3 UNIDAD

LOGICA
TERCERA UNIDAD

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad en el tema:

I. LOGICA PROPOSICIONAL.

1. Conocerá el cálculo de la inferencia que se efectúa con proposiciones.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno, sin error, en el tema:

I. LOGICA PROPOSICIONAL.

1.1 Definirá qué es una proposición.

1.2 Distinguirá entre proposiciones atómicas y moleculares.

1.3 Explicará y enumerará los conectivos extensionales.

1.4 Explicará la función de las tablas de verdad.

1.5 Diferenciará tautología, contradicción y contingencia.

1.6 Señalará en qué consiste la deducibilidad.

INSTRUCCIONES:

Los objetivos anteriores, los podrás lograr estudiando cuidadosamente el libro de LOGICA, Cap. 9, pp. 118 - 129 inclusive.

CAPITULO 9

LOGICA PROPOSICIONAL.

La lógica es la ciencia de la inferencia. La logística es el *cálculo* de la inferencia. Ese cálculo puede dividirse en tres cálculos fundamentales: *el cálculo de proposiciones, el cálculo de funciones y el cálculo de clases.*

1. Noción de proposición.

En lógica moderna se utiliza a veces el término *proposición* como sinónimo de oración (declarativa), pero por lo común se lo emplea para referirse al significado de tales oraciones. Así, por ejemplo, *Hace frío, It is cold e Il fait froid* son tres oraciones distintas que, por tener el mismo significado, expresan una misma proposición. En este sentido, entonces, una proposición es similar a lo que tradicionalmente se conoce como *juicio*. Se caracteriza, por ende, por afirmar o negar algo y es, pues, o bien verdadera o bien falsa.

2. Proposiciones atómicas y moleculares.

La lógica clásica ha estudiado particularmente las llamadas *proposiciones categóricas* y algunos tipos de razonamientos en que intervienen tales proposiciones. Estas proposiciones son simples, es decir, no contienen dentro de sí otras proposiciones. La lógica moderna ha dedicado especial atención al estudio de las proposiciones compuestas, proposiciones que incluyen otras proposiciones. Usualmente, se denomina *proposiciones atómicas* a las proposiciones simples y *proposiciones moleculares* a las compuestas. Así, por ejemplo: *Llueve; Salió inmediatamente; Tolstoi fue uno de los más grandes novelistas de todos los tiempos*, son proposiciones atómicas, en tanto que Llueve y hace frío; *Si te concentras, entonces no tendrás dificultades; O bien enviaba a sus missi dominici o bien controlaba él mismo a los gobernadores*, son proposiciones moleculares. Las proposiciones moleculares se reconocen por la presencia de *conectivas*; se llama así a ciertas partículas del lenguaje (como, por ejemplo, y, o, *si-entonces*, etc.) cuya función es unir dos (conectivas *binarias*) o más proposiciones entre sí.

Por extensión, las partículas que se aplican a una única proposición, como es el caso de *no* en *No llueve*, también se denominan conectivas (*monádicas*) y las proposiciones en que aparecen se consideran, por lo tanto, como moleculares.

VARIABLES PROPOSICIONALES.

La lógica moderna recurre, al igual que la matemática, al uso de símbolos especiales llamados *variables*, que son expresiones que represen tan a una entidad cualquiera dentro de determinado dominio. Así, utiliza las letras *p, q, r*, etc., para representar proposiciones cualesquiera, letras que se denominan, por ello, *variables proposicionales.*

3. Conectivas extensionales.

Una proposición, como ya se dijo, es o bien verdadera o bien falsa. Estos valores —verdad (V) y falsedad (F)— reciben el nombre de *valores de verdad* (o valores veritativos). Cuando el valor de verdad de una proposición molecular depende *únicamente* del valor de verdad de sus proposiciones componentes, se considera que dicha proposición es una *función de verdad* y la(s) conectiva(s) que contiene se denomina(n) *extensional(es)*. Ejemplo: el valor de verdad de la proposición molecular *No llueve* depende únicamente del valor veritativo de *Llueve*. (Si ésta es falsa, aquélla es verdadera; si ésta es verdadera, aquélla es falsa). Por lo tanto, la conectiva *no* es de carácter extensional. En cambio, en el enunciado: *Juan murió porque comió pescado*, aunque se conozca el valor de verdad de las dos proposiciones atómicas componentes no se conoce, por ese solo hecho, el valor veritativo de la proposición molecular, por consiguiente, la conectiva *"porque"* no es extensional.

