LOGICA
TERCERA UNIDAD

OBJETIVO DE UNIDAD:

El alumno, al terminar la unidad, en el tema:

III. LOGICA DE CLASES.

3. Conocerá el cálculo de la inferencia que se efectúa con clases.

OBJETIVOS DE APRENDIZAJE:

El alumno, por escrito en su cuaderno, sin error, en el tema:

III. LOGICA DE CLASES.

3.1 Definirá la noción de clase o pertenencia.

3.2 Distinguirá las operaciones entre las clases y su representación gráfica.

3.3 Señalará en qué consisten la clase universal y la clase nula.

3.4 Explicará las relaciones entre las clases.

3.5 Diferenciará entre operaciones y relaciones con clases.

3.6 Enunciará la relación entre inclusión y pertenencia.

3.7 Graficará los diagramas de Venn, en relación a los silogismos categóricos.

INSTRUCCIONES:

Los objetivos anteriores los podrás lograr estudiando cuidadosamente el libro de LOGICA, Cap. 11, pp. 147 - 154 inclusive.

CAPITULO 11

LOGICA DE CLASES

1. Noción de clase y pertenencia.

Cada concepto general determina el *conjunto* o la *clase* de los objetos o individuos a los cuales se aplica. El concepto *mamífero*, por ejemplo, determina la clase de todos los individuos que tienen la propiedad de ser mamíferos. Suelen usarse, para representar clases cualesquiera, las primeras letras (minúsculas) del alfabeto griego: α, β γ, etc. En cuanto a los individuos que integran una clase dada, se dice que son *miembros de* o *pertenecen a* dicha clase. Así, por ejemplo, Lavoisier pertenece a la clase de los químicos, pero no pertenece a la clase de los artistas. Para simbolizar la relación de pertenencia se emplea el símbolo ξ (la épsilon griega) y para expresar su negación se usa el mismo símbolo cruzado con una barra: $\not\xi$. De este modo, $a\xi\alpha$,y $a\not\xi\alpha$ se leen *a pertenece* a α y *a no pertenece* a α, respectivamente. Como se desprende de lo dicho más arriba, afirmar que un individuo α tiene la propiedad *F (Fa),* equivale a afirmar que α pertenece a una clase α formada por los individuos que tienen dicha propiedad ($a\xi\alpha$). La equivalencia se mantiene si las expresiones contienen variables: $(x)\, x\xi\alpha$ es equivalente a $(x)\, Fx$.

2. Operaciones entre clases.

Así como en aritmética se opera con números, obteniendo, a partir de ciertos números, otros, es posible aquí operar con clases y obtener nuevas clases. Definiremos las siguientes operaciones entre clases:

Intersección (o producto lógico). La intersección de dos clases a y β ($a \cap \beta$) es la clase formada por todos los individuos que pertenecen a a y a β. En símbolos, $a \cap \beta =_{\text{DF.}} \hat{x}(x \xi a \,.\, x \xi \beta)$, donde el símbolo $\hat{x}$ es el llamado *operador de abstracción*, que se traduce como *la clase de todos los x tales que*. Ejemplo: la intersección de la clase de las plantas y la clase de las cosas venenosas es la clase de las plantas venenosas.

Unión (o suma lógica). La unión de dos clases a y β ($a \cup \beta$) es la clase formada por todos los individuos que pertenecen a a o (en sentido *inclusivo*) pertenecen a β. En símbolos $a \cup \beta =_{\text{DF.}} \hat{x}(x \xi a \vee x \xi \beta)$. Ejemplo: la unión de la clase de los hombres y la clase de las mujeres es la clase de los seres humanos.

Complemento. El complemento de una clase a ($\bar{a}$) es la clase formada por todos los objetos o individuos que *no* pertenecen a a. En símbolos ($\bar{a} =_{\text{DF.}} \hat{x}\, x \not\xi a$.) Ejemplo: el complemento de la clase de los hombres está formado por todos los objetos del universo que no son hombres (piedras, árboles, etc.). Es común, sin embargo, determinar el complemento de una clase no con referencia a todos los objetos del universo sino a todos los objetos que forman parte de cierto *universo del discurso* más restringido. Así, por ejemplo, en un tratado de biología el universo del discurso no es el conjunto de todas las cosas, sino el conjunto de los seres vivos, de modo que el complemento de la clase de los hombres está formado, en este contexto, por todos los *seres vivos* que no son hombres.

