LOGICA
TERCERA UNIDAD

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad en el tema:

II. LOGICA DE FUNCIONES O CUANTIFICACIONAL.

2. Conocerá el cálculo de la inferencia que se efectúa con funciones.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno y sin error, en el tema:

II. LOGICA DE FUNCIONES O CUANTIFICACIONAL.

2.1 Definirá el concepto de función proposicional.

2.2 Señalará en qué consiste la cuantificación.

2.3 Efectuará la simbolización de las proposiciones categóricas clásicas, según la lógica funcional en el cuadrado de oposición.

2.4 Distinguirá entre predicados monádicos y poliádicos.

2.5 Definirá las relaciones binarias.

2.6 Definirá las propiedades de las relaciones, con sus ejemplos.

INSTRUCCIONES:

Los objetivos anteriores los podrás lograr estudiando cuidadosamente el libro de LOGICA, Cap. 10, pp. 133 - 143 inclusive.

CAPITULO 10

LOGICA DE FUNCIONES

1. Concepto de función proposicional.

Hay muchos razonamientos cuya válidez o inválidez no puede decidirse solamente con el análisis de la lógica proposicional. Consideremos el caso del siguiente razonamiento válido: *Todos los gatos son mamíferos. — Tom es un gato. Por lo tanto, Tom es mamífero*. Este razonamiento resulta inválido para la lógica proposicional, pues su condicional asociado tiene una forma no tautológica: $(p.q)\supset r$. Ello se debe a que la lógica proposicional analiza, como hemos visto, las proposiciones compuestas en proposiciones más simples hasta llegar a las atómicas, deteniéndose allí.

Para estudiar razonamientos como el expuesto es necesario un método de análisis más fino, capaz de penetrar en la forma lógica de las proposiciones atómicas mismas. El desarrollo de este método constituye un capítulo fundamental de la lógica moderna denominado, indistintamente, teoría de la cuantificación, lógica de funciones, lógica de predicados, etc.. Es central en este tema el concepto de *función proposicional*. Para introducirlo, consideremos la conclusión de nuestro razonamiento: *Tom es — mamífero*. Esta es una proposición atributiva, en que se atribuye una propiedad (la de ser mamífero) a un individuo (Tom). También puede expresarse esto diciendo que el predicado *mamífero* se predica del individuo — *Tom*. Tenemos aquí dos tipos de entidades: predicados e individuos. Para simbolizarlos utilizamos las letras mayúsculas F, G, H, etc., como *constantes de predicado* (designan un predicado en especial), las letras minúsculas *a,b,c, etc.*, como *constantes de individuo* (designan un individuo determinado), y las minúsculas *x, y, z* como *variables de individuo* (designan un individuo no especificado). Según esto, la proposición que nos ocupa se simbolizaría como: *Ma* (donde *M*: mamífero; *a: Tom*). Consideremos ahora la expresión: *Mx* (donde *M*: mamífero). Ella *no* simboliza una proposicion, puesto que no es ni verdadera ni falsa, dado que *x*, por ser una variable, no designa ningún individuo en particular. Pero *puede transformarse en una proposición* sustituyendo la variable individual *x* por una constante individual, por ejemplo, *a* donde *a* designa un individuo determinado (como Tom). Expresiones como *Mx* que contienen variables individuales y tales que si se sustituyen dichas variables por constantes se obtienen proposiciones, se denominan *funciones proposicionales*. Las constantes que pueden sustituir a una variable se denominan *valores* de dicha variable.

2. La cuantificación.

Como quedó dicho, una función proposicional puede transformarse en una proposición sustituyendo las variables que contiene por constantes. Una segunda manera de efectuar esa transformación es la que se denomina *cuantificación*. Esta consiste en prefijar a la función proposicional una expresión llamada *cuantificador* mediante la cual se establece o bien que el predicado se aplica a —o es satisfecho por— todos los valores de la variable que figura en dicho cuantificador, o bien que es satisfecho al menos por uno de estos valores. El primer caso corresponde al *cuantificador universal*, que se simboliza usualmente como *(x)* (y se lee *para todo x*). Así *Fx* se interpreta como *x es filosófo*, *(x)Fx* significa: *para todo x, x es filósofo.* El segundo caso corresponde al *cuantificador existencial*, que se simboliza $(\exists x)$ (existe al menos un *x* tal que). En nuestro ejemplo: $(\exists x)Fx$ significará: *Existe al menos un x que es filósofo.*

VARIABLES LIBRES Y LIGADAS. De este modo, expresiones como *(x)Fx* y $(\exists x)Fx$, a pesar de contener variables, no son ya funciones proposicionales, sino proposiciones. Ello se debe a que las variables de la función han caído dentro del dominio o *alcance* de un cuantificador. Se dice de las variables que se hallan dentro del alcance de un cuantificador que están *ligadas*; de lo contrario, son variables *libres*. Para que una expresión sea una función proposicional, debe contener al menos una variable libre.

