C A P I T U L O   I I

O B J E T I V O   P A R T I C U L A R

Al termino del capítulo, el alumno aplicará los conceptos y ecuaciones del movimiento circular en la solución de problemas.

O B J E T I V O S   E S P E C I F I C O S

El alumno:

- Definirá desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Enunciará el concepto revolución.
- Mencionará la unidad de medida angular.
- Expresará el desplazamiento angular en grados, revoluciones y radianes.
- Deducirá ecuaciones para el desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular.
- Utilizará los conceptos anteriores en la resolución de problemas.
- Distinguirá los conceptos de "Fuerza Centrípeta" y "Fuerza Centrífuga".

CAPITULO No. 2

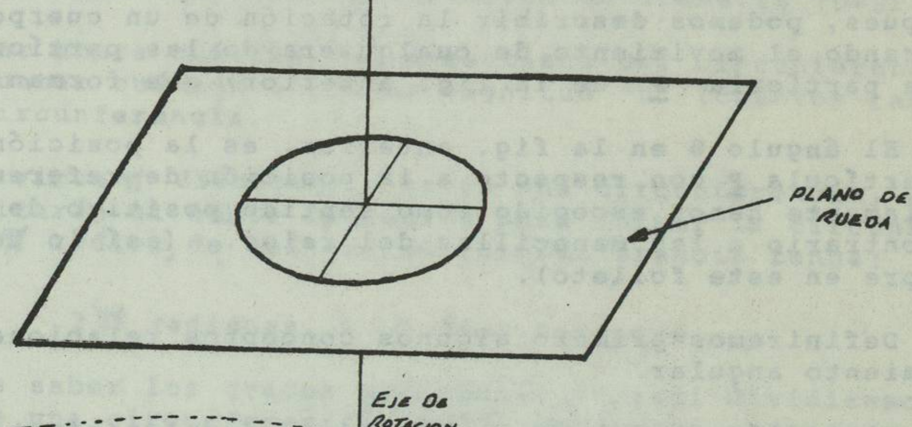
MOVIMIENTO ANGULAR

(CINEMATICA DE LA ROTACION)

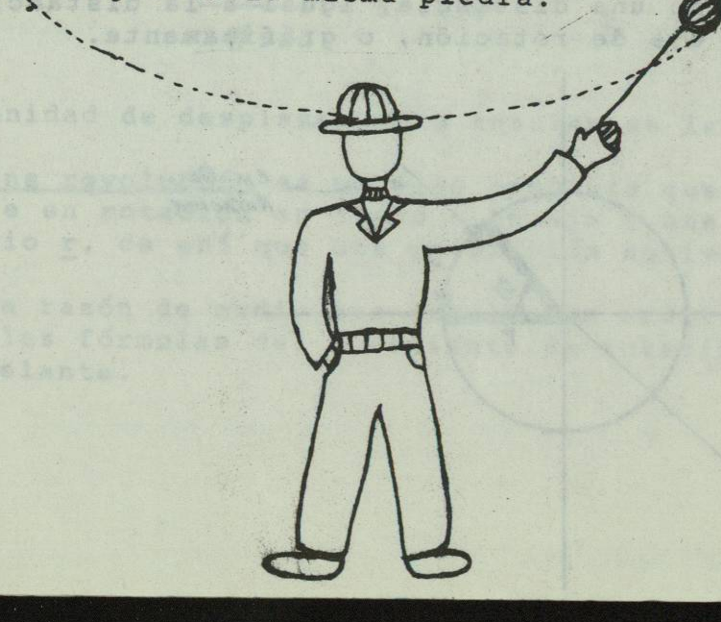
En el curso anterior se estudió Cinemática como si tratara los movimientos rectilíneos exclusivamente. Ahora, en el presente capítulo, nos encargaremos de estudiar la Cinemática de la rotación, esto es, el movimiento de un cuerpo que se hace girar en torno a un eje, sin importar las causas que hicieron girar a dicho cuerpo.