NEGACION. La negación, que es la operación a que corresponde el término lógico "no" y cuyo símbolo es "—", permite, dada una proposición, "p", obtener otra "$\bar{p}$", que es su negación. Ejemplo: "Son las 4 horas 15 minutos", permite, por negación obtener "No son las 4 horas 15 minutos". La segunda proposición es falsa cuando la primera es verdadera; y es verdadera cuando la primera es falsa. Llamando *valor* a la condición de verdadera o falsa de una proposición, el sentido de la operación llamada negación queda definido en la siguiente *tabla de valores (o tabla de verdad).*

P	$\bar{P}$
Verdadera	Falsa
Falsa	Verdadera

La negación es una operación efectuada sobre una sola proposición. Pero podemos efectuar operaciones con dos proposiciones, recurriendo a los términos lógicos "y", "o", "implica", "equivale a". Son las operaciones llamadas, respectivamente, *conjunción, disyunción, implicación y equivalencia.*

CONJUNCION. La conjunción, que es la operación que corresponde al término lógico "y", y cuyo símbolo es ".", permite, dadas dos proposiciones, "p" y "q", obtener una proposición compleja que es verdadera solamente cuando lo son las dos proposiciones simples, conjugadas en ella. Ejemplo: "Sócrates es filósofo" ("p") y "Sócrates es ateniense" ("p.q"). Si las dos proposiciones simples son falsas, y también si es falsa una cualquiera de ellas, la proposición compleja es falsa.

La conjunción queda definida por esta tabla de verdad:

P	q	p.q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

DISYUNCION. **En el lenguaje corriente enunciamos disyunciones de dos tipos. En uno de ellos, la disyunción es tal que las proposiciones que intervienen en ella se excluyen mutuamente: "El reloj acaba de dar las 4 ó las 5". En este caso, las proposiciones simples no pueden ser ambas verdaderas. La disyunción es *excluyente*. Pero otras veces la disyunción es tal que las proposiciones que intervienen en ella pueden ser ambas verdaderas: "Ese señor es el padre de la novia o el padrino de la boda". En este caso, las proposiciones simples pueden ser ambas verdaderas, ya que en la enunciación no eliminamos la posibilidad de que el señor de que se trata sea a la vez padre de la novia y padrino de la boda. Este segundo tipo de disyunción no es excluyente, y se lo llama *incluyente*.**

La expresión "y/o", frecuente en el lenguaje comercial y en el jurídico, corresponde a la disyunción incluyente.

La disyunción incluyente se simboliza con el signo "v"; la excluyente con el signo "Λ". La siguiente tabla de verdad define las proposiciones de disyunción.

p	q	pvq	p∧q
V	V	V	F
F	V	V	V
V	F	V	V
F	F	F	F

En esta tabla, como en la anterior y en las que sigan, el *valor* de la proposición compleja —es decir, su verdad o falsedad—, depende de los valores de las proposiciones simples. La construcción de proposiciones cuyo valor dependen de los valores de las proposiciones con que se las construye es la construcción llamada *extensional*.

