos conocidos, aplicamos la ley de los cosenos ya que la ley de los senos no resuelve el triángulo.

Ejemplo 5.

Resolver el triángulo ABC, si $b = 20$, $c = 30$ y $A = 30^\circ$.

Solución:

Con los datos logramos la figura siguiente



Por la ley de los cosenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Despejando y sustituyendo valores

$$a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cos A}$$

$$a = \sqrt{(20)^2 + (30)^2 - 2(20)(30) \cos 30^\circ}$$

$$a = \sqrt{400 + 900 - 1200(0.866)}$$

$$a = \sqrt{1300 - 1200(0.866)}$$

$$a = \sqrt{1300 - 1039.20} = 16.15$$

$$a = 16.15$$

Enseguida determinamos el menor de los dos ángulos desconocidos.

Por la ley de los senos,

$$\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$$

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}$$

$$\sin B = \frac{20 \sin 30^\circ}{16.15}$$

$$\sin B = \frac{20(0.5)}{16.15} = 0.619$$

$$B = \sin^{-1} 0.619$$

$$B = 38^\circ 15'$$

El ángulo C lo obtenemos a partir de

$$C = 180^\circ - A - B$$

$$C = 180^\circ - 30^\circ - 38^\circ 15'$$

$$C = 111^\circ 45'$$

Caso IV Datos: Los tres lados.

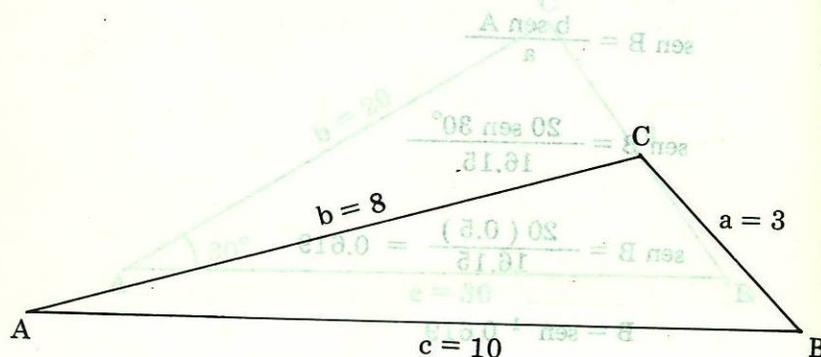
También aquí utilizamos la ley de los cosenos para hallar los ángulos del triángulo dado.

Ejemplo 5.15.6

Resolver el triángulo ABC, si $a=3$, $b=8$ y $c=10$

Solución:

La figura del triángulo correspondiente es:



Si queremos obtener cualquiera de los ángulos, utilizamos la ley de los cosenos y despejamos el ángulo correspondiente.

Así

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Despejando $\cos A$, obtenemos

$$\cos A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

Cambiando signo a la fracción

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Sustituyendo valores

$$\cos A = \frac{(8)^2 + (10)^2 - (3)^2}{2(8)(10)}$$

$$\cos A = \frac{64 + 100 - 9}{160}$$

$$\cos A = \frac{155}{160} = \frac{31}{32} = 0.969$$

$$A = \cos^{-1} 0.969$$

$$A = 75^\circ 50'$$

El ángulo B se obtiene a partir de la igualdad.

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B \quad \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

Sustituyendo valores obtenemos

$$\cos B = 0.75$$

$$B = \cos^{-1} 0.75$$

$$B = 41^\circ 20'$$

El ángulo C es el suplemento de la suma $\sphericalangle A + \sphericalangle B$, por lo tanto $\sphericalangle C = 62^\circ 50'$.