2.1. DESPLAZAMIENTO ANGULAR Y VELOCIDAD ANGULAR.

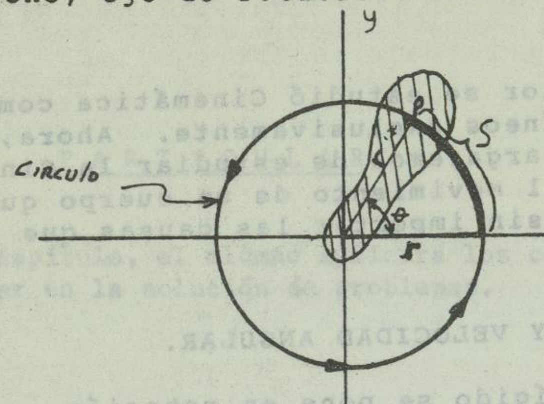
Cuando un cuerpo rígido se pone en rotación, su movimiento, generalmente, se describe con referencia al eje alrededor del cual gira, el "eje de rotación", como se acostumbra llamarse, algunas veces está dentro del cuerpo y en otras ocasiones se encuentra fuera de éste. Por ejemplo, en el caso de la mayoría de las ruedas de maquinaria, los ejes de rotación los representan líneas a través de sus centros y en dirección perpendicular a el plano de la rueda.



Sin embargo, para una piedra que da vueltas, amarrada en el extremo de una cuerda, el eje está en el extremo opuesto de la cuerda, lejos de la misma piedra.



Un cuerpo rígido describe una rotación pura si todas las partículas del cuerpo se mueven en círculos, y los centros de esos círculos, forman parte de una línea recta que se llama, como lo hemos dicho, eje de rotación.

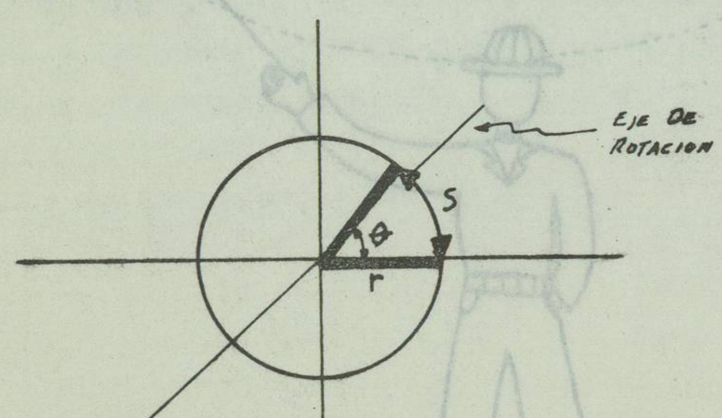


En esta figura el eje de rotación es una línea perpendicular a el plano de la hoja y se encuentra en el origen de nuestro marco de referencia. Si trazamos líneas rectas desde cualquier punto del cuerpo a el eje de rotación, todas esas líneas "barrerán" el mismo ángulo al rotarlo en un intervalo de tiempo dado. Así pues, podemos describir la rotación de un cuerpo rígido considerando el movimiento de cualquiera de las partículas (tal como la partícula P de la fig. anterior) que forman el cuerpo.

El ángulo θ en la fig. anterior, es la posición angular de la partícula P con respecto a la posición de referencia. Arbitrariamente hemos escogido como sentido positivo de la rotación, el contrario a las manecillas del reloj. (así lo tomaremos - - siempre en este folleto).

Definiremos primero algunos conceptos relacionados con el movimiento angular.

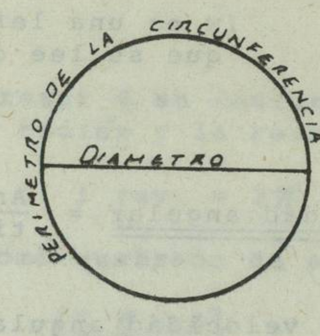
El radián (rad.) es la unidad de desplazamiento en el movimiento angular. Como es el centímetro o el metro en el desplazamiento lineal. Una partícula en rotación ha desplazado un radián cuando ha recorrido una distancia, igual a la distancia de dicha partícula, a su eje de rotación, o gráficamente.



donde "θ" es un radián si la magnitud del arco "s" es igual a la distancia de la partícula a su eje de rotación "r".

Una circunferencia tiene aproximadamente 6.2832 radianes, un radián equivale a unos 57.296° veamos.

Se sabe que "π" es una letra griega que representa el cociente de la magnitud del perímetro de una circunferencia y su diámetro equivale a 3.1416 aproximadamente.



$$\frac{\text{perímetro}}{\text{diámetro}} = \pi = 3.141592654\ldots \quad (3.1416)$$

Sabemos también que dos radios hacen un diámetro (D=2r).