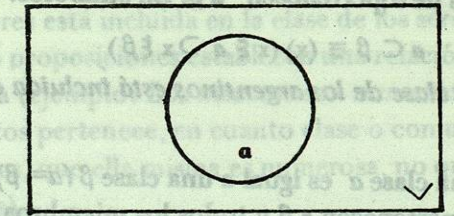
3. Clase universal y clase nula.

La *clase universal* es la clase a la cual pertenecen todos los individuos. Símbolo V. Para definirla puede usarse el principio de identidad, pues todo objeto lo satisface: $V =_{\text{DF.}} \hat{x}\, x = x$. La *clase nula o vacía* es la clase a la cual

no pertenece ningún individuo. Símbolo $\wedge$. Para definirla se emplea la negación del mismo principio, pues ningún objeto la satisface:

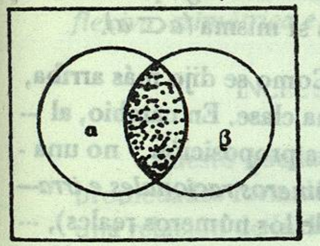
$$\wedge =_{\text{DF.}} \hat{x}\; x \neq x.$$

Representación gráfica. Una clase puede representarse gráficamente mediante un círculo inscripto en un rectángulo. El círculo representa la clase dada y el rectángulo la clase universal o el universo del discurso.

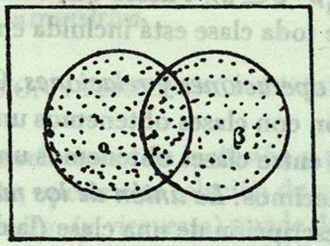


Las operaciones con clases se representan así:

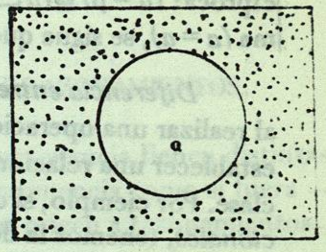
Intersección $a \cap \beta$



Unión $a \cup \beta$

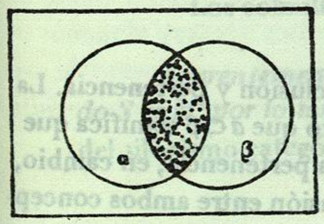


Complemento a

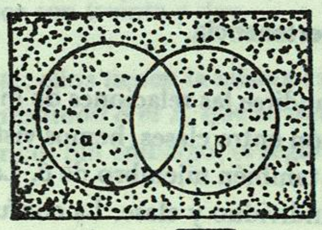


La zona sombreada en negro representa el resultado de la operación. Para representar operaciones más complejas, las descomponemos en pasos sucesivos dibujando un gráfico para cada uno de ellos hasta llegar al resultado final.

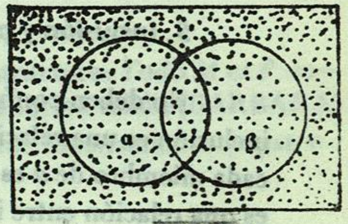
Ejemplo: $(a \cap \beta) \cup a$



Paso 1: $a \cap \beta$



Paso 2: $\overline{a \cap \beta}$



Paso 3: $(\overline{a \cap \beta}) \cup a$

4. Relaciones entre clases.

Además de operar con clases, es posible establecer relaciones entre ellas. Definimos a continuación las siguientes relaciones entre clases:

***Inclusión*. Una clase a está incluida en una clase β ($a \subset \beta$) si y sólo si todos los miembros de a pertenecen a β. En símbolos:**

$$a \subset \beta \equiv (x)(x \xi a \supset x \xi \beta)$$

Ejemplo: *La clase de los argentinos está incluida en la clase de los americanos.*