Funciones Trigonométricas

Senos y tangentes, léanse hacia abajo
Cosenos y cotangentes, léanse hacia arriba

∠	sen	tan	∠	sen	tan
0°	.0000	.0175	89°	.7071	.7193
1°	.0175	.0349	88°	.7193	.7314
2°	.0349	.0523	87°	.7314	.7431
3°	.0523	.0698	86°	.7431	.7547
4°	.0698	.0872	85°	.7547	.7660
5°	.0872	.1045	84°	.7660	.7771
6°	.1045	.1219	83°	.7771	.7880
7°	.1219	.1392	82°	.7880	.7986
8°	.1392	.1564	81°	.7986	.8090
9°	.1564	.1736	80°	.8090	.8192
10°	.1736	.1908	79°	.8192	.8290
11°	.1908	.2079	78°	.8290	.8387
12°	.2079	.2250	77°	.8387	.8480
13°	.2250	.2419	76°	.8480	.8572
14°	.2419	.2588	75°	.8572	.8660
15°	.2588	.2756	74°	.8660	.8746
16°	.2756	.2924	73°	.8746	.8829
17°	.2924	.3090	72°	.8829	.8910
18°	.3090	.3256	71°	.8910	.8988
19°	.3256	.3420	70°	.8988	.9063
20°	.3420	.3584	69°	.9063	.9135
21°	.3584	.3746	68°	.9135	.9205
22°	.3746	.3907	67°	.9205	.9272
23°	.3907	.4067	66°	.9272	.9336
24°	.4067	.4226	65°	.9336	.9397
25°	.4226	.4384	64°	.9397	.9455
26°	.4384	.4540	63°	.9455	.9511
27°	.4540	.4695	62°	.9511	.9563
28°	.4695	.4848	61°	.9563	.9613
29°	.4848	.5000	60°	.9613	.9659
30°	.5000	.5150	59°	.9659	.9703
31°	.5150	.5299	58°	.9703	.9744
32°	.5299	.5446	57°	.9744	.9781
33°	.5446	.5592	56°	.9781	.9816
34°	.5592	.5736	55°	.9816	.9848
35°	.5736	.5878	54°	.9848	.9877
36°	.5878	.6018	53°	.9877	.9903
37°	.6018	.6157	52°	.9903	.9925
38°	.6157	.6293	51°	.9925	.9945
39°	.6293	.6428	50°	.9945	.9962
40°	.6428	.6561	49°	.9962	.9976
41°	.6561	.6691	48°	.9976	.9986
42°	.6691	.6820	47°	.9986	.9994
43°	.6820	.6947	46°	.9994	.9998
44°	.6947	.7071	45°	.9998	1.0000
	cos	cot	∠	cos	cot

37
53
90

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\tan 45^\circ = 1$

$\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$

1. Enuncie la ley de los senos.
2. De la expresión matemática de la ley de los senos.
3. Demuestre la ley de los senos.
4. ¿Qué nos dice la ley de los cosenos?
5. Escriba la expresión matemática de la ley de los cosenos para cada uno de los lados de un triángulo oblicuángulo.
6. Demuestre la ley de los cosenos para el triángulo de la figura 8.52 obteniendo el cuadrado del lado c . Coloque el ángulo C en posición normal.
7. ¿Cuántos casos se presentan al resolver un triángulo oblicuángulo, de acuerdo con los elementos conocidos?
8. ¿Cuándo se aplica la ley de los senos?
9. ¿En cuáles casos se aplica la ley de los cosenos?
10. Resuelva los siguientes triángulos oblicuángulos cuyos datos se dan en los incisos siguientes.

Ejercicio 1.1 (Página 11)

1. El razonamiento deductivo procede de lo general a lo particular y el razonamiento inductivo procede de lo particular a lo general.
3. Deductiva, inductiva.
5. Ver punto 1.2.1
7. $2n, 2n-1$
9. Naturales, pares e impares.
11. $2n + 1 = 2n + 1$
13. $4(n + 1) = 4(n + 1)$

Ejercicio 1.2 (Página 19)