Preguntar ahora cuántos radianes tiene una circunferencia, es como preguntar cuántos arcos de magnitud "r" (cuántos radios) forman una circunferencia.

Si como vimos π diámetros hacen una circunferencia, entonces se necesitarán el doble de radios para formar la circunferencia, o sea, 2π radios, de ahí que una circunferencia tenga:

$$2\pi \text{ radianes} = 6.2832 \text{ radianes}$$

y si queremos saber los grados por radián (°/rad) dividiremos -- los grados de una circunferencia (360°) entre sus radianes - - (2π rad).

$$\frac{360°}{2\pi\,\text{rad}} = 57.296°$$

otra unidad de desplazamiento angular es la revolución.

<u>Una revolución</u> es un giro completo que efectúa un cuerpo al ponerse en rotación en torno a un eje y que describe un círculo de radio r, de ahí que una revolución equivale a 2π radianes.

La razón de medir los ángulos en radianes es que simplifica todas las fórmulas del movimiento de rotación, como lo veremos - más adelante.

Ya que sabemos como medir un desplazamiento angular, veamos ahora como podremos medir la velocidad con que puede girar un -- cuerpo al ponerse en rotación en torno a un eje.

Como lo mencionamos anteriormente, si trazamos líneas rectas desde cualquier punto de un cuerpo que esté en rotación, hasta su eje, estas líneas barrerán el mismo ángulo en un intervalo de tiempo t, entonces si θ está expresado en radianes y el tiempo en seg. podemos encontrar la velocidad angular promedio con - que gira el cuerpo mediante la ecuación:

$$w = \frac{\theta}{t}$$ (w es una letra minúscula griega que se lee omega).

o en palabras:

$$\underline{\underline{\text{Velocidad angular}}} = \frac{\text{Angulo girado}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

Así las unidades de la velocidad angular son:

rad/seg; rev/min ó r.p.m. (revoluciones por minutos).

Si comparamos:

$\bar{w} = \frac{\theta}{t}$ con $\bar{v} = \frac{d}{t}$

ecuación de la velocidad promedio angular. — ecuación de la velocidad promedio lineal.

encontramos que:

$\bar{w}$ es análoga a $\bar{v}$

θ es análoga a d

más adelante hallaremos que ambos movimientos están intimamente - relacionados.

Ejemplo: No. 1 Se hace girar un cuerpo durante 10 seg., teniendo un - desplazamiento angular de 240 rev., calcular:

a) El ángulo girado en radianes.
b) La velocidad angular promedio en rad/seg.
c) La velocidad angular promedio en rev/min (r.p.m.)

Razonamiento:

Se conoce:

$\theta = 240$ rev.

$t = 10$ seg.

a) Para expresar θ en radianes utilizamos la relación entre el radián y la revolución, entonces:

$$1 \text{ rev.} = 2\pi \text{ rad}$$

expresado como quebrado de equivalencia.

$$\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right)$$

Por lo tanto:

$$\text{rev} = 240 \text{ rev}\left(\frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ rev}}\right) = 480 \text{ rad}$$

entonces: $\theta = \underline{\underline{480\pi \text{ rad}}}$

b) Para expresar la velocidad angular en rad/seg, empleamos la ec.

$$w = \frac{\theta}{t}$$

Sustituyendo los valores:

$$w = \frac{480\pi \text{ rad}}{10 \text{ seg}} = 48\pi \text{ rad/seg}$$

$$\underline{\underline{w = 48\pi \text{ rad/seg}}}$$

c) Ahora calculemos la velocidad angular en r.p.m. (rev. por minuto) para esto, debemos transformar 10 seg a min. con la siguiente relación de equivalencia.

$$60 \text{ seg} = 1 \text{ min.}$$

expresado como quebrado:

$$\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{seg}}\right)$$

y multiplicando por 10 seg.:

$$10 \text{ seg}\left(\frac{1 \text{ min}}{60 \text{seg}}\right) = \frac{10}{60} \text{ min} = \frac{1}{6} \text{ min}$$

entonces empleando de nuevo la ec. $w = \frac{\theta}{t}$, tenemos:

$\theta = 240$ rev

$t = \frac{1}{6}$ min

$$w = \frac{240 \text{ rev}}{1/6 \text{ min}}$$

$w = \underline{\underline{1,440 \text{ rev/min}}}$ ó $w = \underline{\underline{1,440 \text{ r.p.m.}}}$

Ejemplo: No. 2 Una rueda de maquinaria gira con una velocidad angular de 26π rad/seg, calcular su desplazamiento angular en un tiempo de 5 min.