CONVENCION. Se conviene en que el alcance de un cuantificador se extiende hasta la primera conectiva que contenga la expresión que le sigue; si desea dársele un alcance mayor, debe encerrarse la expresión que se pretende afectar entre paréntesis. En los siguientes ejemplos las variables libres se distinguen con letras subrayadas:

$$(\exists x)(Fx.Gx);\ (y)\,Fy.\underline{Gy};\ (x)\,[(Fx.\underline{Gy}) \supset Gx];$$
$$(x)\,(\exists y)\,(Fx.Gy)$$

3. Leyes de equivalencia entre la cuantificación universal y la existencial.

Las siguientes leyes expresan relaciones de equivalencia entre la cuantificación universal y la existencial:

$$\boxed{\begin{array}{c} (x)Fx \equiv \sim(\exists x)\sim Fx \\ (\exists x)Fx \equiv \sim(x)\sim Fx \\ \sim(x)Fx \equiv (\exists x)\sim Fx \\ \sim(\exists x)Fx \equiv (x)\sim Fx \end{array}}$$

Estas equivalencias permiten traducir cualquier fórmula cuantificada universalmente a otra fórmula con cuantificación existencial y viceversa, lo que, unido a ciertas transformaciones autorizadas por reglas y leyes lógicas, permite simplificar algunas fórmulas y realizar algunas demostraciones.

Ejemplo:

$$\sim (\exists x)[Fx \supset (\sim Gx \vee \sim Hx)$$

Paso 1. Por ley de equivalencia entre cuantificadores.

$$(x)\sim[Fx \supset (\sim Gx \vee \sim Hx)]$$

Paso 2. Por ley de negación del condicional.

$$(x)[Fx . \sim(\sim Gx \vee \sim Hx)]$$

Paso 3. Por ley de De Morgan:

$$(x)[Fx.(\sim\sim Gx . \sim\sim Hx)]$$

Paso 4. Por ley de doble negación:

$$(x)(Fx . Gx . Hx)$$

4. Distribución de cuantificadores.

Otras leyes referidas a expresiones cuantificadas que señalaremos son las de distribución de cuantificadores: el cuantificador universal es distributivo con respecto a la conjunción (pero no a la disyunción) y el existencial lo es con respecto a la disyunción (pero no a la conjunción).

$$(x)(Fx . Gx) \equiv [(x) Fx . (x) Gx]$$
$$(\exists x)(Fx \vee Gx) \equiv [(\exists x) Fx \vee (\exists x) Gx]$$

Pueden establecerse, además las siguientes implicaciones:

$$[(x)Fx \vee (x) Gx] \supset (x) (Fx \vee Gx)$$
$$(\exists x)(Fx . Gx) \supset [(\exists x) Fx . (\exists x) Gx]$$

5. Simbolización de las proposiciones categóricas clásicas.

La lógica funcional permite analizar las proposiciones categóricas

clásicas y las inferencias en que sus términos juegan un papel significativo. Según la moderna teoría de la cuantificación, las proposiciones categóricas típicas se simbolizan de la siguiente manera:

	ANALISIS CLASICO	ANALISIS DE LA LOGICA FUNCIONAL
A UNIVERSAL AFIRMATIVA	*Todo S es P*	$(x)(Fx \supset Gx)$
E UNIVERSAL NEGATIVA	*Ningún S es P*	$(x)(Fx \supset \sim Gx)$
I PARTICULAR AFIRMATIVA	*Algún S es P*	$(\exists x)(Fx . Gx)$
O PARTICULAR NEGATIVA	*Algún S no es P*	$(\exists x)(Fx . \sim Gx)$