Igualdad. Una clase a es igual a una clase β ($a = \beta$) si y sólo si todos los miembros de a pertenecen a β y todos los miembros de β pertenecen a a. En símbolos: $a = \beta \equiv (x)(x \xi a \equiv x \xi \beta)$. De esto se desprende que dos clases son iguales si y sólo si existe entre ellas una relación de inclusión recíproca: $(a = \beta) \equiv (a \subset \beta \cdot \beta \subset a)$. Puesto que toda clase es igual a sí misma $(a = a)$, se sigue que toda clase está incluida en sí misma $(a \subset a)$.

Diferencia entre operaciones y relaciones. Como se dijo más arriba, al realizar una operación con clases obtenemos una clase. En cambio, al establecer una relación entre clases obtenemos una proposición, no una clase. Por ejemplo, si decimos: *La unión de los números racionales e irracionales*, tenemos la descripción de una clase (la de los números reales), pero, como no afirmamos ni negamos nada, no tenemos una proposición. En cambio, si decimos: *La clase de los números racionales está incluida en la clase de los números reales*, tenemos una afirmación y, por lo tanto, una proposición.

5. Inclusión y pertenencia.

No deben confundirse las relaciones de inclusión y pertenencia. La inclusión es una relación entre clases; hemos visto que $a \subset \beta$ significa que cada miembro de a es también miembro de β. La pertenencia, en cambio, es una relación entre individuo y clase. La confusión entre ambos concep-

tos se origina en la existencia de *clases de clases*, esto es, clases que están formadas a su vez por clases, no por individuos. Así, por ejemplo, los miembros de la *clase de los objetos numerosos* no son individuos, sino clases; a saber: la clase de los insectos, la clase de los hombres, etc.. Estas clases *pertenecen* a la clase de los objetos numerosos, pero *no están incluidas* en ella. En realidad están tomadas como todos, como individuos. Por lo general, las proposiciones universales establecen una relación de inclusión entre clases (ejemplo: *Todos los hombres son mortales*, expresa que la clase de los hombres está incluida en la clase de los seres mortales); pero en ocasiones estas proposiciones establecen una relación de pertenencia de una clase a otra (ejemplo: *Los insectos son numerosos*, expresa que la clase de los insectos pertenece, en cuanto clase o conjunto, a la clase de las cosas numerosas, que ella misma es numerosa, no que cada uno de sus miembros lo es).

Las diferencias entre la inclusión y la pertenencia se ponen claramente de manifiesto al considerar las *propiedades formales* de cada una. Mientras la primera es *reflexiva, antisimétrica y transitiva*, la segunda es *irreflexiva, asimétrica e intransitiva.*

INCLUSION Y PERTENENCIA EN LOS RAZONAMIENTOS.

Puesto que las relaciones de inclusión y pertenencia tienen distintas propiedades formales, operar con relación de pertenencia como si fuera una relación de inclusión (y viceversa) puede dar origen a razonamientos inválidos. Consideremos, por ejemplo, los siguientes razonamientos:

1. Los cuadriláteros son polígonos.
   Los cuadrados son cuadriláteros.
   Los cuadrados son polígonos.

2. Los dientes son treinta y dos.
   Los colmillos son dientes.
   Los colmillos son treinta y dos.

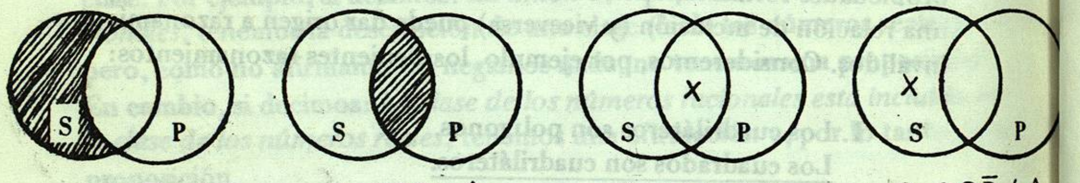
Aparentemente, ellos tienen la misma estructura: *Todo M es P, todo S es M; por lo tanto, todo S es P,* que es una forma válida (BARBARA) del silogismo categórico. Sin embargo, el segundo razonamiento es patentemente inválido, pues tiene premisas verdaderas y conclusión falsa. La falacia se origina al tratar una relación de *pertenencia* (que es, por ende, intransitiva): *Los dientes son treinta y dos*, como si fuera una relación de *inclusión* (y, por consiguiente, transitiva).