Razonamiento:

Datos

$w = 26\pi$ rad/seg

$t = 5$ min

$\theta = ?$

Para encontrar el desplazamiento empleamos la ecuación:

$$w = \frac{\theta}{t}$$

y despejando θ entonces:

$$\theta = wt$$

Transformando los 5 min. a seg. por medio de la relación el quebrado de equivalencia:

$$60 \text{ seg} = 1 \text{ min}$$

$$\frac{60 \text{ seg}}{1\text{min}}$$

multiplicando por 5 minutos:

$$5 \text{ min}\left(\frac{60\text{seg}}{1\text{min}}\right) = 300 \text{ seg}$$

y sustituyendo:

$$\theta = 26\pi \text{ rad/seg} \times 300 \text{ seg}$$

encontramos el resultado:

$$\underline{\theta = 7{,}800\pi \text{ rad}}$$

Ahora si queremos transformar θ a revoluciones usaremos el quebrado de equivalencia.

$$\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right)$$

por el que multiplicaremos los $7{,}800\pi$ radianes.

por lo tanto:

$$7{,}800\pi \text{ rad}\left(\frac{1 \text{ rev}}{2\pi \text{ rad}}\right) = 3{,}900 \text{ rev}$$

o sea: $\underline{\theta = 3{,}900 \text{ rev}}$

2.2. ACELERACION ANGULAR.

La aceleración lineal fue definida en el curso de Física I por la fórmula:

$$a = \frac{v - v_o}{t}$$

Con esta, se mide el ritmo con que el objeto en movimiento iba aumentando o disminuyendo su velocidad.

La cantidad $\frac{v - v_o}{t}$ indica el cambio en la velocidad durante el tiempo

En el caso de objetos en rotación también nos interesa conocer cómo se aumenta o disminuye la velocidad; por tanto, tenemos que estudiar la aceleración angular, es decir, el ritmo de cambio en la velocidad angular.

Definimos la aceleración angular α (alfa) de cualquier objeto girando, por la fórmula :

$$\alpha = \frac{w - w_o}{t}$$

donde:

α = aceleración angular.

w = velocidad angular final.

w_o = velocidad angular incial.

t = tiempo transcurrido.

Las unidades de la aceleración angular serán las de velocidad angular divididas por el tiempo. Así, por ejemplo: si $\underline{t}$ se mide en seg y $\underline{w}$ en rad/seg, la aceleración angular vendría expresada en rad/seg^2, que es la unidad más común en que se expresa la aceleración angular.

Si la aceleración angular es uniforme, tenemos, como en el caso del movimiento lineal, que la velocidad angular media viene dada por:

$$\overline{w} = \frac{w_o + w}{2}$$

Como habrás notado, hasta ahora las ecuaciones del movimiento angular son semejantes a las del movimiento lineal, la deducción de otras nuevas nos llevarán al mismo desarrollo de Física I para concluir finalmente que:

$$w^2 = w_o^2 + 2\alpha\theta$$

$$\theta = w_o t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2$$

$$\theta = \left(\frac{w_o + w}{2}\right) t$$

En esta parte del capitulo, antes de resolver unos cuantos ejemplos más, vamos a redondear la similitud que existe entre las ecuaciones del movimiento rectilineo con las del movimiento angular colocandolas frente a frente.

$$d=\bar{v}t \qquad \theta=\bar{W}t$$

$$v=Vo+at \qquad W=Wo+\alpha t$$

$$\bar{V}=\frac{Vo+V}{2} \qquad \bar{W}=\frac{Wo+W}{2}$$

$$V^2=Vo^2+2ad \qquad W^2=Wo^2+2\alpha\theta$$

$$d=Vot+\frac{at^2}{2} \qquad \theta=Wot+\frac{\alpha t^2}{2}$$

$$ac=\frac{v^2}{r}$$

$$Fc=m\frac{v^2}{r}$$

Notaremos que las fórmulas de aceleración y fuerza centripeta son exclusivas del movimiento angular.