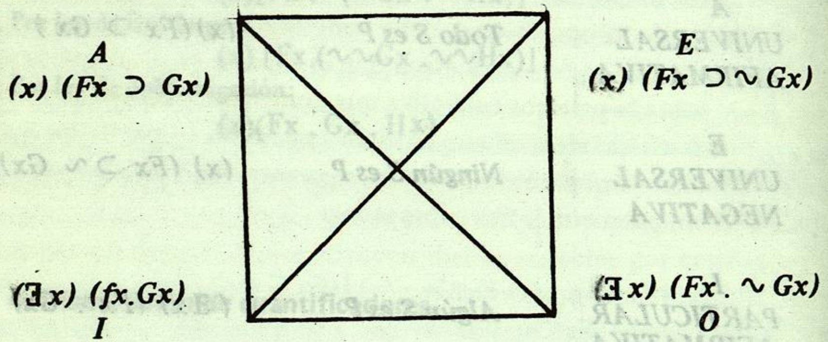
Hemos visto que términos como *mamífero y vertebrado* se consideran *predicados*; decir que *todo S es P* (todo mamífero es vertebrado) equivale a decir, según este análisis, que todo individuo, *si* tiene la propiedad S (en el ejemplo, la de ser mamífero), tiene la propiedad P (la de ser vertebrado). O sea que las proposiciones universales del tipo A son *condicionales generalizados.* Lo mismo ocurre con las proposiciones universales negativas (tipo E): todo individuo, *si* tiene la propiedad S, no tiene la propiedad P. En cambio, las proposiciones del tipo I y del tipo O se interpretan como *existenciales: Hay al menos algún individuo que tiene las propiedades S y P,* y *Hay al menos algún individuo que tiene la propiedad S y no tiene la propiedad P*, respectivamente.

Sobre la base de estas formas típicas, pueden traducirse proposiciones más complejas. Ejemplos:

Algún gato de angora es blanco: $(\exists x)(Fx . Gx . Hx);$
Ningún hombre noble es racista: $(x)[(Fx . Gx) \supset \sim Hx]$

6. Interpretación moderna del cuadrado de oposición.

Según la simbolización que ya se ha estudiado, el cuadrado clásico de oposición de los juicios adoptaría la siguiente forma:



Ahora bien en esta interpretación moderna de las proposiciones categóricas la mayoría de las inferencias del cuadrado clásico no son válidas. Presentamos a continuación un somero análisis de las mismas:

	LOGICA CLASICA	INTERPRETACION MODERNA
Proposiciones contrarias (A – E)	No pueden ser ambas verdaderas.	Pueden ser verdaderas ambas; si no hay individuos que tengan la propiedad señalada en el antecedente, éste resulta falso y por lo tanto el condicional será verdadero independientemente del valor de verdad del consecuente.
Proposiciones subcontrarias (I–O)	No pueden ser ambas falsas.	Pueden ser ambas falsas; si no hay individuos que posean la propiedad señalada en el primer miembro de la conjunción, ésta resulta falsa, independientemente del valor de verdad del otro miembro.

	LOGICA CLASICA	INTERPRETACION MODERNA
Relación de subalternación (A–I) (E–O)	Si la universal es verdadera, la particular respectiva también lo será.	Puede ser verdadera la universal y falsa la particular respectiva; en el caso de que no haya individuos que posean el atributo señalado en el antecedente de la proposición universal, éste resulta verdadero (ver arriba A–E) y la conjunción que aparece en la particular respectiva, falsa (ver arriba I–O).
	Si la particular es falsa, la universal correspondiente también lo será.	Puede ser falsa la particular y verdadera la universal respectiva; el análisis es igual al anterior.
Proposiciones contradictorias (A–O) (E–I)	Tienen su valor de verdad diferente en todos los casos.	Esta es la única inferencia del cuadrado que se mantiene; es posible *demostrar* en términos de la lógica funcional, mediante una serie de inferencias válidas, que la verdad de un juicio implica la falsedad de su contradictorio, y viceversa. Presentamos a continuación un ejemplo de demostración de este tipo.

DEMOSTRACION de A ≡ ∼O

Equivalencia a demostrar: (x) (Fx ⊃ Gx) ≡ ∼ (∃x) (Fx . ∼ Gx)