6. Diagramas de Venn. Resolución de silogismos categóricos.

Las proposiciones categóricas, que ya fueron traducidas al simbolismo de la lógica de funciones, pueden también traducirse al de la lógica de clases del siguiente modo:

A	*(Todo S es P):*	$S \subset P$	o	$S \cap \bar{P} = \Lambda$
E	*(Ningún S es P):*	$S \subset \bar{P}$	o	$S \cap P = \Lambda$
I	*(Algún S es P):*	$\sim (S \subset \bar{P})$	o	$S \cap P \neq \Lambda$
O	*(Algún S no es P):*	$\sim (S \subset P)$	o	$S \cap \bar{P} \neq \Lambda$

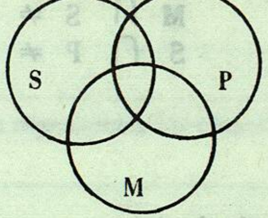
Se pueden representar gráficamente estas proposiciones empleando los llamados *diagramas de Venn*.



A: $S \cap \bar{P} = \Lambda$ E: $S \cap P = \Lambda$ I: $S \cap P \neq \Lambda$ O: $S \cap \bar{P} \neq \Lambda$

El rayado indica ausencia de miembros. Así, en la proposición A(Todo S es P), el sector que corresponde a los S que no son P es vacío, y por lo tanto, aparece un rayado. Una cruz (x) indica que existe al menos un individuo; así, en la proposición I, que dice que hay al menos un individuo que es S y P a la vez, aparece una cruz en la intersección de estas dos clases. Los sectores que aparecen en blanco indican solamante *falta de información* acerca de ellos.

Entre otras aplicaciones, los diagramas de Venn pueden emplearse para la resolución de silogismos. Se necesita para ello, en lugar de dos, tres círculos, uno para cada una de las clases correspondientes a los términos del silogismo.

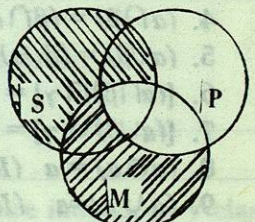


Luego se representan en este gráfico las dos premisas del silogismo; como cada premisa es una proposición categórica, se emplea para representarlas la técnica señalada arriba, considerando los círculos de a dos por vez. Si, por el solo hecho de dibujar las premisas, queda representada la conclusión, el silogismo es válido: de lo contrario, es inválido.

NOTA. Si las premisas del silogismo son proposiciones que difieren en la cantidad, es decir, si una es particular y la otra universal, debe representarse primero esta última, independientemente del orden en que aparezcan.

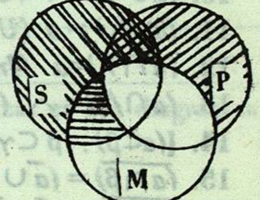
Ejemplo 1 (BARBARA):

Todo M es P	$M \cap \bar{P} = \Lambda$
Todo S es M	$S \cap \bar{M} = \Lambda$
Todo S es P	$S \cap \bar{P} = \Lambda$



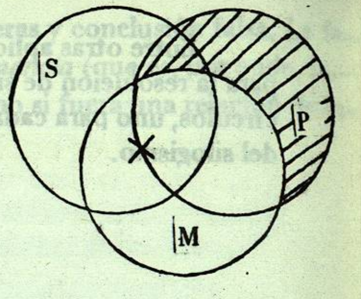
Ejemplo 2 :

Todo P es M	$P \cap \bar{M} = \Lambda$
Todo S es M	$S \cap \bar{M} = \Lambda$
Todo S es P	$S \cap \bar{P} = \Lambda$



Cuando no se tiene información suficiente para decidir en cuál de dos sectores determinados corresponde dibujar una cruz, debe colocarse ésta en la línea divisoria de los dos sectores. Esta forma de representación debe interpretarse en el sentido de que *no* estamos autorizados a considerar que la cruz *pertenece a uno* de los dos sectores en especial.