La formula $v=wr$

relaciona ambos movimientos

Ejemplo: No. 3 La rueda de cierto automóvil esta girando a una velocidad de $10\,rev/seg$, en el instante en que el auto empieza a disminuir uniformemente su velocidad hasta pararse. Si invierte 30seg en parar, a) ¿Cuántos giros completos da la rueda antes de pararse?, b) Si el radio de la rueda es 0.3m, - ¿Qué distancia recorre el auto antes de pararse?.

Razonamiento: a) Datos

$w_o=10\,rev/seg$

$w=0$

$t=30seg$

$\theta=?$

Una de las formas de resolver el problema es: encontrar en rev/seg la velocidad angular promedio ($\bar{w}$) de la rueda en los ultimos 30 segundos de su movimiento con la fórmula.

$$\bar{w}=\frac{wo+w}{2}$$

de ahí con $\theta=\bar{w}t$

Encontramos su dezplazamiento angular(Los giros completos) durante dicho tiempo en rev/seg y finalmente las convertimos a distancia recorrida con la relación del radio de la rueda y su perímetro, veamos

a) $\bar{w}=\dfrac{wo+w}{2}$

$$\bar{w}=\frac{10rev/seg+0}{2}$$

$\bar{w}=5rev/seg$

b) $\theta=\bar{w}t=5\,rev/seg\times 30seg$

$\underline{\theta=150rev}$

b) Cada vez que la rueda da un giro completo, desarrolla su circunferencia (avanza un permimetro) a lo largo de la carretera. Por consiguiente, el auto se desplazará 150 circunferencias antes de pararse.

$$d=\underbrace{(150)}_{\text{vueltas dadas por la rueda}}\underbrace{(2\pi r)}_{\text{perimetro de una circunferencia}}$$

$d=(150)(2\ x\ 0.3m)$

$d=(150)(2x3.1416\ x\ .3)m$

$\underline{d=282.7m}$

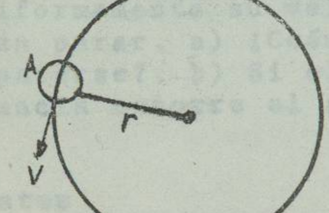
Ejemplo: Un automóvil de 4900mts, de peso esta tomando una curva en una esquina a
No. 4 una velocidad de 6m/seg, y marcha a lo largo de un arco de cir
conferencia en la maniobra. Si el radio del arco es 18m. - -
¿Qué fuerza horizontal debe ser ejercida por el pavimento sobre
las ruedas para mantenerlo en la trayectoria circular?.

Razonamiento: La fuerza requerida es la fuerza centrípeta, y la fórmul
es $Fc = m\frac{v^2}{r}$, en donde la masa es $m = \frac{w}{g}$

Datos:

$W=4900nt$	$m=\frac{W}{g}=\frac{4900nt}{9.8m/seg^2}=500kg$
$v=6\,m/seg$	$F=m\frac{v^2}{r}$
$r=18m$	$F=500kg \times \frac{36m^2/seg^2}{18m}$
$F_c=?$	$F=\frac{500x36}{18}\ kg.\cancel{m}/seg^2\ \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}}$
	$\underline{F=1000nts}$

Ejemplo: A una bola atada en el extremo de un hilo se le hace girar en
No. 5 un círculo vertical de radio r bajo la acción de la gravedad,
tal como se muestra en la fig.



¿Cuál será la tensión del hilo cuando la bola está en el punto A de la tra
yectoria, si la velocidad de la bola en dicho punto es v?.
(A la solución de este tipo de problema sin numeros, se llama deducción
matemática).

Razonamiento: Para que la bola se mueva en un círculo debe haber una
fuerza resultante hacia el centro del círculo; ésta debe
ser igual a la fuerza centrípeta. Dos fuerzas con la --
misma dirección y sentido actúan sobre la bola en el punto
A, la acción de la cuerda, T, y la acción de la gravedad
(o peso del cuerpo). La suma de estas fuerzas es igual
a la fuerza centrípeta.