1. $c^4 + 4c^3d + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$
3. $m^6 - 6m^5 + 15m^4 - 20m^3 + 15m^2 - 6m + 1$
5. $r^9 + 9r^8s + 36r^7s^2 + 84r^6s^3 + 126r^5s^4$
 $+ 126r^4s^5 + 84r^3s^6 + 36r^2s^7 + 9rs^8 + s^9$
7. $32x^5 - 80x^4y + 80x^3y^2 - 40x^2y^3$
 $+ 10xy^4 - y^5$
9. $y^6 - 9y^4 + 27y^2 - 27$
11. $a^{18} + 9a^{16}b^2 + 36a^{14}b^4 + 84a^{12}b^6 + 126a^{10}b^8$
 $+ 126a^8b^{10} + 84a^6b^{12} + 36a^4b^{14} + 9a^2b^{16} + b^{18}$

13. $64 a^6 + 576 a^5 b + 2160 a^4 b^2 + 4320 a^3 b^3 + 4860 a^2 b^4 + 2916 a b^5 + 729 b^6$
15. $\frac{c^5}{d^5} - \frac{5c^4}{d^4} + \frac{10c^3}{d^3} - \frac{10c^2}{d^2} + \frac{5c}{d} - 1$
17. 1; 2; 6; 24; 120; 720; 5,040; 40,320; 362,880; 3'628,800.
19. $35 w^3 z^4$
21. $210 s^4 t^6$
23. $10'264,320 a^4 b^8$
25. $1001 w^{10}$

Ejercicio 2.1 (Página 31)

- Ver definición en la página 25
- La gráfica de una sucesión la forman puntos aislados y la gráfica de una función la constituyen segmentos de rectas o de curvas.
- La ley de desarrollo.
- a) función lineal.
b) función exponencial.
c) inverso multiplicativo de una función lineal.
- 2, 1, 0, -1, -2
- $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, -\frac{7}{2}, -\frac{9}{2}$
- $2, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}$
- $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$

17. 1, 4, 16, 64, 256

19. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$

21. geométrica
23. armónica
25. aritmética

Ejercicio 2.2 (Página 36)

- Ver definición en la página 33
- La ley de desarrollo
- $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6$
- $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6}$
- $3 + 6 + 9 + 12 + 15 + 18$
- $5 + 10 + 15 + 20 + 25 + 30$
- $\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}$

Ejercicio 3.1 (Página 48)

- Ver definición en la página 41
- $a_n = a_1 + (n - 1)d$
- Restando a cualquier término el término anterior.
- 71

9. -8

11. $a_{12} = 45, S_n = 276$

13. $n = 7, S_n = -14$

15. $a_1 = 4, a_{20} = 80$

17. $\{2n\}$

Ejercicio 3.2 (Página 55)

1. $r = 2, S_{12} = 8190$

3. $a_1 = 2, S_5 = 122$

5. $a_n = \frac{1}{405}, n = 6$

7. $\pm \frac{3}{20}, \frac{3}{80}$

9. $1.23 \text{ cm}, 1.498 \text{ m}$

11. Ver definiciones en las páginas 50 y 54.

Ejercicio 4.1 (Página 64)

1. 720

3. 4

5. 36

7. 9

Ejercicio 4.2 (Página 69)

1. 12, 6720, 2730

3. $\frac{20!}{5!}$

5. 720

7. 210

9. 27'907,200

11. 504

Ejercicio 4.3 (Página 73)

1. Ver definición en la página 71

3. $C(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$

5. 15,504

7. 120

9. 210

Ejercicio 5.1 (Página 90)

1. Ver el párrafo segundo de la página 79

3. La horizontal es paralela a una superficie de nivel y la vertical sigue la dirección de la plomada.



5.