1. Por ley de equivalencia de cuantificadores:

$$(x)\ (Fx \supset Gx) \equiv \sim (\exists x) \sim (Fx \supset Gx)$$

2. Por ley de negación del condicional.

$$(x)\ (Fx \supset Gx) \equiv \sim (\exists x)\ (Fx\ .\ \sim Gx)$$

7. Predicados monádicos y poliádicos.

A todo predicado puede asignársele un *grado*; éste se halla determinado por el número *mínimo* de individuos de los cuales tiene sentido predicarlo. Así, por ejemplo, tiene sentido predicar *bueno* de un solo individuo (*Juan* es bueno); en cambio, un predicado como *más alto que* requiere al menos dos nombres de individuo para que pueda formularse con él una oración con sentido (*Juan* es más alto que *Pedro*). Los predicados de grado I (*monádicos*) corresponden a *propiedades* de los objetos o individuos, y los de grado mayor que I (*diádicos, triádicos*, y, en general, *poliádicos*) corresponden a *relaciones*. Para indicar si un predicado es monádico diádico, etc., se colocan, a la derecha de la letra que lo representa, variables de individuo en una cantidad idéntica al grado del predicado. Ejemplos: *Bueno* (de grado I): *Fx; Ser tan alto como* (de grado 2): *Fxy; Estar situado entre* (de grado 3): *Fxyz*.

8. Lógica de predicados poliádicos.

El tratamiento sistemático de los predicados poliádicos da origen a una rama más compleja de la lógica de funciones que posibilita el estudio de algunas inferencias que no podrían analizarse correctamente si nos limitáramos a los predicados monádicos y su cuantificación. Así, por ejemplo, en una inferencia válida como *Alguien es amado por todos; por lo tanto, todos aman a alguien*, deberíamos distinguir, si sólo reconociéramos predicados monádicos, dos predicados distintos: *ser amado por todos (Fx)* y *amar a alguien (Gx)*, de modo que nuestra inferencia tendría la forma: $(\exists x)Fx \supset (x)Gx$, la que es obviamente inválida. En cambio, tomando en cuenta la existencia del predicado diádico *amar a (Fxy)*, la estructura de la inferencia mencionada sería:

$$(\exists y)\ (x)\ Fxy \supset (x)\ (\exists y)\ Fxy$$

cuya validez puede demostrarse. Adviértase que la introducción de predicados poliádicos obliga a emplear más de un cuantificador para ligar las variables libres de una función. Presentamos a continuación ejemplos de

simbolización de algunas proposiciones generales en el lenguaje de la lógica de predicados poliádicos:

1. Todo atrae a todo: $(x)\,(y)\,Fxy$
2. Todo atrae a algo: $(x)\,(\exists y)\,Fxy$
3. Algo es atraído por todo: $(\exists x)\,(y)\,Fyx$
4. Todo hombre ama algo: $(x)\,[Fx \supset (\exists y)\,Gxy]$
5. Todo hombre ama a alguna persona: $(x)\,[Fx \supset (\exists y)\,(Hy\,.\,Gxy)]$
6. Algún cuadro es admirado por todos los críticos: $(\exists x)\,[Fx\,.\,(y)\,(Gy \supset Hyx)\,]$

9. Relaciones binarias: dominio, codominio y campo.

Como ya se dijo, los predicados poliádicos indican *relaciones* entre objetos o individuos. Las relaciones que corresponden a los predicados diádicos (o de grado 2) se llaman relaciones *binarias*. Algunos ejemplos de relaciones binarias son: *Ser sobrino de, ser tan alto como, ser amigo de, — etc.*

Dada una relación binaria cualquiera, que simbolizaremos (xRy), se denomina *referente* al primer miembro de la relación (x) y *relato* al segundo (y). Ejemplo: en la afirmación *Juan es hijo de Pedro*, Juan es referente y Pedro relato de la relación *ser hijo* de. Se llama *dominio* de una relación a la clase de todos los referentes de la misma, es decir a la clase de todos los *x* que tienen la relación R con algún y, *y codominio*, o dominio converso a la clase de todos sus relatos, es decir, a la clase de todos los y tales que existe al menos un *x que tiene con él la relación xRy. Se llama* campo (C) de una relación, a la clase formada por el dominio y el codominio de la misma. Ejemplo: dada la relación *ser marido de*, el dominio es el conjunto de todos los esposos; el codominio el de todas las esposas, y el campo, el conjunto de todas las personas casadas. Dos de estas tres clases (o las tres) pueden ser iguales entre sí. Por ejemplo, en la relación *ser amigo de*, el dominio, codominio y campo coinciden.

10. Propiedades de las relaciones.

Las relaciones binarias presentan ciertas propiedades formales. Algunas de ellas son las relacionadas con la *reflexividad*, la *simetría* y la *transitividad*.