Ejemplo:



Todo P es M $\quad P \cap \bar{M} = \wedge$
Algún M es S $\quad M \cap S \neq \wedge$
Algún S es P $\quad S \cap P \neq \wedge$

7. Leyes del cálculo de clases.

Al igual que la lógica proposicional y la funcional, la lógica de clases también presenta leyes, es decir, expresiones universalmente válidas. Algunas de estas leyes son las siguientes:

1. $a = a$ *(Identidad)*
2. $(a \cup \bar{a}) = \vee$ *(Tercero excluido)*
3. $(a \cap \bar{a}) = \wedge$ *(Contradicción)*
4. $(a \cap \beta) = (\beta \cap a)$ *(Conmutatividad de $\cap$)*
5. $(a \cup \beta) = (\beta \cup a)$ *(Conmutatividad de $\cup$)*
6. $[(a \cap \beta) \cap \gamma] = [a \cap (\beta \cap \gamma]$ *(Asociatividad de $\cap$)*
7. $[(a \cup \beta) \cup \gamma] = [a \cup (\beta \cup \gamma]$ *(Asociatividad de $\cup$)*
8. $(a \cap a) = a$ *(Idempotencia de)*
9. $(a \cup a) = a$ *(Idempotencia de $\cup$)*
10. $(a \cup \vee) = \vee$ *(Unión con la clase universal)*
11. $(a \cup \wedge) = a$ *(Unión con la clase nula)*
12. $(a \cap V) = a$ *(Intersección con la clase universal)*
13. $(a \cap \wedge) = \wedge$ *(Intersección con la clase nula)*
14. $[(a \subset \beta) . (\beta \subset \gamma)] \supset (a \subset \gamma)$ *(Transitividad de la inclusión)*
15. $\overline{(a \cap \beta)} = (\bar{a} \cup \bar{\beta})$ *(Leyes de Morgan)*
16, $\overline{(a \cup \beta)} = (\bar{a} \quad \bar{\beta})$
17. $[a \cap (\beta \cup \gamma)] = [(a \cap \beta) \cup (a \cap \gamma)$ *(Distributividad de $\cap$ con respecto de $\cup$)*
18. $[a \cup (\beta \cap \gamma)] = [(a \cup \beta) \cap (a \cup \gamma)]$ *(Distributividad de $\cup$ con respecto a $\cap$)*

AUTOEVALUACION

1. ¿Cómo se define la noción de clase?:

2. ¿Qué letras se utilizan para representar las clases?:

3. ¿Cuáles son las operaciones entre clases?:

4. ¿Cuál es la clase a la que pertenecen todos los individuos?:

5. ¿Cuáles son las relaciones que se dan entre las clases?:

6. ¿Qué nombre recibe la relación existente entre individuos y clase?:

7. ¿Cuántos círculos se requieren, para simbolizar en los diagramas de Venn, los silogismos?:

RESPUESTAS A LA AUTOEVALUACION

1. Es el conjunto de objetos o individuos a los cuales se les aplica y determina su cualidad.

2. Las letras que se utilizan para representar las clases son: las primeras letras minúsculas del alfabeto griego: α , β, γ, etc.

3. Las operaciones entre clases son: intersección, unión y complemento.

4. La clase a la que pertenecen todos los individuos, es la clase universal.

5. Las relaciones que se dan entre las clases son: inclusión e igualdad.

6. La relación existente entre individuos y clase se llama relación de pertenencia.

7. Se requieren tres círculos, que representan respectivamente al término mayor (P) al término menor (S) y al término medio (M).