7. Cuando los lados inicial y final son los mismos.

9. a) $315^\circ, -405^\circ, 675^\circ$

b) $-328^\circ, 392^\circ, 752^\circ$

c) $345^\circ, -375^\circ, -735^\circ$

d) $-292^\circ 30', 652^\circ 30', 427^\circ 30'$

11. a) + , b) - , c) + , d) - ,
e) + , f) -

13. La horizontal que pasa por el ojo del observador y la visual dirigida hacia un punto situado abajo de él.

15. minutos y segundos

17. Ver definición en la página 83

19. 180°

21. Nulo, agudo, recto, obtuso, colineal, entrante y perigonal

23. a) complementarios
b) complementarios
c) conjugados
d) suplementarios
e) conjugados

Ejercicio 5.2 (Página 102)

1. a) equilátero, isósceles y escaleno
b) equiángulo, rectángulo y oblicuángulo.
3. No , porque el equilátero tiene sus tres lados iguales.
5. matemático griego
7. En el teorema de Pitágoras

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

9. 50°

11. Tres

13. Iguales

Ejercicio 5.3 (Página 111)

1. Seno, coseno, tangente, cotangente, secante, y cosecante

3. $\text{sen } B = \frac{4}{5}$, $\text{cos } B = \frac{3}{5}$, $\text{tan } B = \frac{4}{3}$

$\text{cot } B = \frac{3}{4}$, $\text{sec } B = \frac{5}{3}$, $\text{csc } B = \frac{5}{4}$

5. i) 10 , ii) $5\sqrt{5}$

iii) $\sqrt{58}$, iv) $4\sqrt{10}$

7. 1, 1, $\sqrt{2}$ y 1, 2, $\sqrt{3}$

9. $\text{cos } 60^\circ$, $\text{cot } 45^\circ$, $\text{csc } 30^\circ$, $\text{tan } 30^\circ$

$\text{sec } 75^\circ$, $\text{sen } 15^\circ$

11. $8\sqrt{2}$

13. $2\sqrt{34}$

Ejercicio 5.4 (Página 118)

1. Conocer sus tres lados y sus tres ángulos.

3. Ver las reglas en la página 113

5. a) ángulo cuyo seno es 0.5
 b) ángulo cuya cotangente es $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 c) ángulo cuya tangente es 1
 d) ángulo cuya secante es ∞
7. $\frac{2000\sqrt{3}}{3}$

Ejercicio 5.5 (Página 129)

1. Con la base sobre el eje X

3. $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ $\text{sen } 150^\circ = \frac{1}{2}$

$\text{cos } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\text{cos } 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tan } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\text{tan } 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{cot } 30^\circ = \sqrt{3}$ $\text{cot } 150^\circ = -\sqrt{3}$

$\text{sec } 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ $\text{sec } 150^\circ = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{csc } 30^\circ = 2$ $\text{csc } 150^\circ = 2$

$\text{sen } 210^\circ = \frac{-1}{2}$ $\text{sen } 330^\circ = \frac{-1}{2}$

$\text{cos } 210^\circ = \frac{-\sqrt{3}}{2}$ $\text{cos } 330^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\text{tan } 210^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ $\text{tan } 330^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3}$

$\text{cot } 210^\circ = \sqrt{3}$ $\text{cot } 330^\circ = -\sqrt{3}$

$\text{sec } 210^\circ = \frac{-2\sqrt{3}}{3}$ $\text{sec } 330^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$\text{csc } 210^\circ = -2$ $\text{csc } 330^\circ = -2$

5. Ver definición en la página 127

7. I y IV I y IV

9. a) Igual a las funciones de 330°

b) Igual a las funciones de 135°

c) Igual a las funciones de 270°

d) Igual a las funciones de 225°

Ejercicio 5.6 (Página 138)

1. $\text{sen } (-\theta) = -\text{sen } \theta$

$\text{cos } (-\theta) = \text{cos } \theta$

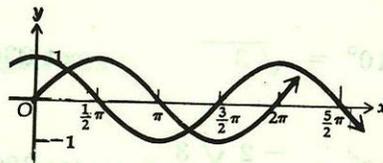
$\text{tan } (-\theta) = -\text{tan } \theta$

$$\cot(-\theta) = -\cot \theta$$

$$\sec(-\theta) = \sec \theta$$

$$\csc(-\theta) = -\csc \theta$$

3.