IMPLICACION. La implicación, que es la operación que corresponde al término lógico "implica", y cuyo símbolo es "⊃", permite, dadas dos proposiciones "p" y "q", construir otra, "p⊃q". Esta última proposición se lee "p implica q" y está definida por la tabla de verdad que en seguida daremos. El término "implicar" no se entiende, en logística exclusivamente en el sentido de conexión forzosa, es decir, en el sentido de que una proposición deriva de otra, como cuando, por ejemplo, decimos: "que un triángulo sea equilátero implica que es equiángulo". "Implicación" se entiende en un sentido más amplio, de manera que abarca también los casos en que no existe forzosidad de derivación. Decimos, por ejemplo: "Si son las 4, Pedro ya llegó a su casa". También en este caso afirmamos una implicación. E igualmente afirmamos implicaciones cuando recurrimos a expresiones, tan corrientes en el uso vulgar, como "Si Pedro es un hombre decente, yo soy Cristobal Colón".

El empleo de la palabra "implicación" para designar esta operación ha dado lugar a discusiones ociosas. La relación que la implicación establece es de hecho, y no necesariamente de derecho. Por eso vale, como ejemplo de implicación, el enunciado "Si Pedro es un hombre decente ("p"), yo soy Cristóbal Colón ("q"). Llamado antecedente a "p" y consecuente a "q", una implicación es falsa sólo cuando es verdadero el antecedente y falso el consecuente. "Si Pedro es un hombre decente, yo soy Cristóbal Colón" es falso cuando yo, como de hecho sucede, no soy Cristóbal Colón, y Pedro es un hombre decente.

La tabla de verdad de la implicación es la siguiente.

p	q	p⊃q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Algunos lógicos prefieren, para esta operación, el nombre de "condicionalidad", restringiéndola al uso de los términos "si. . . entonces. . .", que no deberían confundirse, como sucede, con el término "implica".

EQUIVALENCIA. La equivalencia es la operación que permite, dadas dos proposiciones, "p" y "q", obtener la proposición compleja "p≡q", que es verdadera sólo cuando "p" y "q" tienen el mismo valor de verdad, es decir, cuando ambas son verdaderas, o cuando ambas son falsas.

La tabla de verdad de la equivalencia es la siguiente:

P	p	p≡q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

INCOMPATIBILIDAD. Es la operación que permite, dadas dos proposiciones, "p", "q", construir otra "p/q" ("p es incompatible con q"), que es verdadera cuando "p" y "q" no son verdaderas las dos. Su tabla de verdad es la siguiente:

P	q	p/q
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Estas diferentes operaciones no son las únicas posibles. Y tampoco son operaciones irreductibles. La disyunción exclusiva, por ejemplo, puede considerarse como negación de equivalencia; la incompatibilidad, como negación de la conjunción. Corrientemente son consideradas operaciones que podríamos llamar básicas: la negación, la conjunción, la disyunción inclusiva, la implicación y la equivalencia.

Las tablas de verdad de las seis operaciones binarias (conjunción, disyunción incluyente, disyunción excluyente, implicación, equivalencia e incompatibilidad) pueden reunirse en esta única tabla:

p	q	$p.q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$p \supset q$	$p \equiv q$	p/q
V	V	V	V	F	V	V	F
V	F	F	V	V	F	F	V
F	V	F	V	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	V	V

Estas operaciones, como la negación, pueden efectuarse también como proposiciones complejas. La tabla de verdad no varía si en vez de partir de proposiciones elementales, "p", "q", se parte de proposiciones complejas.

4. Tablas de verdad.

El valor de verdad de las proposiciones moleculares cuyas conectivas son extensionales depende, como ya se dijo, *únicamente* del valor de verdad de las proposiciones componentes, de modo que, conociendo este último, es posible determinar aquél. Esto permite construir, para cada conectiva extensional, una tabla que indica, dadas las distintas combinaciones posibles de valores de verdad de sus componentes, cuál será el valor de verdad de la proposición molecular. Una tabla de este tipo se denomina *tabla de verdad*. A continuación, damos las tablas de verdad correspondientes a las conectivas más usuales. Previamente, indicamos el símbolo que se utiliza para cada una, y algunas de las locuciones más características que les corresponden en el lenguaje usual.