Entonces:

$$Fc = T+W = m\frac{v^2}{r}$$

Por consiguiente, la tensión de la cuerda es:

$$T = \frac{mv^2}{r} - W$$

$$= \frac{mv^2}{r} - mg$$

$$\underline{T = m\left(\frac{v^2}{r} - g\right)}$$

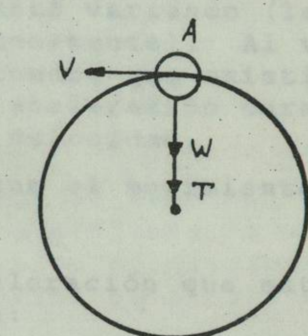
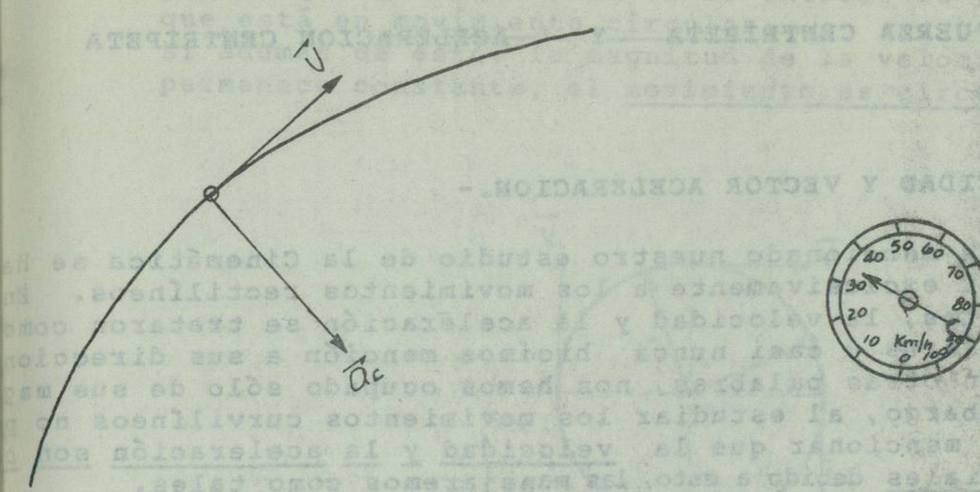


Fig. Cuando la bola está en la posición señalada,
su peso suministra parte de la fuerza centrípeta -
necesaria.

Observando la ecuación que hemos dividido podemos concluir varias cosa
cuanto más grande sea la masa "m", o la velocidad "v" mayor será la ten
sión, cuanto más pequeño sea el radio "r" mayor será la tensión.

Si $\frac{v^2}{r}$ es igual a g la tensión es cero.

Si $\frac{v^2}{r}$ es menor a g, la tensión "T" será negativa, esto significa que para esas condiciones el hilo no estirará a la bola, sino que tendría que "empujarla" hacia arriba para poder mantenerla en movimiento circu lar y como eso no es posible pusto que hilo no es un cuerpo rigido, di cha bola dejará su trayectoria circular.



Esta figura representa una partícula que describe una curva y la mag nitud de su velocidad permanece constante. Imagínese un automóvil que da una curva y cuyo medidor de velocidad permanece invariable. Un aprendiz de Física diría, ante ésto, que la partícula no tendría aceleración puesto que tiene la idea de que ésta es sólo una conse- cuencia de una variación en la magnitud de la velocidad. Pero el concepto de aceleración es más amplio. No olvidemos que siendo la velocidad una cantidad vectorial, si la magnitud de la velocidad no varía, su dirección sí está cambiando, pues la partícula describe una curva y el vector $\vec{v}$ está variando (la dirección de la tangen te a la curva no permanece constante). Al variar la velocidad, aun que sólo sea en dirección, tendrá que existir una aceleración carac terística así como hay una aceleración característica cuando varía solamente la magnitud de la velocidad.

Por lo tanto podemos decir que el movimiento representado en la fi gura anterior es acelerado.

Ahora podemos definir la aceleración que está presente en éste movi miento de la siguiente forma:

" La variación en la dirección de la velocidad produce una acele ración llamada: Aceleración Centrípeta "

Recibe este nombre porque está siempre dirigida hacia el centro de la curva ya que, como veremos más adelante, toma la dirección de la fuerza que la produce (centrípeta significa que apunta hacia el cen tro) de ahí que el vector $\vec{a}_c$ (aceleración centrípeta) es siempre perpendicular a el vector $\vec{V}$.