5. No

7. Ver gráficas en las páginas 137

Ejercicio 5.7 (Página 150)

1. $1 \equiv 1$

$$3. \quad \cos a = \frac{1}{\sec a}, \quad \tan a = \frac{1}{\cot a}$$

5. Ver transformación en la página 141

7. Ver demostración en la página 143

9. Ver demostración en la página 147

Ejercicio 5.8 (Página 170)

1. Ver enunciado en la página 152

3. Ver demostración en la página 153

5. Ver expresiones en la página 154

7. Cuatro

9. En los casos III y IV

ELBRIDGE F. VANCE

EUGENE W. NICHOLS

NATHAN O. KELPS

HOPKINSON L. CROSSLAND

DUNCAN H. SPENCER

LOUIS MITCHELL

LAWRENCE B. BROWN

FRANKLIN D. SWANSON

Algebra Superior
México, Mc. Graw-Hill,
1910.

Introducción a la Matemática
Moderna.
México, Fondo Educativo
Internacional, 1978.

Matemáticas.
México, Interamericana,
1977.

Trigonometría Plana.
México, Editorial Limusa,
1978.

Trigonometría.
México, Publicaciones Cól-
umbus, 1968.

Algebra Moderna y Trigo-
nometría.
México, Publicaciones Cól-
umbus, 1967.

El Cálculo con Geometría
Analítica.
México, Harper and Row
Latinoamericana, 1982.

Algebra.
México, Harper and Row
Latinoamericana, 1977.

Geometría Moderna.
México, Addison-Wesley
Publishing Company, 1980.

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA

BIBLIOGRAFIA

- MURRAY R. SPIEGEL**
Algebra Superior.
México. Mc Graw-Hill,
1970.
- ELBRIDGE P. VANCE**
Introducción a la Matemática Moderna.
México, Fondo Educativo Interamericano, 1978.
- EUGENE D. NICHOLS**
Matemáticas.
México, Interamericana, 1977.
- NATHAN O. NILES**
Trigonometría Plana.
México, Editorial Limusa, 1979.
- HOOPER - L. GRISWOLD**
Trigonometría.
México, Publicaciones Cultural, 1966.
- DULCIANI-BERMAN-WOOTON**
Algebra Moderna y Trigonometría.
México, Publicaciones Cultural, 1967.
- LOUIS LEITHOLD**
El Cálculo con Geometría Analítica.
México. Harper and Row Latinoamericana, 1982.
- LOVAGLIA-ELMORE-CONWAY**
Algebra.
México, Harper and Row Latinoamericana, 1972.
- MOISE-DOWNS**
Geometría Moderna.
U.S.A., Addison-Wesley Publishing Company, 1966

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
JUAN L

MURRAY R. SPIEGEL. Algebra Superior. México, Mc Graw-Hill, 1970.

ELBRIDGE P. VANCE. Introducción a la Matemática Moderna. México, Fondo Educativo Interamericano, 1978.

EUGENE D. NICHOLS. Matemáticas. México, Interamericana, 1977.

NATHAN O. WILES. Trigonometría Plana. México, Editorial Limusa, 1978.

HOOPER L. GRISWOLD. Trigonometría. México, Publicaciones Catedra, 1968.

DULCIANI-BERMAN-WOOTEN. Algebra Moderna y Trigonometría. México, Publicaciones Catedra, 1967.

LOUIS LEITCHOLD. El Cálculo con Geometría Analítica. México, Harper and Row Latinamericana, 1972.

LOVAGLIA-ELMORE-COWAY. Algebra Moderna y Trigonometría. México, Harper and Row Latinamericana, 1972.

ROSE DOWNS. Geometría Moderna. U.S.A., Addison-Wesley Publishing Company, 1966.

Este trabajo se terminó de imprimir en los talleres de Técnica Gráfica de Monterrey, S. A. el 15 de Febrero de 1986.



BIBLIOTECA UNIVERSITARIA
 UANL

Este trabajo se terminó de imprimir en las talleres de
Técnicas Gráficas de Montevideo, S. A. el 15 de Febrero
de 1955.

JUAN L

BIBLIOTECA UNIVERSITARIA



LIBRO ALQUILADO