SIMBOLO	NOMBRE	LOCUCIONES	TABLA DE VERDAD		
$\sim$	Negación	No; no es cierto que; no es verdad que; etc.	p	$\sim p$	
			V F	F V	
$\cdot$	Conjunción	Y; pero; aunque; sino; etc.	p	q	$p.q$
			V F V F	V V F F	V F F F
$\vee$	Disyunción inclusiva	O; y/o; a menos que; etc.	p	q	$p \vee q$
			V F V F	V V F F	V V V F
$\not\equiv$	Disyunción exclusiva	O; o bien; etc.	p	q	$p \not\equiv q$
			V F V F	V V F F	F V V F
$\supset$	Condicional	Si. . . entonces, . . . es condición suficiente para.. .; etcétera	p	q	$p \supset q$
			V F V F	V V F F	V V F V
$\equiv$	Bicondicional	Si, y sólo si; . . . es condición necesaria y suficiente para. . .; etc.	p	q	$p \equiv q$
			V V F	V F F	V F V

TRADUCCION AL SIMBOLISMO LOGICO: USO DE PARENTESIS. Cuando en una proposición aparece más de una conectiva se recurre generalmente al uso de paréntesis para realizar una traducción al simbolismo lógico carente de ambigüedad. Así, por ejemplo, al traducir la proposición: *Nos casaremos, pero viajaremos al extranjero si y sólo si obtengo previamente mi título*, deben agruparse las variables de modo que se respete el sentido original del enunciado: $p.(q \equiv r)$. Una agrupación diferente $(p.q) \equiv r$ indicaría otro significado: *Nos casaremos y viajaremos al extranjero si y sólo si ob—*

tengo previamente mi título. **Los paréntesis señalan, pues, el *alcance* de cada conectiva. Con respecto a la negación, y con el fin de evitar un uso excesivo de paréntesis, se conviene en que sólo afecta a la variable que sigue inmediatamente, a menos que, mediante paréntesis, se indique lo contrario. Así: $\sim p \vee q$ ha de entenderse como $(\sim p) \vee q$, y no como $\sim(p \vee q)$.**

FORMA PROPOSICIONAL. Se llama *forma proposicional* a toda fórmula obtenida a partir de una proposición, reemplazando las proposiciones que la constituyen por variables proposicionales y las conectivas por sus símbolos respectivos.

5. Tautología, contradicción y contingencia.

Si la tabla de verdad correspondiente a una forma proposicional contiene únicamente (en su resultado final) el valor veritativo V (verdad) se dice que ésta es *tautológica* o que es una tautología; si contiene únicamente el valor de verdad F (falsedad) se dice que es *contradictoria* o que es una contradicción. Si contiene al menos una vez el valor de verdad V y al menos una vez F, se dice que es *contingente*, o que es una contingencia. Es claro que si en una forma tautológica, se reemplazan las variables proposicionales por proposiciones, se obtendrá siempre una proposición verdadera, y en el caso de la contradicción, una proposición falsa. En cambio, en el caso de las formas contingentes, el valor de verdad de las proposiciones que resulten variará según el valor veritativo de las proposiciones con que se reemplace a las variables.

LEY LOGICA. Una ley lógica es una forma proposicional universalmente válida, es decir, tal que cualquiera sea la interpretación formalmente correcta que se haga de sus variables se obtendrá siempre una proposición verdadera. De lo dicho se desprende que *toda tautología es una ley lógica*.