REFLEXIVIDAD

REFLEXIVIDAD TOTAL. **Una relación es totalmente reflexiva cuando todos los individuos tienen esa relación consigo mismos. Ejemplo:** *ser idéntico a.*

$$Def.: (x)\ xRx$$

REFLEXIVIDAD. **Una relación es reflexiva cuando todos los individuos que pertenecen al campo de la relación tienen esa relación consigo mismos. Ejemplo:** *ser tan inteligente como.*

$$Def.: (x)\ (x \xi C_R \supset xRx)$$ [1]

IRREFLEXIVIDAD. **Una relación es irreflexiva cuando ningún individuo tiene esa relación consigo mismo. Ejemplo:** *ser más alto que.*

$$Def.: (x) \sim xRx$$

NO REFLEXIVIDAD. **Una relación es no–reflexiva cuando no es reflexiva ni irreflexiva. Ejemplo:** *herir a.*

$$Def.: \sim (x)\ (x \xi C_R \supset xRx)\ .\ \sim (x) \sim xRx$$

SIMETRIA.

SIMETRIA. **Una relación es simétrica cuando para todo par de valores x e y, si x tiene esa relación con y, y tiene esa relación con x. Ejemplo:** *estar casado con.*

$$Def.: (x)(y)\ (xRy \supset yRx)$$

(1) El símbolo ξ que aparece en esta fórmula significa "pertenece a".

ASIMETRIA. **Una relación es asimétrica cuando para todo par de valores x e y, si x tiene esa relación con y, y no la tiene con x. Ejemplo:** *ser madre de.*

$$Def.: (x)(y)\ (xRy \supset \sim yRx)$$

NO SIMETRIA. **Una relación es no–simétrica cuando no es simétrica ni asimétrica. Ejemplo:** *amar a.*

$$Def.: \sim[(x)(y)(xRy \supset yRx)]\ .\ \sim[(x)(y)(xRy \supset \sim yRx)]$$

ANTISIMETRIA. **Una relación es antisimétrica cuando para todo par de valores x e y, si x tiene esa relación con y, e y la tiene con x, entonces x es igual a y. Ejemplo:** *ser mayor o igual que:*

$$Def.: (x)(y)[(xRy.yRx) \supset x = y]$$

TRANSITIVIDAD

TRANSITIVIDAD. **Una relación es transitiva cuando para cualquier conjunto de valores x,y,z, si x tiene esa relación con y, e y la tiene con z, entonces x la tiene con z. Ejemplo:** *ser mayor que*

$$Def.: (x)(y)(z)[(xRy\ .\ yRz) \supset xRz]$$

INTRANSITIVIDAD. **Una relación es intransitiva cuando para cualquier conjunto de valores x,y,z, si x tiene esa relación con y, e y la tiene con z, entonces x no tiene esa relación con z. Ejemplo:** *ser padre de*

$$Def.: (x)(y)(z)[(xRy\ .\ yRz) \supset \sim xRz]$$

NO TRANSITIVIDAD. Una relación es no–transitiva cuando no es transitiva ni intransitiva. Ejemplo: *amar a*

$$Def.: \sim\left\{(x)(y)(z)[(xRy.yRz) \supset xRz]\right\}\ .\ \sim \left\{(x)(y)(z)[xRy.yRz) \supset \sim xRz]\right\}$$

AUTOEVALUACION

1. ¿Qué es una función proposicional ?:

2. ¿Qué es la cuantificación ? :

3. ¿Cómo se interpretan las proposiciones del tipo "I" y "O" ?:

4. ¿Cuáles son las proposiciones contradictorias en el cuadrado de oposición ?:

5. ¿Cuáles son los predicados que corresponden a relaciones ?:

6. ¿Cómo se les llama a las relaciones que corresponden a los diádicos?:

7. ¿Qué propiedades formales presentan las relaciones binarias ?:

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

1. Son expresiones que por contener variables individuales no simbolizan a una proposición; pero pueden transformarse en proposiciones sustituyendo la variable individual por una constante individual.

2. La cuantificación consiste en prefijar a la función proposicional una expresión llamada cuantificador mediante la cual se establece o bien, que el predicado se aplica a todos los valores de la variable que figura en dicho cuantificador, (universal), o bien, que se aplica al menos por uno de esos valores (existencial).

3. Las proposiciones del tipo I y O, se interpretan como existenciales.

4. Las proposiciones contradictorias son (A – O) y (E – I).

5. Los predicados que corresponden a relaciones, son los poliádicos.

6. A las relaciones que corresponden a los predicados diádicos se les llama relaciones binarias.

7. Las propiedades formales que presentan las relaciones binarias son la reflexividad, la simetría y la transitividad.