6. Leyes de la lógica proposicional.

Damos a continuación una lista de algunas de las leyes lógicas más conocidas de la lógica proposicional:

$p \equiv p$ (Identidad)
$p \supset p$ (Identidad)
$p \vee \sim p$ (Tercero excluido)
$\sim(p . \sim p)$ (Contradicción)
$[(p \supset q) . p] \supset q$ (*Modus ponens*)
$[(p \supset q) \sim q] \supset \sim p$ (*Modus tollens*)
$[(p \vee q) . \sim p] \supset q$ (Silogismo disyuntivo)
$[(p \supset q) . (q \supset r)] \supset (p \supset r)$ (Silogismo hipotético)
$\sim(p \vee q) \equiv (\sim p . \sim q)$
$\sim(p . q) = (\sim p \vee \sim q)$ (Leyes de De Morgan)
$\sim\sim p \equiv p$ (Doble negación)
$(p \supset q) \equiv (\sim p \vee q)$ (Definición del condicional)
$(p \supset q) \equiv \sim(p . \sim q)$ (Definición del condicional)
$\sim(p \supset q) \equiv (p . \sim q)$ (Negación del condicional)
$(p . p) \equiv p$ (Idempotencia)
$(p \vee p) \equiv p$ (Idempotencia)
$\{[(p \supset q) . (r \supset s)] . (p \vee r)\} \supset (q \vee s)$ (Dilema constructivo)
$\{[(p \supset q) . (r \supset s)] . (\sim q \vee \sim s)\} \supset (\sim p \vee \sim r)$ (Dilema destructivo)
$(p . q) \equiv (q . p)$ (Conmutatividad de la conjunción)
$(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ (Conmutatividad de la disyunción)
$[(p . q) . r] = [p . (q . r)]$ (Asociatividad de la conjunción)
$[(p \vee q) \vee r] \equiv [p \vee (q \vee r)]$ (Asociatividad de la disyunción)
$[p . (q \vee r)] = [(p . q) \vee (p . r)]$ (Distributividad de la conjunción con respecto a la disyunción)
$[p \vee (q . r)] \equiv [(p \vee q) . (p \vee r)]$ (Distributividad de la disyunción con respecto a la conjunción).

7. Decisión de razonamientos por tablas de verdad.

Ya hemos tratado el razonamiento en general y la cuestión relativa a su validez. En el caso de aquellos razonamientos que presentan una estructura susceptible de ser analizada satisfactoriamente en los términos de la lógica proposicional, ésta ofrece una técnica para determinar su validez o invalidez. La técnica consiste en formar un condicional que tenga como antecedente la conjunción de todas las premisas del razonamiento, y como consecuente, su conclusión. Si el condicional así formado (llamado *condicional asociado* a dicho razonamiento) es tautológico, la forma de razonamiento es válida, y por consiguiente el razonamiento también lo es. De lo contrario, es inválido.

Ejemplo:

Razonamiento: Si Juan es honrado, es veraz.
Juan es honrado.
Juan es veraz.

Forma del razonamiento:

$$\begin{array}{l} p \supset q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

Condicional asociado: $[(p \supset q) \,.\, p] \supset q$

[(p	⊃	q)	.	p]	⊃	q
V	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F

Es tautológico.
El razonamiento es válido.

REGLAS LOGICAS. Las formas de razonamiento válidas se denominan *reglas lógicas*, pues permiten extraer o inferir, de ciertas proposiciones, otras, garantizando que si las primeras son verdaderas las últimas también lo serán.

8. Deducibilidad.

En un razonamiento válido la conclusión *se deduce* de las premisas. Por lo tanto, si una proposición A es *deducible* de otra B (en el dominio de la lógica proposicional) puede formarse una condicional tautológico que tenga como antecedente a B y como consecuente a A.

Ejemplo:

Proposición A: *Napoleón no era francés.*

Proposición B: *Napoleón hubiera sido francés si y sólo si hubiera nacido en Francia; pero él no nació en Francia.*

Forma de A: $\sim p$

Forma de B: $(p \equiv q) \,.\, \sim q$

Condicional: $B \supset A$

$[(p \equiv q) \,.\, \sim q] \supset \sim p$ Es tautológico.
A es deducible de B.

Si entre dos proposiciones A y B existe una relación recíproca de deducibilidad (es decir, si A es deducible de B y B es deducible de A) ambas proposiciones son *lógicamente equivalentes.*